ЖЭТФ/JETP, 2027, том 171, вып. 1, стр. 123–133 © 2027

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ИНЕРЦИОННЫХ АКТИВНЫХ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ В ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ ПРИ СИЛЬНОДЕМПФИРОВАННОМ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Э. А. Саметов [*]***, Е. А. Лисин***

Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 августа 2026 г.,
после переработки 10 октября 2026 г.
Принята к публикации 12 октября 2026 г.

Исследуются спектральные характеристики инерционных активных броуновских частиц, локализованных в гармонической ловушке, в сильнодемпфированном режиме движения. Рассмотрена модель активной броуновской частицы с поступательной и вращательной инерцией, а также проведено численное моделирование динамики системы в широком диапазоне параметров активности и жесткости удерживающего потенциала. Получено аналитическое описание спектральной плотности колебаний на основе модели активной броуновской частицы с поступательной инерцией без учета вращательной инерции. Показано, что в сильнодемпфированном режиме данное описание корректно воспроизводит спектры колебаний, полученные в результате численного моделирования, включая случай частиц с конечной вращательной инерцией. Установлено, что увеличение активности приводит к переходу от пассивного броуновского движения к активному режиму, сопровождающемуся усилением низкочастотного вклада и существенным изменением формы спектральной плотности. Показано, что в рассматриваемом пределе спектр активной силы приобретает лоренцеву форму, характерную для модели активной частицы Орнштейна – Уленбека, что позволяет установить связь между описаниями движения в рамках этой модели и модели активной броуновской частицы. Выявлено, что заметные отклонения между аналитическим описанием и результатами моделирования возникают только в случае сильной ловушки, где влияние вращательной инерции становится более существенным. Полученные результаты могут быть использованы для интерпретации спектров колебаний активных коллоидных частиц и неоднородно поглощающих свет микросфер, левитирующих в газоразрядной плазме.

Ключевые слова: активная броуновская частица, спектральная плотность, спектр колебаний, гармоническая ловушка, инерция, вращательная диффузия, сильнодемпфированная динамика

DOI: 10.31857/S0044451027010099

1. ВВЕДЕНИЕ

Активная материя представляет собой широкий класс неравновесных систем, состоящих из частиц, способных преобразовывать энергию окружающей среды или внутренних источников в направленное механическое движение. К подобным системам относятся как биологические объекты — бактерии, клетки и молекулярные моторы, так и разнообразные искусственные микропловцы и активные коллоиды [1–3]. В последние годы интерес к активным системам существенно возрос благодаря перспективам их применения в задачах направленного транспорта микрогрузов, самоорганизации, микрофлюидики, создания адаптивных материалов и микроробототехники [2, 3].

В качестве механизмов самоходного движения активных частиц могут выступать каталитические химические реакции [4–6], термофорез [7–10], электрофорез [9, 11, 12], воздействие света [13–15] и градиенты поверхностного натяжения [16–18]. Особый интерес в последние годы вызывают активные час-

[*] E-mail: sametov@phystech.edu

тицы в плазменных системах, включая неоднородно поглощающие свет янус-частицы в комплексной плазме [19–22]. В подобных системах могут реализовываться режимы движения, в которых инерционные эффекты становятся существенными и оказывают заметное влияние на динамические характеристики частиц.

Одной из наиболее распространенных моделей активного движения является модель активной броуновской частицы, в которой самодвижение частицы описывается постоянной по модулю активной силой, направление которой изменяется вследствие вращательной диффузии [23]. В ряде задач оказывается удобным использовать альтернативное описание в рамках модели активной частицы Орнштейна – Уленбека, в которой активное воздействие рассматривается как цветной гауссов шум с конечным временем корреляции [24–26]. Несмотря на различие физических предпосылок, в определенных предельных случаях обе модели приводят к сходным спектральным и корреляционным характеристикам движения частиц.

Особый интерес представляют активные частицы, удерживаемые внешним потенциалом. Гармоническая ловушка является одной из наиболее часто используемых моделей локализации частиц и реализуется в широком круге экспериментальных систем, включая оптические ловушки, активные коллоидные суспензии и левитирующие микрочастицы в газоразрядной плазме [27–31]. Для таких систем важную роль играет анализ спектральных характеристик случайного движения, поскольку спектральная плотность колебаний непосредственно связана с параметрами среды, характеристиками ловушки и свойствами активного движения [32, 33].

В настоящее время значительное число работ посвящено исследованию статистических характеристик активных частиц в ловушках, включая пространственные распределения, среднеквадратичные смещения, корреляционные функции и энергетические характеристики [25, 31, 34, 35]. При этом спектральные характеристики динамики активных броуновских частиц, в частности спектры флуктуаций их координат и скорости, изучены существенно слабее, несмотря на то, что спектральный анализ является одним из наиболее удобных инструментов обработки экспериментальных данных для ограниченных систем. Лишь в последние годы появились работы, посвященные непосредственному исследованию спектральной плотности траекторий активных броуновских частиц и активных частиц Орнштейна – Уленбека [36, 37]. При этом вопросы влияния поступательной инерции и внешнего удерживающего потенциала на спектральные характеристики активных частиц остаются изученными недостаточно полно.

Спектральный подход ранее был успешно развит для различных систем пассивных броуновских частиц. Были получены аналитические выражения для спектров колебаний заряженных частиц в ловушках и кластерных структурах, исследовано влияние магнитного поля, анизотропии внешнего потенциала и межчастичных взаимодействий на спектральные характеристики движения [38–43]. В дальнейшем данный подход был распространен на системы с невзаимными взаимодействиями, характерными для комплексной плазмы, что позволило предложить методы восстановления параметров межчастичного взаимодействия по спектрам тепловых колебаний [44–47].

Особенно актуальным является рассмотрение сильнодемпфированного режима движения. Именно такой режим наиболее часто реализуется для активных коллоидных частиц в жидкости, где характерные времена релаксации ориентации существенно превышают времена затухания поступательного движения [2, 23, 48]. Аналогичные условия могут наблюдаться и для неоднородно поглощающих свет микросфер, левитирующих в газоразрядной плазме при повышенном давлении нейтрального газа, когда динамика частиц определяется совместным действием активного движения, тепловых флуктуаций и сильного вязкого демпфирования [27, 30]. В этом случае спектральный анализ становится удобным инструментом диагностики параметров активного движения и сопоставления результатов численного моделирования с экспериментальными наблюдениями.

