ЖЭТФ/JETP, 2027, том 171, вып. 1, стр. 25–32 © 2027

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ПОЛУЧЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ РЕШЕНИЯ В РАСШИРЕННЫХ ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ

***О. И. Зенин*** [a]*, ***С. О. Алексеев*** [a,b]**

[a] *Кафедра квантовой теории и физики высоких энергий, физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119991, Москва, Россия*

[b] *Отдел релятивистской астрофизики, Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119234, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 августа 2026 г.,
после переработки 26 октября 2026 г.
Принята к публикации 26 октября 2026 г.

Настоящая работа представляет собой дополнение и уточнение результатов статьи С. О. Алексеева, О. И. Зенина и А. О. Байдерина «Моделирование теней черных дыр в расширенных теориях гравитации: учет вращения и связанные эффекты» (ЖЭТФ **167**, 477 (2025)). Проведена дополнительная проверка корректности применения модифицированного алгоритма Ньюмена – Яниса путем анализа невязок полных уравнений поля, поведения скаляра Кретчмана и устойчивости сферических фотонных орбит. Показано, что для большинства рассмотренных моделей дополнительная невязка, связанная с введением вращения, уменьшается при переходе к статическому пределу, что оправдывает применение полученных метрик в качестве эффективных приближений. Для скалярной гравитации Гаусса – Бонне выявлены существенные несогласованности с уравнениями поля и дополнительные особенности кривизны вне горизонта событий, что ограничивает применимость соответствующей метрики при моделировании теней черных дыр.

**Ключевые слова:** вращающиеся черные дыры, алгоритм Ньюмена – Яниса, расширенные теории гравитации, уравнения поля, скалярная гравитация

**DOI:** 10.31857/S0044451027010033

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В опубликованной ранее работе [1] нами была рассмотрена возможность использования изображений теней черных дыр в качестве независимого инструмента проверки и ограничения современных расширенных теорий гравитации. С помощью модифицированного алгоритма Ньюмена – Яниса были построены метрики вращающихся черных дыр для моделей Хорндески и бамблби, скалярной гравитации Гаусса – Бонне, петлевой квантовой гравитации (LQG), конформной и $f(Q)$-гравитации и рассчитаны соответствующие профили теней. Было показано, что наличие дополнительных параметров теории может как усиливать, так и ослаблять проявления вращения по сравнению с керровским случаем. Кроме того, для части рассматриваемых моделей возникают критические значения параметра вращения $a_{\text{crit}}$, при достижении которых соответствующая конфигурация перестает формировать тень. Тем самым было показано, что с ростом точности наблюдений Event Horizon Telescope характеристики тени вращающейся черной дыры могут использоваться, наряду с постньютоновскими тестами и ограничениями по гравитационно-волновым наблюдениям, для проверки расширенных теорий гравитации.

В ходе последующего обсуждения этих результатов были сформулированы два принципиальных вопроса, связанных с применением алгоритма Ньюмена – Яниса к расширенным теориям гравитации.

* E-mail: dkiiiabu4@gmail.com
** E-mail: alexeyevso@my.msu.ru

**Таблица 1.** Компоненты остатков полных метрических уравнений поля для рассматриваемых вращающихся метрик при $a = 0.5$, $r = 3$ и $\theta = \pi/6$. Для каждой модели приведены две характерные конфигурации дополнительных параметров