В настоящей работе рассмотрены спектральные характеристики инерционных активных броуновских частиц в гармонической ловушке в сильнодемпфированном режиме вращательного движения. На основе аналитического подхода и численного моделирования исследован переход от пассивного режима движения к активному при увеличении интенсивности самодвижения частицы. Показано, что рост активности приводит к существенному изменению спектральных характеристик системы, включая усиление низкочастотного вклада и изменение формы спектрального пика. Получено аналитическое описание спектральной плотности колебаний и определены условия его применимости. Установлено, что в сильнодемпфированном пределе спектр активной силы совпадает со спектром в модели актив-

ной частицы Орнштейна – Уленбека, что позволяет использовать эту модель для описания спектральных характеристик активных броуновских частиц в рассматриваемом диапазоне параметров.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим двумерное движение круглой активной броуновской частицы массой m при наличии удерживающего силового поля ловушки с поступательной инерцией и без вращательной инерции. Активность частицы обусловлена наличием собственной скорости V_0, направление которой определяется ориентационным углом $\varphi(t)$. Движение такой частицы описывается следующей системой уравнений:

$$\ddot{x}(t) = -\nu_{tr}\dot{x}(t) - \omega_c^2 x(t) + \nu_{tr}V_0\cos\varphi(t) + \\ +\nu_{tr}\sqrt{2D_{tr}}\,\xi^{(X)}(t), \quad (1)$$

$$\ddot{y}(t) = -\nu_{tr}\dot{y}(t) - \omega_c^2 y(t) + \nu_{tr}V_0\sin\varphi(t) + \\ +\nu_{tr}\sqrt{2D_{tr}}\,\xi^{(Y)}(t), \quad (2)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \sqrt{2D_{rot}}\,\xi^{(\Phi)}(t), \quad (3)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — координаты частицы, ω_c — характерная частота гармонической ловушки, $\nu_{tr} = T/(mD_{tr})$ — коэффициент поступательного трения, T — температура теплового окружения в энергетических единицах, D_{tr} и D_{rot} — коэффициенты поступательной и вращательной диффузии свободной частицы с нулевой активностью, $\xi^{(X)}$, $\xi^{(Y)}$ и $\xi^{(\Phi)}$ — независимые гауссовы белые шумы с нулевым средним и единичной интенсивностью. Активный вклад в движение вдоль осей X и Y определяется проекциями собственной скорости частицы на соответствующие оси: $V_0\cos\varphi(t)$ и $V_0\sin\varphi(t)$. Таким образом, случайное изменение ориентации приводит к непрерывному изменению направления активного движения.

Рассмотрим спектральную плотность поступательных колебаний. Уравнения (1), (2) представляют собой линейный гармонический осциллятор с затуханием, где за вынужденные колебания отвечают два случайных процесса: сила Ланжевена и процесс $\cos\varphi(t)$. Для подобного уравнения спектральная плотность имеет следующий вид [49]:

$$G^{(X)}(\omega) = \frac{S^{(X)}(\omega)}{\omega^4 + (\nu_{tr}^2 - 2\omega_c^2)\,\omega^2 + \omega_c^4}, \quad (4)$$

где $S^{(X)} = 2\nu_{tr}T/m + (\nu_{tr}V_0)^2 S^{(\cos\varphi)}$ — спектральная плотность суммарного случайного воздействия, действующего на частицу.

Для получения спектральной плотности процесса $\cos\varphi(t)$ воспользуемся выражением для автокорреляционной функции $\cos\varphi(t)$ [2]:

$$\langle\cos\varphi(t)\cos\varphi(0)\rangle = \frac{1}{2}\,e^{-D_{rot}t}. \quad (5)$$

Для стационарного процесса спектральная плотность определяется как преобразование Фурье автокорреляционной функции, поэтому для $S^{(\cos\varphi)}$ может быть получено выражение

$$S^{(\cos\varphi)}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\langle\cos\varphi(t)\cos\varphi(0)\rangle\,dt = \\ = \int\limits_{0}^{\infty}\cos(\omega t)\,e^{-D_{rot}t}\,dt = \frac{D_{rot}}{D_{rot}^2 + \omega^2}. \quad (6)$$

Полученное выражение имеет лоренцеву форму с максимумом при нулевой частоте и полушириной D_{rot}.

Таким образом, конечное выражение для спектральной плотности колебаний имеет следующий вид:

$$G^{(X)}(\omega) = \frac{\dfrac{2\nu_{tr}T}{m} + (\nu_{tr}V_0)^2\,\dfrac{D_{rot}}{D_{rot}^2 + \omega^2}}{\omega^4 + (\nu_{tr}^2 - 2\omega_c^2)\,\omega^2 + \omega_c^4}. \quad (7)$$

Отметим, что выражение (7) также соответствует спектральной плотности колебаний активной частицы Орнштейна – Уленбека, поскольку в отсутствие вращательной инерции активная сила обладает экспоненциально затухающей временной корреляцией (см. выражение (5)), совпадающей с корреляционной функцией активного шума модели активной частицы Орнштейна – Уленбека [34]. Автокорреляционная функция компоненты активной силы F_{act} имеет вид

$$\langle F_{act}(t)F_{act}(0)\rangle = \frac{A}{2}\,e^{-D_{rot}t}, \quad (8)$$

где $A = (m\nu_{tr}V_0)^2$ для активной броуновской частицы. В случае активной частицы Орнштейна – Уленбека данный параметр определяется как $A = 2(m\nu_{tr})^2 D_{act}D_{rot}$, где $\tau = D_{rot}^{-1}$ — время корреляции активной силы, D_{act} — интенсивность шума для активной скорости активной частицы Орнштейна – Уленбека.

В завершение данного раздела отметим, что спектральные плотности $G_V^{(X)}$ скоростей $V^{(X)}(t) = \dot{x}(t)$ частиц связаны со спектрами соответствующих смещений простым соотношением

$$G_V^{(X)}(\omega) = \omega^2 G^{(X)}(\omega). \quad (9)$$

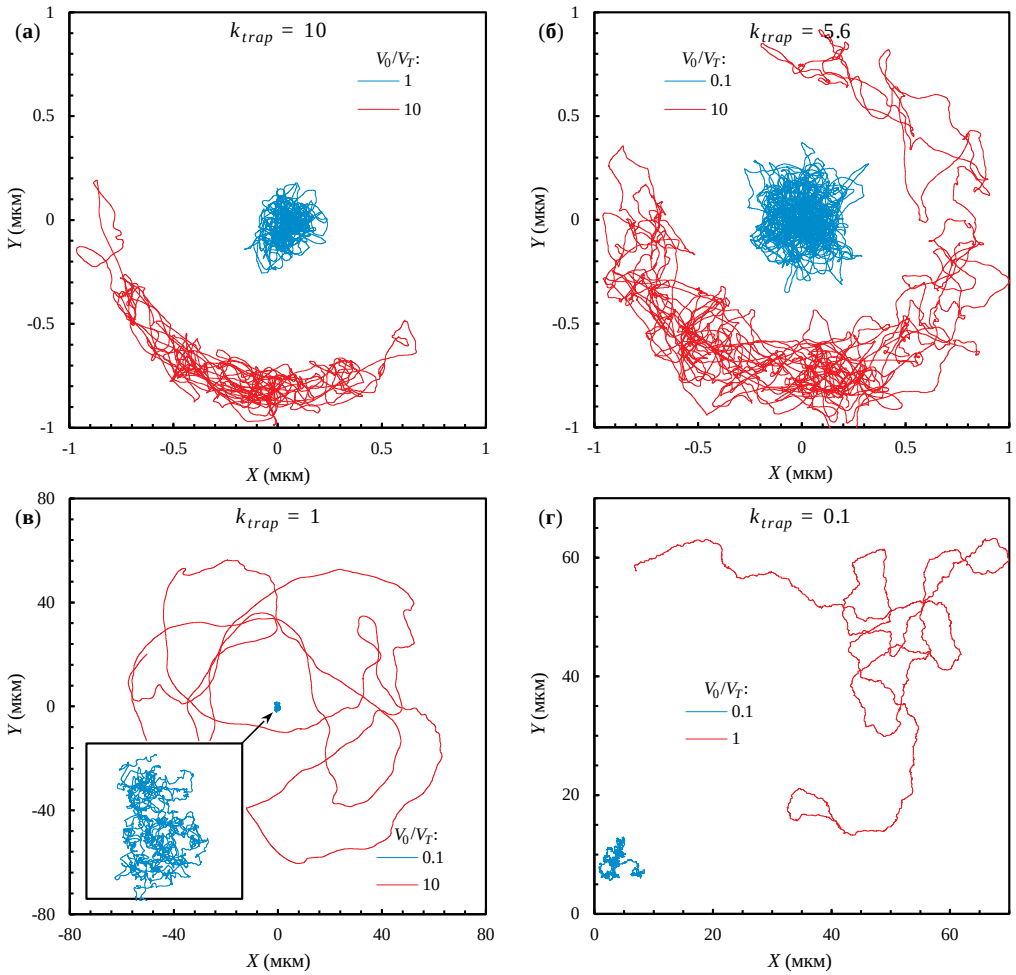

Рис. 1. Траектории активных броуновских частиц при $\nu_{tr}/D_{rot} = 100$ и $k_{trap} = 10$ (*а*), $k_{trap} = 5.6$ (*б*), $k_{trap} = 1$ (*в*), $k_{trap} = 0.1$ (*г*), а также при различных значениях V_0/V_T. Длительность траекторий: (*а*) — 0.01 с, (*б*) — 0.025 с, (*в*) — 0.05 с, (*г*) — 0.1 с

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Моделирование было выполнено для двумерного движения круглой частицы массой m в гармонической ловушке в рамках модели активной ланжевеновской частицы [50], которая учитывает как поступательную, так и вращательную инерцию частицы. Поступательная динамика частицы задавалась уравнениями (1), (2), а ее вращательная динамика — следующим уравнением:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\nu_{rot}\dot{\varphi}(t) + \nu_{rot}\sqrt{2D_{rot}}\,\xi^{(\Phi)}(t), \qquad (10)$$

где $\nu_{rot} = T_{rot}/(JD_{rot})$ — коэффициент вращательного трения, $J = 0.5ma^2$ — момент инерции частицы, a — радиус частицы, а $T_{rot} = T$, если источником вращательного шума являются тепловые флуктуации. Численное моделирование стохастических процессов выполнялось методом молекулярной динамики. Решение системы дифференциальных уравнений (1), (2) и (10) проводилось методом Leapfrog [51] 2-го порядка. Техника моделирования подробно описана в работах [27, 30, 52, 53].

Параметры частицы в моделировании: $a = 0.5$ мкм, $m = 7.9 \cdot 10^{-13}$ г. Моделирование выполнялось для $T = 0.0247$ эВ (≈ 286 K), соотношения V_0/V_T от 0 до 1000 (V_T — тепловая скорость частицы), что соответствует наблюдаемым величинам в экспериментах [54], отношений частоты ловушки к корню произведения коэффициента поступательного трения и коэффициента вращательной диффузии: $k_{trap} = \omega_c/\sqrt{\nu_{tr}D_{rot}} = 0.1$, 1, 5.6, 10 для четырех различных частот ловушки $\omega_c \approx 387.3$, 3873, 21772, 38730 с$^{-1}$, и при отношении коэффициента поступательного трения к коэффициенту вращательной диффузии $\nu_{tr}/D_{rot} = 100$, соответствующем сильнодемпфированному режи-