| Параметры | $E^t{}_t$ | $E^r{}_r$ | $E^\theta{}_\theta$ | $E^\varphi{}_\varphi$ | $E^t{}_\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Хорндески | | | | | |
| $\alpha = 0.2$ | $-1.6231 \cdot 10^{-4}$ | $-2.4924 \cdot 10^{-3}$ | $2.4646 \cdot 10^{-3}$ | $2.5923 \cdot 10^{-3}$ | $2.0095 \cdot 10^{-3}$ |
| $\alpha = 1.0$ | $-1.4192 \cdot 10^{-3}$ | $-1.1600 \cdot 10^{-2}$ | $1.3692 \cdot 10^{-2}$ | $1.4374 \cdot 10^{-2}$ | $1.0953 \cdot 10^{-2}$ |
| Бамблби | | | | | |
| $l = 0.10$ | $-1.6723 \cdot 10^{-3}$ | $-3.8650 \cdot 10^{-3}$ | $-1.0085 \cdot 10^{-2}$ | $-9.8658 \cdot 10^{-3}$ | $4.2095 \cdot 10^{-3}$ |
| $l = 0.35$ | $-4.3815 \cdot 10^{-3}$ | $-1.4264 \cdot 10^{-2}$ | $-3.1368 \cdot 10^{-2}$ | $-3.0727 \cdot 10^{-2}$ | $1.5343 \cdot 10^{-2}$ |
| Скалярная гравитация Гаусса – Бонне | | | | | |
| $\xi = 0.10$ | $1.0033 \cdot 10^{1}$ | $1.1140 \cdot 10^{1}$ | $2.1292 \cdot 10^{1}$ | $1.8920 \cdot 10^{1}$ | $4.3336 \cdot 10^{0}$ |
| $\xi = 0.25$ | $1.3415 \cdot 10^{1}$ | $1.8968 \cdot 10^{1}$ | $2.1777 \cdot 10^{1}$ | $2.5191 \cdot 10^{1}$ | $5.3033 \cdot 10^{0}$ |
| LQG с модифицированной метрикой Хейворда | | | | | |
| $l = \alpha = 0.5,\ \beta = 0.2$ | $-2.649 \cdot 10^{-4}$ | $8.506 \cdot 10^{-5}$ | $-2.466 \cdot 10^{-4}$ | $6.508 \cdot 10^{-5}$ | $4.964 \cdot 10^{-3}$ |
| $l = \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8$ | $-4.786 \cdot 10^{-4}$ | $1.702 \cdot 10^{-4}$ | $-6.796 \cdot 10^{-4}$ | $-1.751 \cdot 10^{-4}$ | $6.467 \cdot 10^{-3}$ |
| Конформная гравитация | | | | | |
| $m_2 = 2,\ Q_s = 0.20$ | $1.4058 \cdot 10^{-4}$ | $-4.7701 \cdot 10^{-5}$ | $1.0470 \cdot 10^{-3}$ | $1.1481 \cdot 10^{-3}$ | $1.7044 \cdot 10^{-3}$ |
| $m_2 = 2,\ Q_s = 0.73$ | $7.0325 \cdot 10^{-4}$ | $-9.1005 \cdot 10^{-4}$ | $5.9058 \cdot 10^{-3}$ | $7.2404 \cdot 10^{-3}$ | $1.7439 \cdot 10^{-2}$ |
| $f(Q)$-гравитация | | | | | |
| $\alpha = 0.005$ | $-6.1787 \cdot 10^{-3}$ | $-5.8350 \cdot 10^{-3}$ | $5.8541 \cdot 10^{-3}$ | $6.0951 \cdot 10^{-3}$ | $4.4711 \cdot 10^{-3}$ |
| $\alpha = -0.005$ | $6.3983 \cdot 10^{-3}$ | $5.8162 \cdot 10^{-3}$ | $-5.9560 \cdot 10^{-3}$ | $-6.1936 \cdot 10^{-3}$ | $-4.4429 \cdot 10^{-3}$ |

Первый из них обусловлен самой структурой алгоритма. Алгоритм Ньюмена – Яниса первоначально был разработан в рамках общей теории относительности (ОТО) как способ перехода от статического сферически-симметричного решения к стационарному аксиально-симметричному решению с введением единственного параметра вращения $a$. В расширенных теориях гравитации исходное решение, как правило, определяется не только массой $M$, но и дополнительными параметрами, связанными со скалярными, векторными или иными динамическими степенями свободы. Поэтому применение алгоритма только к метрическому сектору само по себе не гарантирует согласованного аксиально-симметричного продолжения всех дополнительных полей и, следовательно, не гарантирует, что полученная вращающаяся конфигурация является точным решением полной системы уравнений поля. В этом смысле однопараметрический характер алгоритма действительно представляет собой ограничение его прямого применения вне ОТО.

Тем не менее, при феноменологическом моделировании астрофизических черных дыр необходимо принять во внимание несколько обстоятельств. Во-первых, в расширенной теории гравитации полный вид группы симметрий и соответствующего анзаца для стационарного аксиально-симметричного решения заранее, как правило, неизвестен, поэтому построение наиболее общего вращающегося решения представляет собой самостоятельную задачу. Во-вторых, непосредственное решение полной связанной системы метрических уравнений и уравнений для дополнительных динамических степеней свободы даже при заданной аксиальной симметрии является существенно более сложной задачей, чем получение сферически-симметричного решения. В-третьих, наблюдательные данные показывают, что ОТО с высокой точностью описывает широкий класс астрофизических систем [2], поэтому физически интерес представляет прежде всего режим малых отклонений от эйнштейновского предела. В частности, для решений со скалярным, или дилатонным, зарядом известно, что вблизи шварцшильдовского предела такой заряд является поправочной величиной и для массивных черных дыр ведет себя как $D_\phi \sim M^{-1}$ [3]; дополнительные ограничения на скалярные степени свободы следуют, в частности, из наблюдений компактных двойных систем [4]. Поэтому в настоящей работе дополнительные степени свободы рассматриваются как малые

поправки к ОТО. При таком подходе алгоритм Ньюмена – Яниса вводит вращение только через метрический сектор, тогда как согласованность полученной конфигурации должна проверяться непосредственной подстановкой в полные уравнения соответствующей теории.