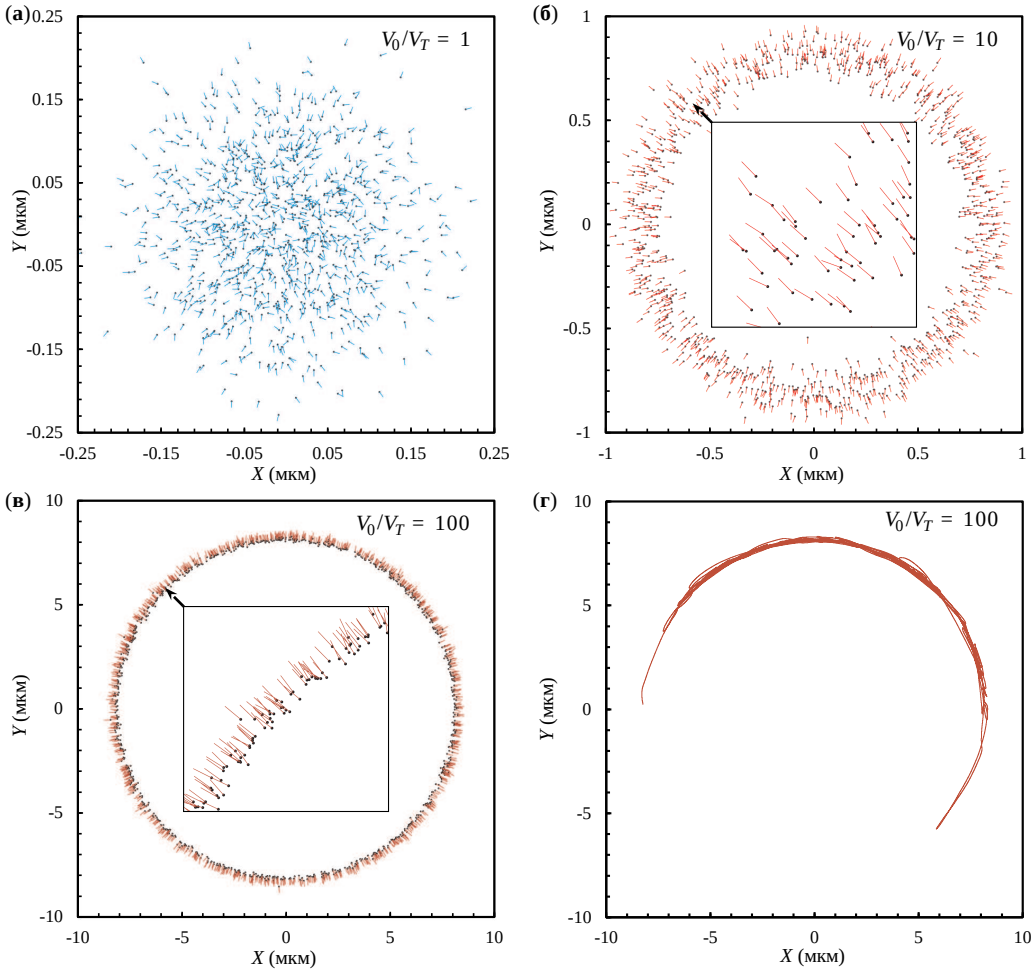

Рис. 2. Координаты с ориентационными векторами $\mathbf{n}\,(\cos\varphi, \sin\varphi)$ (*а–в*) активных броуновских частиц при $\nu_{tr}/D_{rot} = 100$, $k_{trap} = 10$ и $V_0/V_T = 1$ (*а*), $V_0/V_T = 10$ (*б*), $V_0/V_T = 100$ (*в*), а также траектория частицы (*г*) при $\nu_{tr}/D_{rot} = 100$, $k_{trap} = 10$ и $V_0/V_T = 100$ (длительность траектории 0.01 с)

Таблица. Соотношения основных частот

ν_{tr}/D_{rot}	100			
k_{trap}	10	5.6	1	0.1
ω_c/ν_{tr}	1	0.56	0.1	0.01
ω_c/D_{rot}	100	56	10	1

му колебаний. Более подробная информация о соотношениях между характерными частотами представлена в таблице. Для каждого набора параметров статистика формировалась на основе 128-и независимых численных расчетов. При моделировании шаг интегрирования составлял $\Delta t = (100 \max[\omega_c, \nu_{tr}, \nu_{rot}, D_{rot}])^{-1}$, т. е. примерно от $9.7 \cdot 10^{-8}$ до $9.7 \cdot 10^{-7}$ с в зависимости от условий задачи, время расчетов после установления равновесия в моделируемых системах от 9.7 до 97 с.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Перейдем к результатам численных расчетов. На рис. 1 показаны примеры полученных траекторий частиц в сильнодемпфированном режиме движения ($\nu_{tr}/D_{rot} = 100$) для сильной ($k_{trap} = 10$), средней ($k_{trap} = 5.6$), слабой ($k_{trap} = 1$) и очень слабой ($k_{trap} = 0.1$) ловушек при разных значениях отношения V_0/V_T. Как можно увидеть, во всех случаях (рис. 1 *а–в*), кроме очень слабой ловушки, при небольших значениях собственной скорости (траектории, отмеченные голубым цветом) частица движется подобно пассивной броуновской частице — совершает хаотичные движения вокруг центра ловушки. Однако при увеличении собственной скорости (траектории, отмеченные красным цветом) частица локализуется на некотором расстоянии от центра, где совершает случайные движения. В случае

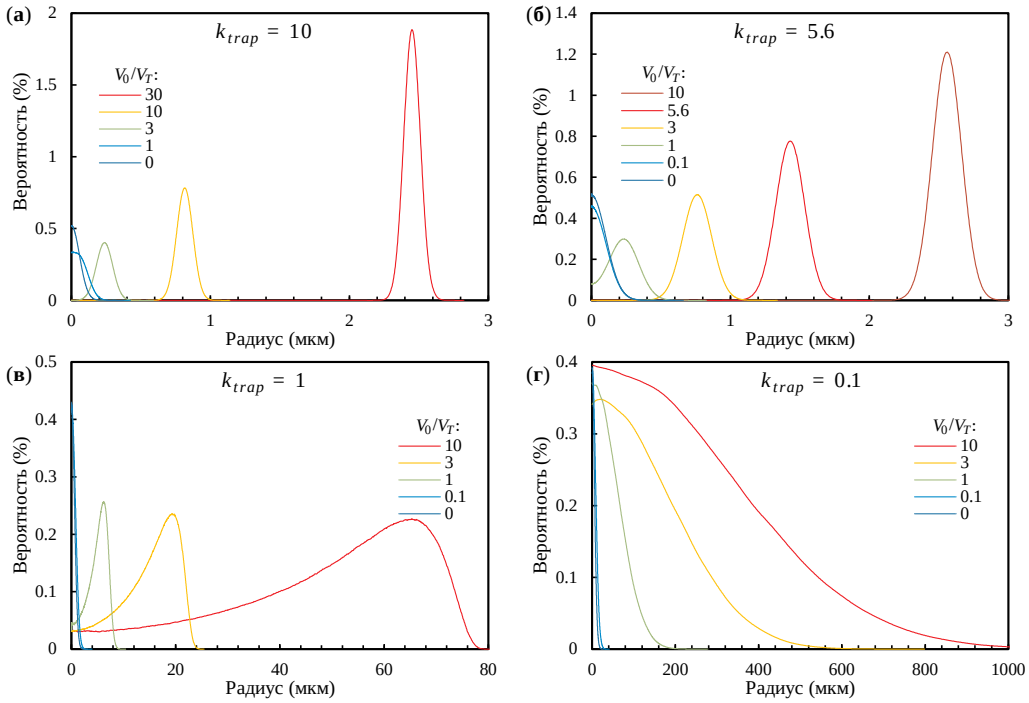

Рис. 3. Радиальные распределения активных броуновских частиц при $\nu_{tr}/D_{rot} = 100$ и $k_{trap} = 10$ (*а*), 5.6 (*б*), 1 (*в*), 0.1 (*г*) для различных V_0/V_T