## 2. ПРОВЕРКА КОРРЕКТНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО АЛГОРИТМА НЬЮМЕНА – ЯНИСА

Обозначим через $E_I(a)$ отдельную компоненту остатка полевых уравнений для конфигурации с параметром вращения $a$; точному решению соответствует $E_I = 0$ для всех $I$. В табл. 1–4 приведены компонентные (для уравнения аффинной связности — нормированные) остатки. Их абсолютная величина зависит от нормировки конкретного уравнения, поэтому универсальный численный порог, одинаковый для различных теорий и компонент, в настоящей работе не вводится.

Для оценки погрешности, связанной именно с введением вращения с помощью алгоритма Ньюмена – Яниса, наряду с полным остатком будем рассматривать разность между остатком при конечном значении параметра вращения и его значением в статическом пределе

$$\begin{aligned} \Delta E_I(a) &= E_I(a) - E_I(0), \\ \varepsilon_{\mathrm{rot}}(a) &= \max_I |\Delta E_I(a)|. \end{aligned} \tag{1}$$

При $a = 0$ полученная с помощью алгоритма Ньюмена – Яниса метрика переходит в исходное статическое решение, поэтому величина (1) отделяет изменение остатка, возникающее именно при введении вращения, от его значения в статическом пределе. Важно подчеркнуть, что тождественное равенство $\Delta E_I(0) = 0$ само по себе не используется как свидетельство корректности приближения: проверяется поведение $\varepsilon_{\mathrm{rot}}$ в нескольких ненулевых точках $a$. Для малых $a$ мы аппроксимируем

$$\varepsilon_{\mathrm{rot}}(a) \propto a^p, \tag{2}$$

и положительное значение $p$ служит критерием непрерывного приближения вращающейся конфигурации к выбранному статическому пределу. Таким образом, это — критерий сходимости, а не искусственное перенормирование полного остатка и не универсальный порог абсолютной точности. Там, где $E_I(0)$ численно близок к нулю, условие (2) одновременно означает стремление полного остатка к нулю; при ненулевом $E_I(0)$ оно характеризует только дополнительную ошибку, связанную с вращением. Поэтому абсолютные значения $E_I(a)$ анализируются отдельно и сохраняются в табл. 1–4. Точным решением мы называем только конфигурацию, для которой все полевые уравнения удовлетворяются с нулевым остатком в пределах численной точности; конечный ненулевой остаток сам по себе не позволяет задать универсальную границу «приемлемой точности». Все выводы ниже относятся только к рассмотренным семействам черных дыр и исследованным областям их параметров.

Во всех численных расчетах используется планковская система единиц $G = c = M = 1$. Остатки в табл. 1–4 вычислены при $\theta = \pi/6$. Обозначения параметров сохранены такими же, как в работе [1]: $\alpha$ характеризует деформацию используемого решения Хорндески, $l$ является параметром нарушения

**Таблица 2.** Остатки уравнений скалярного поля для рассматриваемых вращающихся метрик при $a = 0.5$, $r = 3$ и $\theta = \pi/6$. Для каждой модели приведены две характерные конфигурации дополнительных параметров

| Параметры | Остаток скалярного уравнения |
|---|---|
| Хорндески | |
| $\alpha = 0.2$ | $E_\phi = -2.8574 \cdot 10^{-4}$ |
| $\alpha = 1.0$ | $E_\phi = -9.7702 \cdot 10^{-4}$ |
| Скалярная гравитация Гаусса – Бонне | |
| $\xi = 0.10$ | $E_\vartheta = 1.3530 \cdot 10^{2}$ |
| $\xi = 0.25$ | $E_\vartheta = 1.2188 \cdot 10^{2}$ |
| Новая массивная конформная гравитация | |
| $m_2 = 2,\ Q_s = 0.20$ | $E_\phi = -4.0997 \cdot 10^{-3}$ |
| $m_2 = 2,\ Q_s = 0.73$ | $E_\phi = -4.8989 \cdot 10^{-3}$ |

**Таблица 3.** Компоненты остатка векторного уравнения $\mathcal{B}^\nu$ для метрики бамблби, полученной алгоритмом Ньюмена – Яниса, при $a = 0.5$, $r = 3$ и $\theta = \pi/6$

| $l$ | $\mathcal{B}^t$ | $\mathcal{B}^r$ | $\mathcal{B}^\theta$ | $\mathcal{B}^\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.10 | 0 | $-4.8262 \cdot 10^{-4}$ | $-1.4746 \cdot 10^{-4}$ | 0 |
| 0.35 | 0 | $-2.6630 \cdot 10^{-3}$ | $-4.6612 \cdot 10^{-4}$ | 0 |

**Таблица 4.** Компоненты нормированного остатка уравнения для аффинной связности $\overline{\mathcal{C}}_\mu$ для метрики $f(Q)$-гравитации, полученной алгоритмом Ньюмена – Яниса, при $a = 0.5$, $r = 3$ и $\theta = \pi/6$

| $\alpha$ | $\overline{\mathcal{C}}_t$ | $\overline{\mathcal{C}}_r$ | $\overline{\mathcal{C}}_\theta$ | $\overline{\mathcal{C}}_\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.005 | 0 | $-3.5373 \cdot 10^{-6}$ | $3.7190 \cdot 10^{-6}$ | 0 |
| $-0.005$ | 0 | $1.7769 \cdot 10^{-5}$ | $-1.8650 \cdot 10^{-5}$ | 0 |

лоренц-инвариантности в модели бамблби, $\xi$ задает связь скалярного поля с инвариантом Гаусса – Бонне, $(l, \alpha, \beta)$ параметризуют модель LQG с модифицированной метрикой Хейворда, $m_2$ и $Q_s$ являются соответственно массовым параметром и скалярным зарядом в массивной конформной гравитации, а $\alpha$ является коэффициентом квадратичной поправки в модели $f(Q) = Q + \alpha Q^2$. Полные определения и используемые метрики приведены в [1].

Второй принципиальный вопрос связан с возможным появлением дополнительных геометрических особенностей при применении алгоритма Ньюмена – Яниса вне ОТО. Как показано в в работе [5], формальное применение этого алгоритма к модифицированным теориям гравитации может приводить к невыполнению полных уравнений поля и к возникновению дополнительных сингулярностей, отсутствующих в исходном статическом решении. По этой причине проверки одних только условий модифицированного алгоритма Ньюмена – Яниса недостаточно. Необходимо, во-первых, непосредственно оценить остатки метрических уравнений поля и, при наличии дополнительных динамических степеней свободы, отдельно проверить скалярные, векторные уравнения и уравнение для аффинной связности; во-вторых, исследовать инварианты кривизны, в частности скаляр Кретчмана, и убедиться в отсутствии новых патологических особенностей вне горизонта событий; в-третьих, для задачи моделирования тени необходимо дополнительно проверить существование и неустойчивость сферических фотонных орбит, формирующих ее границу. И именно этим проверкам для вращающихся метрик, рассмотренных нами ранее, посвящен настоящий очерк.

В табл. 1 приведено сравнение компонент остатков полных метрических уравнений при $a = 0.5$ и $r = 3$ для двух характерных наборов дополнительных параметров каждой модели. Наименьшие значения в целом получены для модели Хорндески, конформной гравитации, $f(Q)$-гравитации и модели LQG с модифицированной метрикой Хейворда, где характерные остатки лежат преимущественно в диапазоне $10^{-4}$–$10^{-2}$. Для модели бамблби значения несколько выше и достигают нескольких $10^{-2}$. Наиболее существенное рассогласование наблюдается в скалярной гравитации Гаусса – Бонне, где компоненты метрического остатка имеют порядок $10^{1}$, что качественно согласуется с выводами работы [5] о проблемах применения алгоритма Ньюмена – Яниса в модифицированных теориях гравитации.

Дополнительная проверка уравнений неметрических степеней свободы приводит к аналогичной картине. Для Хорндески остаток уравнения скалярного поля при выбранных параметрах имеет порядок $10^{-4}$–$10^{-3}$, а для конформной гравитации — порядка $10^{-3}$ (табл. 2). Компоненты остатка векторного уравнения модели бамблби остаются преимущественно на уровне $10^{-4}$–$10^{-3}$ (табл. 3). В $f(Q)$-гравитации нормированный остаток уравнения для аффинной связности оказывается еще меньше и составляет порядка $10^{-6}$–$10^{-5}$ в рассматриваемой области параметров (табл. 4). Исключением вновь является скалярная гравитация Гаусса – Бонне, для которой остаток уравнения скалярного поля достигает порядка $10^{2}$ (табл. 2). Таким образом, абсолютные остатки используются здесь как диагностическая характеристика конкретных конфигураций, а не как универсальная относительная погрешность с заранее заданной границей.