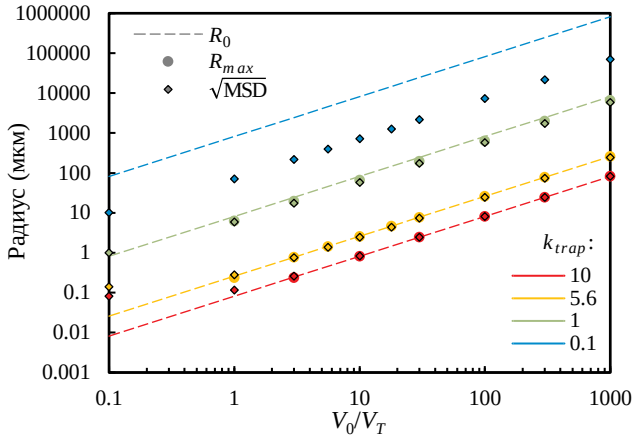

Рис. 4. Аналитические расстояния локализации R_0 (11), наиболее вероятные радиус-векторы R_{max} и корни из среднеквадратичного смещения (MSD), полученные в численном моделировании, в зависимости от V_0/V_T при $k_{trap} = 10,\ 5.6,\ 1,\ 0.1$

очень слабой ловушки (см. рис. 1 *г*) движение частицы имеет характер случайного блуждания независимо от значения V_0/V_T.

Рассмотрим более детально движение частиц на примере сильной ловушки. Как можно увидеть на рис. 1 *а* ($V_0/V_T = 10$) и 2 *г*, частица совершает вращение вокруг центра ловушки с хаотичным изменением направления вращения. При этом расстояние от центра ловушки до частицы растет с ростом собственной скорости, что видно на рис. 3, где представлены радиальные распределения частиц при различных k_{trap} и V_0/V_T. Для объяснения этого эффекта рассмотрим положения частиц на рис. 2 *а–в*: точки соответствуют координатам частиц, полученным в разных расчетах, а цветные линии показывают направления их ориентации. Как можно увидеть на рис. 2 *б*, *в*, в случае, когда частицы локализуются на некотором расстоянии от центра, частицы ориентированы от центра ловушки, и их движение определяет равенство активной силы и силы со стороны ловушки ($F_{act} - F_{trap} = m\nu_{tr}V_0 - m\omega_c^2 R_0 = 0$), т. е. расстояние локализации R_0 можно определить следующим образом:

$$R_0 = \frac{\nu_{tr} V_0}{\omega_c^2}. \tag{11}$$

Из выражения (11) с учетом значения среднеквадратичного смещения пассивной частицы в ловушке ($R_0^2 \approx 2T/(m\omega_c^2)$) может быть получена оценка отношения V_0/V_T, соответствующего переходу от хаотичного движения к вращению со случайным изменением направления вращения:

$$\frac{V_0}{V_T} \approx \frac{\omega_c}{\nu_{tr}}. \tag{12}$$

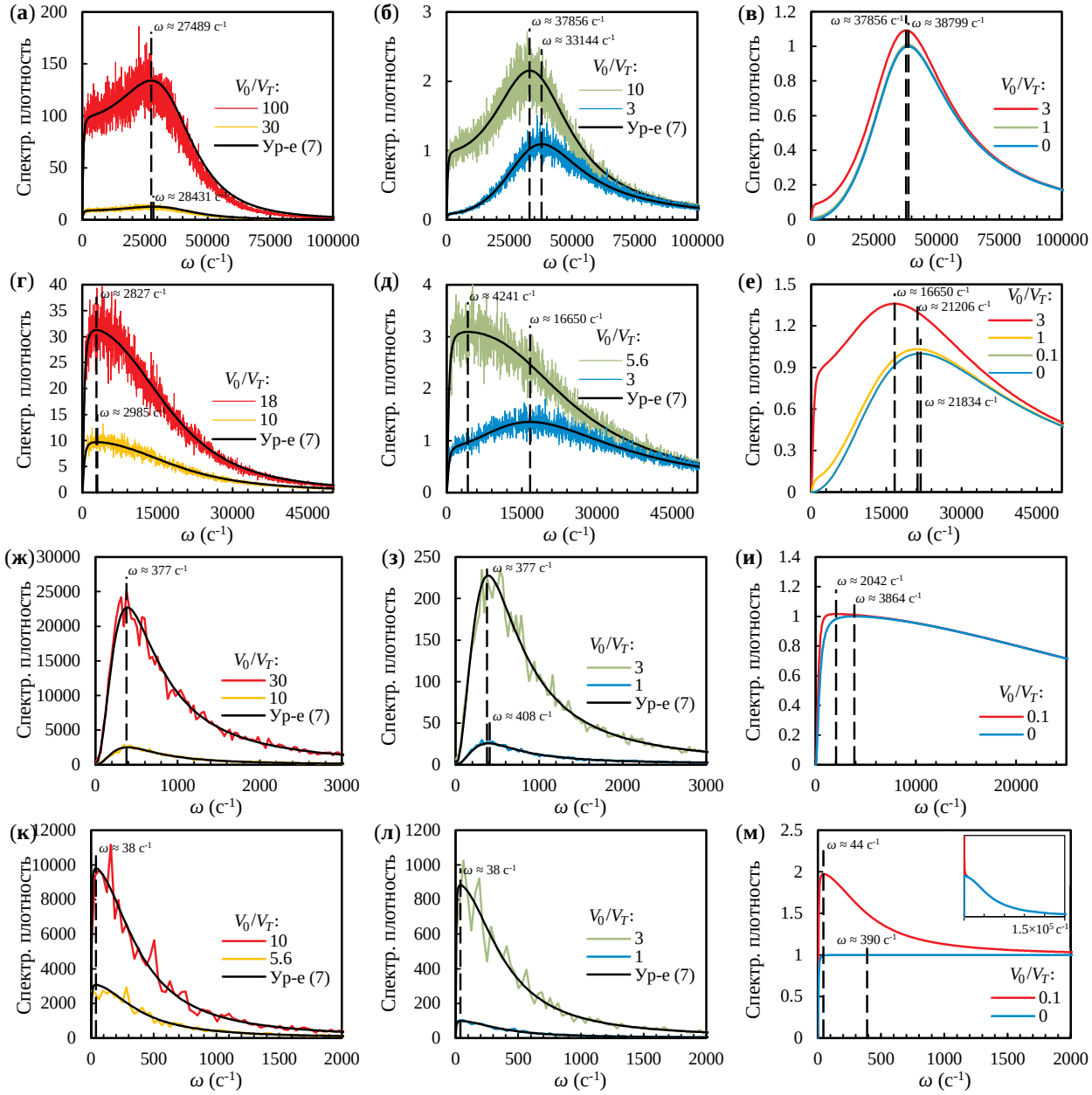

Рис. 5. Нормированные спектральные плотности скоростей $G_V^{*(X)}$ активных броуновских частиц, полученные в численном моделировании, и их аналитические оценки, посчитанные по формулам (7) и (9) при $\nu_{tr}/D_{rot} = 100$, $k_{trap} = 10$ (*а*–*в*), 5.6 (*г*–*е*), 1 (*ж*–*и*), 0.1 (*к*–*м*) для различных значений V_0/V_T. На рисунках *в*, *е*, *и*, *м* цветные линии — аналитические оценки, на остальных рисунках черные линии — аналитические оценки, цветные кривые — результаты численного моделирования