Для дополнительной проверки поведения в пределе малого вращения расчеты были повторены при $a = 0.75, 0.50, 0.25, 0.15, 0.05$ с сохранением остальных параметров. В табл. 5 приведена величина $\varepsilon_{\mathrm{rot}}$ для одной характерной конфигурации каждой модели при $r = 3$ и $\theta = \pi/6$. Показатель $p$ определялся по трем наименьшим ненулевым значениям $a = 0.05, 0.15, 0.25$, т. е. независимо от тождественной точки $a = 0$. Для моделей Хорндески, бамблби, LQG с модифицированной метрикой Хейворда, массивной конформной и $f(Q)$-гравитации максимальный метрический остаток, связанный с введением вращения, уменьшается практически пропорционально $a$; смешанные компоненты типа $E^t{}_{\varphi}$ ведут себя как $O(a)$, тогда как диагональные компоненты в численно устойчивых случаях подавляются как $O(a^2)$. Остатки дополнительных уравнений также уменьшаются примерно квадратично: для скалярного уравнения Хорндески показатель степени составляет $p \simeq 2.02$–$2.04$, для векторного уравнения бамблби $p \simeq 2.01$, для скалярного уравнения массивной конформной гравитации $p \simeq 2.00$, а для нормированного уравнения аффинной связности в $f(Q)$-гравитации $p \simeq 1.96$. Следовательно, наблюдаемое уменьшение невязки не является следствием самого вычитания значения при $a = 0$: оно определяется независимой степенной зависимостью по нескольким ненулевым значениям параметра вращения.

В скалярной гравитации Гаусса – Бонне вклад, связанный с вращением, также уменьшается при $a \to 0$, однако полный метрический остаток остается порядка $10^{1}$, а остаток скалярного уравнения — порядка $10^{2}$ уже вблизи статического предела. Это указывает на недостаточную согласованность дан-

**Таблица 5.** Максимальная невязка метрических уравнений поля, обусловленная введением вращения относительно статического случая $\varepsilon_{\rm rot}(a) = \max_I |E_I(a) - E_I(0)|$ при $r = 3$ и $\theta = \pi/6$. В последнем столбце приведен показатель $p$ из аппроксимации $\varepsilon_{\rm rot} \propto a^p$ по точкам $a = 0.05,\ 0.15,\ 0.25$

| Модель | Параметры | $a = 0.75$ | $a = 0.50$ | $a = 0.25$ | $a = 0.15$ | $a = 0.05$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Хорндески | $\alpha = 0.2$ | $2.850 \cdot 10^{-3}$ | $2.010 \cdot 10^{-3}$ | $1.039 \cdot 10^{-3}$ | $6.28 \cdot 10^{-4}$ | $2.10 \cdot 10^{-4}$ | 0.994 |
| Бамблби | $l = 0.10$ | $6.249 \cdot 10^{-3}$ | $4.210 \cdot 10^{-3}$ | $2.120 \cdot 10^{-3}$ | $1.274 \cdot 10^{-3}$ | $4.25 \cdot 10^{-4}$ | 0.999 |
| Скалярная Гаусса–Бонне | $\xi = 0.10$ | $3.919 \cdot 10^{1}$ | $1.853 \cdot 10^{1}$ | 5.088 | 2.211 | $5.808 \cdot 10^{-1}$ | 1.327 |
| LQG, модифицированная Хейворда | $l = \alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$ | $7.493 \cdot 10^{-3}$ | $4.964 \cdot 10^{-3}$ | $2.472 \cdot 10^{-3}$ | $1.482 \cdot 10^{-3}$ | $4.94 \cdot 10^{-4}$ | 1.001 |
| Массивная конформная | $m_2 = 2,\ Q_s = 0.73$ | $2.565 \cdot 10^{-2}$ | $1.744 \cdot 10^{-2}$ | $8.842 \cdot 10^{-3}$ | $5.307 \cdot 10^{-3}$ | $1.782 \cdot 10^{-3}$ | 0.995 |
| $f(Q)$ | $\alpha = 0.005$ | $6.766 \cdot 10^{-3}$ | $4.471 \cdot 10^{-3}$ | $2.222 \cdot 10^{-3}$ | $1.331 \cdot 10^{-3}$ | $4.43 \cdot 10^{-4}$ | 1.001 |

**Таблица 6.** Проверка условия неустойчивости сферических фотонных орбит

| $a$ | Параметры | $r_{\rm ph}$ | $\mathcal{R}''(r_{\rm ph})$ |
|---|---|---|---|
| | Хорндески | | |
| 0.50 | $\alpha = 0.2$ | 3.2509 | 63.5013 |
| 0.50 | $\alpha = 0.5$ | 3.3215 | 68.0303 |
| 0.50 | $\alpha = 0.8$ | 3.3867 | 72.2740 |
| 0.50 | $\alpha = 1.0$ | 3.4276 | 74.9707 |
| 0.94 | $\alpha = 0.2$ | 3.2937 | 62.2283 |
| 0.94 | $\alpha = 0.5$ | 3.3707 | 67.3313 |
| 0.94 | $\alpha = 0.8$ | 3.4408 | 72.0585 |
| 0.94 | $\alpha = 1.0$ | 3.4846 | 75.0399 |
| | Бамблби | | |
| 0.50 | $l = 0.10$ | 3.2374 | 52.6240 |
| 0.94 | $l = 0.10$ | 3.2823 | 48.4246 |
| 0.50 | $l = 0.20$ | 3.2751 | 47.1536 |
| 0.92 | $l = 0.20$ | 3.3296 | 43.4545 |
| 0.50 | $l = 0.30$ | 3.3133 | 42.5945 |
| 0.87 | $l = 0.30$ | 3.3769 | 39.8455 |
| 0.50 | $l = 0.35$ | 3.3326 | 40.5916 |
| 0.87 | $l = 0.35$ | 3.4011 | 37.9186 |
| | Петлевая квантовая гравитация | | |
| 0.50 | (3.0, 0.0, 0.7698) | 2.9023 | 37.3713 |
| 0.66 | (3.0, 0.0, 0.7698) | 2.9227 | 35.8275 |
| 0.50 | (1.0, 1.305, 0.0) | 3.2711 | 62.3983 |
| 0.94 | (1.0, 1.305, 0.0) | 3.3195 | 59.0048 |
| 0.50 | (0.5, 0.2, 0.5) | 3.1050 | 51.5842 |
| 0.86 | (0.5, 0.2, 0.5) | 3.1385 | 47.9600 |
| 0.50 | (0.5, 0.8, 0.5) | 3.1409 | 53.1180 |
| 0.94 | (0.5, 0.8, 0.5) | 3.1740 | 48.2163 |

| $a$ | Параметры | $r_{\rm ph}$ | $\mathcal{R}''(r_{\rm ph})$ |
|---|---|---|---|
| | Конформная гравитация | | |
| 0.50 | (2, 0.73) | 2.7198 | 35.6795 |
| 0.50 | (2, 0.50) | 3.0084 | 49.7486 |
| 0.82 | (2, 0.50) | 3.0357 | 46.5873 |
| 0.50 | ($\infty$, 0.90) | 2.5320 | 30.3401 |
| 0.55 | ($\infty$, 0.90) | 2.5356 | 29.8095 |
| 0.50 | ($\infty$, 0.50) | 3.0400 | 52.0853 |
| 0.93 | ($\infty$, 0.50) | 3.0613 | 46.9788 |
| 0.50 | (1, 0.51) | 2.8817 | 40.7277 |
| 0.50 | (1, 0.35) | 3.0678 | 51.5489 |
| 0.78 | (1, 0.35) | 3.1001 | 49.2612 |
| 0.50 | (1, 0.20) | 3.1593 | 56.8972 |
| 0.93 | (1, 0.20) | 3.1935 | 52.5031 |
| 0.50 | (0.707, 0.39) | 2.9440 | 42.8909 |
| 0.50 | (0.707, 0.20) | 3.1420 | 55.5567 |
| 0.87 | (0.707, 0.20) | 3.1781 | 52.1684 |
| | $f(Q)$-гравитация | | |
| 0.50 | $\alpha = 0.005$ | 3.4895 | 74.0380 |
| 0.73 | $\alpha = 0.005$ | 3.5345 | 73.7023 |
| 0.94 | $\alpha = 0.005$ | 3.5502 | 71.5021 |
| 0.50 | $\alpha = -0.001$ | 3.1352 | 56.1504 |
| 0.73 | $\alpha = -0.001$ | 3.1689 | 54.8539 |
| 0.94 | $\alpha = -0.001$ | 3.1661 | 51.4405 |
| 0.50 | $\alpha = -0.005$ | 2.8393 | 42.5902 |
| 0.73 | $\alpha = -0.005$ | 2.8573 | 40.2397 |
| 0.50 | $\alpha = -0.008$ | 2.5521 | 30.5376 |