Проверка полученного выражения для расстояния локализации R_0 (11) представлена на рис. 4, где также приведены наиболее вероятные радиус-векторы R_{max} и корни среднеквадратичного смещения (mean square displacement, MSD), полученные в численном моделировании. Значения R_{max} были получены как максимумы радиального распределения частиц, см. рис. 3. Отметим, что в случае очень слабой ловушки ($k_{trap} = 0.1$) максимум радиального распределения находится в нуле, см. рис. 3 *г*. Для случая сильной ловушки ($k_{trap} = 10$) при $V_0/V_T > 1$ (см. выражение (12) и таблицу), когда частица локализуется на некотором расстоянии, оценка расстояния практически идеально совпадает с наблюдаемыми величинами R_{max} и $\sqrt{\text{MSD}}$. Для средней ловушки ($k_{trap} = 5.6$, переход при $V_0/V_T = 0.56$) расхож-

дение между R_0 и R_{max} около 1%, при этом значение $\sqrt{\text{MSD}}$ оказывается меньше на 5% относительно R_0. В случае слабой ловушки ($k_{trap} = 1$, переход при $V_0/V_T = 0.1$) наблюдается большее расхождение: оценка R_0 оказывается завышенной на 25% относительно наблюдаемой в моделировании величины R_{max}, при этом $\sqrt{\text{MSD}}$ на 10% меньше R_{max}. В случае очень слабой ловушки ($k_{trap} = 0.1$, переход при $V_0/V_T = 0.01$), как ранее отмечалось, частица не локализуется на некотором расстоянии от центра и R_0 отличается на порядок от $\sqrt{\text{MSD}}$. Таким образом, предложенная оценка (11) оказывается применимой только при достаточно выраженном влиянии ловушки на динамику частицы.

Теперь рассмотрим спектральные плотности поступательных колебаний активных частиц. На рис. 5 представлены нормированные спектральные плотности $G_V^{*(X)}$ скоростей активных броуновских частиц ($G_V^{*(X)} = n_V^{(X)} G_V^{(X)}$, где $n_V^{(X)} = m\nu_{tr}/2T$) и их аналитические оценки для сильной ($k_{trap} = 10$, рис. 5 *а*–*в*), средней ($k_{trap} = 5.6$ — рис. 5 *г*–*е*), слабой ($k_{trap} = 1$, рис. 5 *ж*–*и*) и очень слабой ($k_{trap} = 0.1$, рис. 5 *к*–*м*) ловушек. Как видно на рис. 5, наблюдается согласие между результатами, полученными в численном моделировании и аналитических расчетах, кроме случая сильной ловушки, где на правом крыле пика наблюдается небольшое расхождение, см. рис. 5 *а*. Расхождение связано с тем, что характерная частота колебаний сильно смещена в сторону высоких частот и проявляется наличие вращательной инерции в моделировании. Обратим внимание, что для сильной (см. рис. 5 *а б*) и средней (см. рис. 5 *г*, *д*) ловушек с ростом собственной скорости V_0 характерный пик колебаний смещается в сторону низких частот, и при достижении отношением V_0/V_T значений 100 и 18 соответственно дальнейший рост V_0 приводит только к росту амплитуды колебаний без изменения формы спектра с постоянными характерными частотами $\omega \approx 27489$ с$^{-1}$ и $\omega \approx 2827$ с$^{-1}$ соответственно. В случаях слабой (см. рис. 5 *ж*, *з*) и очень слабой (см. рис. 5 *к*, *л*) ловушек выход на постоянные форму спектров и характерные частоты ($\omega \approx 377$ с$^{-1}$ и $\omega \approx 38$ с$^{-1}$ соответственно) происходит заметно раньше — при V_0/V_T, равных 3 и 1 соответственно.

Также отметим, что при малых собственных скоростях форма спектра сохраняет вид спектра пассивной броуновской частицы ($V_0 = 0$), а переход происходит при ранее найденном значении (12) (см. рис. 5 *в*, *е*, *и*, *м*). Так, для сильной ловушки (см. рис. 5 *в*) переход происходит при $V_0/V_T \approx 1$, и спектры при $V_0/V_T = 0$ и 1 слабо различаются и имеют одинаковую характерную частоту $\omega \approx 38799$ с$^{-1}$. При этом спектр при $V_0/V_T = 3$ заметно меняет форму: усиливаются низкочастотные колебания, и смещается характерная частота — $\omega \approx 37856$ с$^{-1}$. Для средней ловушки (см. рис. 5 *е*) наблюдается подобная же ситуация: переход при $V_0/V_T \approx 0.56$, спектры при $V_0/V_T = 0$ и 0.1 слабо различаются с общей характерной частотой $\omega \approx 21834$ с$^{-1}$, спектр при $V_0/V_T = 1$ приобретает низкочастотные колебания, и наблюдается смещение частоты — $\omega \approx 21206$ с$^{-1}$. В случае слабой ловушки (см. рис. 5 *и*) переход происходит при $V_0/V_T \approx 0.1$, и для спектра при $V_0/V_T = 0.1$ уже наблюдается рост низкочастотных колебаний и смещение характерной частоты ($\omega \approx 2042$ с$^{-1}$) относительно спектра пассивной частицы ($V_0/V_T = 0$, $\omega \approx 3864$ с$^{-1}$). В случае очень слабой ловушки (см. рис. 5 *м*) переход происходит при $V_0/V_T \approx 0.01$ и наблюдается ситуация, аналогичная другим случаям: изменение формы спектра с ростом низкочастотных колебаний, при этом характерная частота пассивной частицы $\omega \approx 390$ с$^{-1}$, а при $V_0/V_T \approx 0.1$ характерная частота уже $\omega \approx 44$ с$^{-1}$. Таким образом, при переходе движения активной частицы от пассивного к активному спектры колебаний значительно меняют форму при усилении низкочастотных колебаний.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено численное исследование динамики инерционной активной броуновской частицы в гармонической ловушке в сильнодемпфированном режиме движения. Выполнен анализ спектральных характеристик системы в широком диапазоне параметров активности и жесткости удерживающего потенциала.