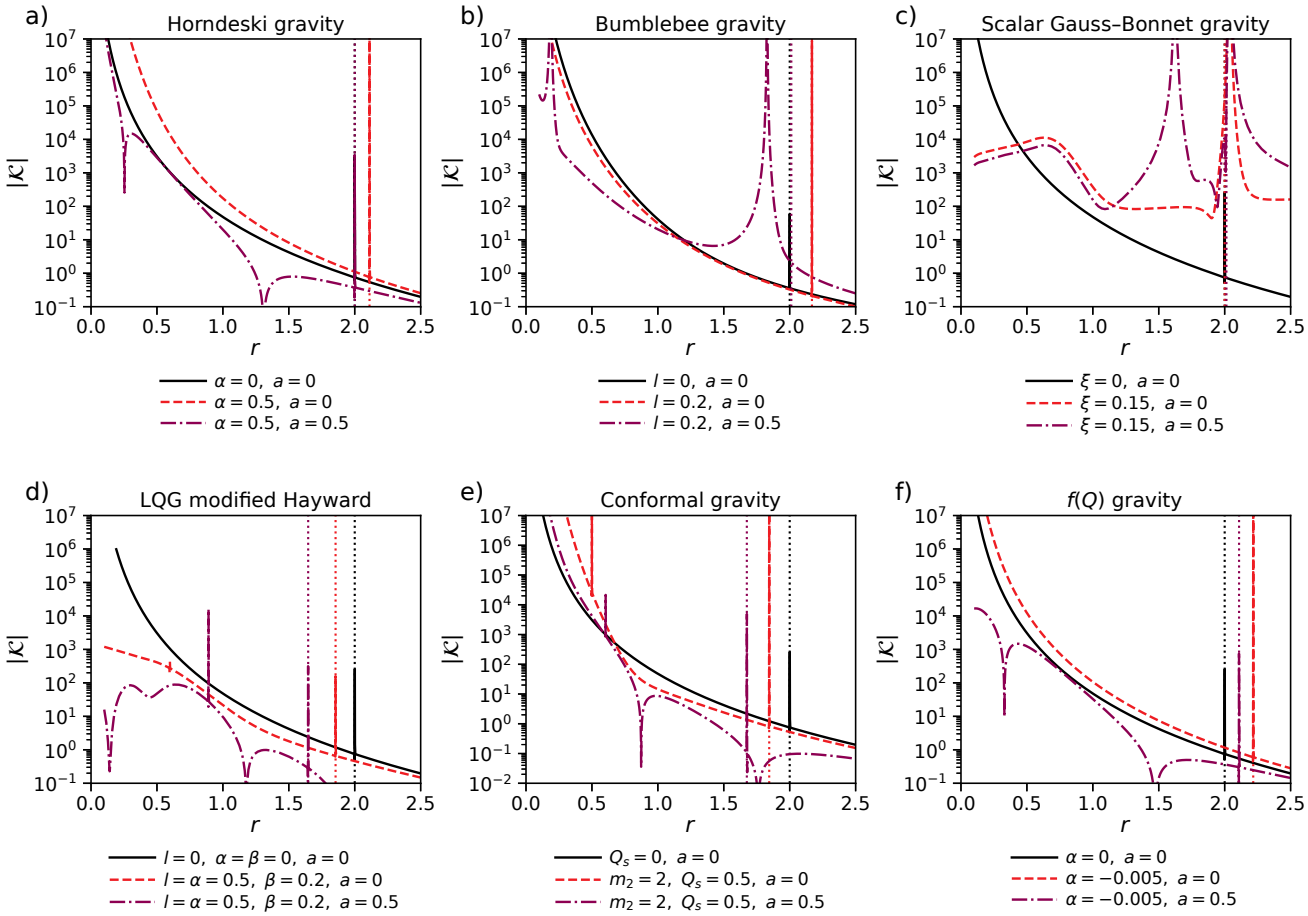


**Рис. 1.** Зависимость модуля скаляра Кретчмана $|\mathcal{K}|$ от $r$ при $\theta_0 = \pi/6$ для модели Хорндески ($a$), модели бамблби ($b$), скалярной гравитации Гаусса – Бонне ($c$), модели LQG ($d$), конформной гравитации ($e$) и $f(Q)$-гравитации ($f$)

ной конфигурации с полной системой уравнений поля.

Дополнительно было исследовано поведение скаляра Кретчмана

$$\mathcal{K} = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{3}$$

при $\theta_0 = \pi/6$ на рис. 1. Анализ показал, что для моделей Хорндески (рис. 1 $a$), конформной гравитации (рис. 1 $e$) и $f(Q)$-гравитации (рис. 1 $f$) введение вращения не приводит к появлению новых выраженных особенностей вне горизонта событий. В модели бамблби (рис. 1 $b$) и петлевой квантовой гравитации (рис. 1 $d$) возникают дополнительные локальные пики кривизны, однако они располагаются внутри горизонта. Наиболее проблематичное поведение наблюдается в скалярной гравитации Гаусса – Бонне (рис. 1 $c$): в этом случае появляются дополнительные особенности скаляра Кретчмана, в том числе вне горизонта событий. Данный результат качественно согласуется с выводами работы [5], где было показано, что применение алгоритма Ньюмена – Яниса к модифицированным теориям гравитации может приводить к появлению дополнительных сингулярных структур.