Показано, что аналитическое описание, полученное в рамках модели активной броуновской частицы с поступательной инерцией и без учета вращательной инерции, корректно воспроизводит спектральные характеристики системы, полученные методом численного моделирования для активных частиц, обладающих как поступательной, так и вращательной инерцией. Получено хорошее согласие между аналитическими и численными результатами для различных значений активности и параметров ловушки.

Обнаружено, что для случая сильной ловушки наблюдаются небольшие расхождения между аналитическим описанием и результатами численного моделирования, что связано с влиянием враща-

тельной инерции, не учитываемой в используемой аналитической модели. В остальной исследованной области параметров влияние вращательной инерции на спектральные характеристики оказывается незначительным.

Установлено, что увеличение активности приводит к переходу от пассивного к активному режиму движения, что проявляется в существенном изменении формы спектральной плотности колебаний и усилении низкочастотного вклада в спектр. Показано, что в сильнодемпфированном режиме спектр активной силы приобретает лоренцеву форму, соответствующую модели активной частицы Орнштейна – Уленбека.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа спектров колебаний активных частиц в ограниченных системах, а также для интерпретации экспериментальных данных по активным коллоидным системам и неоднородно поглощающим свет микросферам, левитирующим в газоразрядной плазме.

Финансирование. Представленные результаты исследования выполнены при поддержке Российского научного фонда (грант №25-72-00114).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. C. Marchetti, J. F. Joanny, S. Ramaswamy, T. B. Liverpool, J. Prost, M. Rao, and R. A. Simha, Rev. Mod. Phys. **85**, 1143 (2013).

2. C. Bechinger, R. Di Leonardo, H. Löwen, C. Reichhardt, G. Volpe, and G. Volpe, Rev. Mod. Phys. **88**, 045006 (2016).

3. J. Elgeti, R. G. Winkler, and G. Gompper, Rep. Prog. Phys. **78**, 056601 (2015).

4. W. F. Paxton, S. Sundararajan, T. E. Mallouk, and A. Sen, Angew. Chem. Int. Ed. **45**, 5420 (2006).

5. J. R. Howse, R. A. L. Jones, A. J. Ryan, T. Gough, R. Vafabakhsh, and R. Golestanian, Phys. Rev. Lett. **99**, 048102 (2007).

6. S. J. Ebbens and J. R. Howse, Soft Matter **6**, 726 (2010).

7. H.-R. Jiang, N. Yoshinaga, and M. Sano, Phys. Rev. Lett. **105**, 268302 (2010).

8. M. Xuan, Z. Wu, J. Shao, L. Dai, T. Si, and Q. He, J. Am. Chem. Soc. **138**, 6492 (2016).

9. H. Šípová-Jungová, D. Andrén, S. Jones, and M. Käll, Chem. Rev. **120**, 269 (2020).

10. J. Frueh, S. Rutkowski, T. Si, M. Gai, C. Gao, S. I. Tverdokhlebov, G. Qiu, J. Schmitt, Q. He, Y.-X. Ren, and J. Wang, Adv. Photonics Res. **3**, 2100189 (2022).

11. T. M. Squires and M. Z. Bazant, J. Fluid Mech. **560**, 65 (2006).

12. S. Gangwal, O. J. Cayre, M. Z. Bazant, and O. D. Velev, Phys. Rev. Lett. **100**, 058302 (2008).

13. I. Buttinoni, J. Bialké, F. Kümmel, H. Löwen, C. Bechinger, and T. Speck, Phys. Rev. Lett. **110**, 238301 (2013).

14. J. Palacci, S. Sacanna, A. P. Steinberg, D. J. Pine, and P. M. Chaikin, Science **339**, 936 (2013).

15. A. Aubret, M. Youssef, S. Sacanna, and J. Palacci, Nat. Phys. **14**, 1114 (2018).

16. K. Nagai, Y. Sumino, H. Kitahata, and K. Yoshikawa, Phys. Rev. E **71**, 065301 (2005).

17. H. Kitahata, N. Yoshinaga, K. H. Nagai, and Y. Sumino, Phys. Rev. E **84**, 015101 (2011).

18. N. Yoshinaga, K. H. Nagai, Y. Sumino, and H. Kitahata, Phys. Rev. E **86**, 016108 (2012).

19. V. Nosenko, F. Luoni, A. Kaouk, M. Rubin-Zuzic, and H. Thomas, Phys. Rev. Res. **2**, 033226 (2020).

20. K. Arkar, M. M. Vasiliev, O. F. Petrov, E. A. Kononov, and F. M. Trukhachev, Molecules **26**, 561 (2021).

21. X. Koss, E. Kononov, I. Lisina, M. Vasiliev, and O. Petrov, Molecules **27**, 1614 (2022).

22. C.-R. Du, V. Nosenko, H. M. Thomas, A. Müller, A. M. Lipaev, V. I. Molotkov, V. E. Fortov, and A. V. Ivlev, New J. Phys. **19**, 073015 (2017).

23. P. Romanczuk, M. Bär, W. Ebeling, B. Lindner, and L. Schimansky-Geier, Eur. Phys. J. Spec. Top. **202**, 1 (2012).

24. U. Marini Bettolo Marconi and C. Maggi, Soft Matter **11**, 8768 (2015).

25. É. Fodor and M. C. Marchetti, Physica A **504**, 106 (2018).

26. D. Martin, J. O'Byrne, M. E. Cates, É. Fodor, C. Nardini, J. Tailleur, and F. van Wijland, Phys. Rev. E **103**, 032607 (2021).

27. A. Ivlev, H. Löwen, G. Morfill, and C. P. Royall, *Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids*, World Scientific, Singapore (2012), Vol. 5.

28. G. Volpe and G. Volpe, Am. J. Phys. **81**, 224 (2013).

29. S. C. Takatori and J. F. Brady, Phys. Rev. E **91**, 032117 (2015).

30. V. E. Fortov and G. E. Morfill, *Complex and Dusty Plasmas: From Laboratory to Space*, CRC Press, Boca Raton (2010) [В. Е. Фортов, Г. Е. Морфилл, *Комплексная и пылевая плазма. Из лаборатории в космос*, Физматлит, Москва (2012)].

31. U. Nakul and M. Gopalakrishnan, Phys. Rev. E **108**, 024121 (2023).

32. O. S. Vaulina, E. A. Lisin, E. A. Sametov, and R. A. Timirkhanov, Plasma Fusion Res. **13**, 1406125 (2018).

33. E. A. Sametov, E. A. Lisin, and O. S. Vaulina, Plasma Phys. Rep. **49**, 89 (2023) [Э. А. Саметов, Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, Физ. плазмы **49**, 67 (2023)].