Наконец, нами проверены условия неустойчивости сферических фотонных орбит, описанные ранее [6]. Для всех использованных при моделировании конфигураций были численно вычислены радиусы фотонных орбит $r_{\rm ph}$ и значения второй производной радиального потенциала. Как видно из табл. 6, во всех случаях выполняется условие

$$\mathcal{R}''(r_{\rm ph}) > 0, \tag{4}$$

что подтверждает существование неустойчивых сферических фотонных орбит и корректность построения границы тени на основе критических фотонных траекторий.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Таким образом, совокупность проверок показывает, что для моделей Хорндески, бамблби, LQG с модифицированной метрикой Хейворда, массивной конформной и $f(Q)$-гравитации дополнительная несогласованность, связанная с введением вращения алгоритмом Ньюмена – Яниса, плавно исчезает при переходе к статическому пределу. Это поддерживает использование соответствующих метрик как эффективных приближенных конфигураций для феноменологического моделирования теней черных дыр в исследованных областях параметров, но не является утверждением об их точности при конечном $a$ и не задает универсальной относительной погрешности. Наиболее проблематичным случаем остается скалярная гравитация Гаусса – Бонне, для которой велики абсолютные остатки метрических и скалярного уравнений, а также появляются дополнительные особенности скаляра Кретчмана вне горизонта событий. В соответствии с логикой анализа работы [5], такое поведение указывает на недостаточную согласованность полученной вращающейся конфигурации с полными уравнениями поля. Поэтому данная метрика исключается из дальнейшего рассмотрения и не используется при последующем моделировании профилей теней черных дыр.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность Б. Н. Латошу за разъяснения необходимости дополнительной проверки корректности применения алгоритма Ньюмена – Яниса вне ОТО.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов.** Вклад авторов равноценен.

## ЛИТЕРАТУРА

**1**. S. O. Alekseev, O. I. Zenin, and A. O. Baiderin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **167**, 463 (2025) [С. О. Алексеев, О. И. Зенин, А. О. Байдерин, ЖЭТФ **167**, 477 (2025)].

**2**. C. M. Will, Living Rev. Relativ. **17**, 4 (2014).

**3**. S. Mignemi and N. R. Stewart, Phys. Rev. D **47**, 5259 (1993).

**4**. P. I. Dyadina, N. A. Avdeev, and S. O. Alexeyev, Mon. Not. R. Astron. Soc. **483**, 947 (2019).

**5**. D. Hansen and N. Yunes, Phys. Rev. D **88**, 104020 (2013).

**6**. A. F. Zakharov, Sov. Phys. JETP **64**, 1 (1986) [А. Ф. Захаров, ЖЭТФ **91**, 3 (1986)].

# Additional Notes on Rotating Solutions in Extended Gravity

***O. I. Zenin*** [a*], ***S. O. Alexeyev*** [a,b**]

[a] Department of Quantum Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
119991, Moscow, Russia

[b] Department of Relativistic Astrophysics, Sternberg State Astronomical Institute, Lomonosov Moscow State University
119234, Moscow, Russia

*E-mail: dkiiiabu4@gmail.com
**E-mail: alexeyev@physics.msu.ru

Received August 26, 2026
Revised October 26, 2026
Accepted October 26, 2026

## Abstract

This paper supplements and clarifies the results presented in the article by S. O. Alexeyev, O. I. Zenin, and A. O. Baiderin, "Black Hole Shadows Modelling in Extended Gravity: Rotation Accounting and Coupled Effects" (Zh. Eksp. Teor. Fiz. **167**, 477 (2025)). The correctness of applying the modified Newman–Janis algorithm is further examined by analyzing the residuals of the full field equations, the behavior of the Kretschmann scalar, and the stability of spherical photon orbits. It is shown that, for most of the models considered, the additional residuals associated with the introduction of rotation decrease in the static limit, supporting the use of the resulting metrics as effective approximations. In scalar Gauss–Bonnet gravity, however, significant inconsistencies with the field equations and additional curvature singularities outside the event horizon are identified, limiting the applicability of the corresponding metric to black hole shadow modelling.

**Keywords**: rotating black holes, Newman–Janis algorithm, extended theories of gravity, field equations, scalar gravity

**Acknowledgements.** The authors are grateful to B. N. Latosh for clarifying the need need to additional verification of the correctness of applying the Newman – Janis algorithm beyond general relativity.

**Funding.** The study was not sponsored.

**Conflict of interest.** The authors declare that they have no conflict of interest.

**Authors' contributions.** The contributions of the authors are equal.