34. C. Maggi, M. Paoluzzi, N. Pellicciotta, A. Lepore, L. Angelani, and R. Di Leonardo, Phys. Rev. Lett. **113**, 238303 (2014).

35. E. Woillez, Y. Kafri, and V. Lecomte, J. Stat. Mech. **2020**, 063204 (2020).

36. A. Squarcini, A. Solon, and G. Oshanin, New J. Phys. **24**, 013018 (2022).

37. Y. Kim, G. Oshanin, and J.-H. Jeon, arXiv:2605.09399.

38. O. S. Vaulina and E. A. Sametov, J. Exp. Theor. Phys. **127**, 350 (2018) [О. С. Ваулина, Э. А. Саметов, ЖЭТФ **154**, 407 (2018)].

39. O. S. Vaulina and E. A. Sametov, Plasma Phys. Rep. **45**, 237 (2019) [О. С. Ваулина, Э. А. Саметов, Физ. плазмы **45**, 258 (2019)].

40. O. S. Vaulina and E. A. Sametov, J. Exp. Theor. Phys. **128**, 808 (2019) [О. С. Ваулина, Э. А. Саметов, ЖЭТФ **155**, 947 (2019)].

41. E. A. Sametov, E. A. Lisin, and O. S. Vaulina, J. Exp. Theor. Phys. **130**, 463 (2020) [Э. А. Саметов, Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, ЖЭТФ **157**, 552 (2020)].

42. O. S. Vaulina, E. A. Sametov, and E. A. Lisin, J. Exp. Theor. Phys. **131**, 361 (2020) [О. С. Ваулина, Э. А. Саметов, Е. А. Лисин, ЖЭТФ **158**, 399 (2020)].

43. O. S. Vaulina, E. A. Sametov, E. A. Lisin, and I. I. Lisina, Plasma Phys. Rep. **46**, 1210 (2020) [О. С. Ваулина, Э. А. Саметов, Е. А. Лисин, И. И. Лисина, Физ. плазмы **46**, 1125 (2020)].

44. E. A. Lisin, O. F. Petrov, E. A. Sametov, O. S. Vaulina, K. B. Statsenko, M. M. Vasiliev, J. Carmona-Reyes, and T. W. Hyde, Sci. Rep. **10**, 13653 (2020).

45. E. A. Lisin, E. A. Kononov, E. A. Sametov, M. M. Vasiliev, and O. F. Petrov, Molecules **26**, 7535 (2021).

46. E. A. Sametov, E. A. Lisin, and O. S. Vaulina, Phys. Rev. E **108**, 055207 (2023).

47. E. A. Sametov, D. A. Kolotinskii, E. A. Lisin, and A. V. Timofeev, Phys. Plasmas **31**, 123705 (2024).

48. G. Gompper, R. G. Winkler, T. Speck, A. Solon, C. Nardini, F. Peruani, H. Löwen, R. Golestanian, U. B. Kaupp, L. Alvarez, T. Kiørboe, E. Lauga, W. C. K. Poon, A. DeSimone, S. Muiños-Landin, A. Fischer, N. A. Söker, F. Cichos, R. Kapral, P. Gaspard, M. Ripoll, F. Sagues, A. Doostmohammadi, J. M. Yeomans, I. S. Aranson, C. Bechinger, H. Stark, C. K. Hemelrijk, F. J. Nedelec, T. Sarkar, T. Aryaksama, M. Lacroix, G. Duclos, V. Yashunsky, P. Silberzan, M. Arroyo, and S. Kale, J. Phys.: Condens. Matter **32**, 193001 (2020).

49. Yu. L. Klimontovich, *Statistical Physics*, Harwood Academic, New York (1986) [Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*, URSS, Москва (2021)].

50. E. A. Lisin, O. S. Vaulina, I. I. Lisina, and O. F. Petrov, Phys. Chem. Chem. Phys. **24**, 14150 (2022).

51. R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles*, CRC Press, Boca Raton (2021).

52. O. S. Vaulina, O. F. Petrov, V. E. Fortov, A. G. Khrapak, and S. A. Khrapak, *Dusty Plasma: Experiment and Theory*, Fizmatlit, Moscow (2009) [in Russian] [О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, *Пылевая плазма: эксперимент и теория*, Физматлит, Москва (2009)].

53. *Introduction to Complex Plasmas*, ed. by M. Bonitz, N. J. M. Horing, and P. Ludwig, Springer, Heidelberg (2010).

54. K. G. Koss, I. I. Lisina, M. M. Vasiliev, A. A. Alekseevskaya, E. A. Kononov, and O. F. Petrov, Plasma Phys. Rep. **49**, 57 (2023) [К. Г. Косс, И. И. Лисина, М. М. Васильев, А. А. Алексеевская, Е. А. Кононов, О. Ф. Петров, Физ. плазмы **49**, 33 (2023)].

Spectral Density of Oscillations of Inertial Active Brownian Particles in a Harmonic Trap in the Overdamped Rotational Regime

E. A. Sametov**, *E. A. Lisin

Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences
125412, Moscow, Russia

*E-mail: sametov@phystech.edu

Received August 21, 2026
Revised October 10, 2026
Accepted October 12, 2026

Abstract

We investigate the spectral characteristics of inertial active Brownian particles confined in a harmonic trap in the overdamped rotational regime. The model of an active Brownian particle with translational and rotational inertia is considered, and numerical simulations of the system dynamics are performed over a wide range of activity parameters and trapping potential stiffnesses. An analytical description of the oscillation spectral density is obtained using the model of an active Brownian particle with translational inertia, while neglecting rotational inertia. It is shown that, in the overdamped regime, this description accurately reproduces the oscillation spectra obtained from numerical simulations, including the case of particles with finite rotational inertia. Increasing activity is found to induce a transition from passive Brownian motion to an active regime, accompanied by an enhanced low-frequency contribution and a substantial change in the shape of the spectral density. It is shown that, in the limit considered, the active-force spectrum acquires a Lorentzian shape characteristic of the active Ornstein – Uhlenbeck particle model, thereby establishing a connection between the descriptions of particle motion provided by this model and the active Brownian particle model. Significant deviations between the analytical description and the simulation results occur only for a strong trap, where the effects of rotational inertia become more pronounced. The results can be used to interpret the oscillation spectra of active colloidal particles and non-uniformly light-absorbing microspheres levitating in gas-discharge plasma.

Keywords: active Brownian particle, spectral density, oscillation spectrum, harmonic trap, inertia, rotational diffusion, overdamped dynamics

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 25-72-00114).

Conflict of interest. The authors declare that they have no conflict of interest.

Authors' contributions. The contributions of the authors are equal.