ЖЭТФ/JETP, 2026, том 170, вып. 6 (12), стр. 716–725 © 2026

СЕМЕЙСТВО ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПЛОСКОЙ КАПЛИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Е. Н. Журавлева [a]***, Н. М. Зубарев*** [b,c*]***, Е. А. Карабут*** [a]

[a] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук 630090, Новосибирск, Россия*

[b] *Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук 620016, Екатеринбург, Россия*

[c] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 сентября 2026 г.,
после переработки 29 сентября 2026 г.
Принята к публикации 16 октября 2026 г.

На основе метода конформных отображений построено широкое семейство точных решений, описывающих нестационарную динамику плоской капли идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Капиллярные эффекты и влияние внешних полей не учитываются. Движение границы капли индуцировано присутствием внутреннего гидродинамического мультиполя. Подробно исследована эволюция капли с центральным диполем, для которой уравнения движения проинтегрированы в квадратурах. Показано, что решение существует лишь конечное время и разрушается с образованием на свободной поверхности точки заострения — каспа.

Ключевые слова: идеальная жидкость, свободная граница, точные решения, конформные отображения, гидродинамический мультиполь, касп

DOI: 10.31857/S0044451026120161

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение плоских потенциальных нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей представляет собой классическую задачу гидродинамики. Ее математическая формулировка заключается в определении поля скоростей и геометрии области течения в произвольный момент времени по заданным начальным условиям. Несмотря на фундаментальный характер проблемы, число ее точных аналитических решений до сих пор весьма ограничено даже в простейшем случае отсутствия внешних сил и капиллярных эффектов.

Долгое время большинство известных решений исчерпывалось классами течений с линейным по пространственным координатам полем скоростей [1, 2]. Существенный шаг в преодолении этого ограничения был сделан в работе [3], где предложен метод построения точных нестационарных решений, основанный на полулагранжевом описании движения границы и аналитическом продолжении функций со свободной поверхности внутрь области течения. В дальнейшем данный подход получил развитие в работах Лонге-Хиггинса [4, 5], в которых были найдены решения, описывающие динамику схлопывания пузырей и формирование кавитационных струй. Необходимо подчеркнуть, что в упомянутых работах рассматривались неограниченные области течения. В настоящей работе предложен алгоритм построения точных решений для течений в ограниченной области — плоской капле жидкости.

В последние годы на основе метода конформных отображений был получен ряд новых широких семейств точных решений для течений со свободной границей [6–9]. Однако эти результаты относились

* E-mail: nick@iep.uran.ru

к специфическому классу течений с нулевым ускорением частиц на свободной поверхности (течения с «баллистическими границами» по терминологии [10]). Ниже это ограничение снято, что позволяет исследовать динамику свободных границ в случае общего положения, когда ускорение жидких частиц отлично от нуля.

Характерной особенностью развиваемого подхода является то, что построенные решения описывают нестационарные течения, индуцированные локализованными гидродинамическими сингулярностями (мультиполями) внутри ограниченного жидкого объема. В то время как для вязкой жидкости в модели Хеле–Шоу подобные задачи глубоко исследованы — начиная с пионерских работ Полубариновой-Кочиной [11] и Галина [12] (решение для изолированного стока в области течения) и вплоть до работы [13] (решения для течений, порожденных мультиполями высших порядков) — в динамике идеальной жидкости точные решения такого типа практически отсутствуют. До сих пор было известно только полученное в работе [14] решение для эволюции изначально круглой капли, индуцированной нецентральным стоком, при построении которого, однако, также накладывалось упоминавшееся условие нулевого ускорения частиц на свободной границе.

Настоящая работа призвана восполнить этот пробел. В ней представлен метод построения аналитических решений, описывающих мультипольные течения плоской капли идеальной жидкости для случая общего положения, когда движение частиц на свободной поверхности не является баллистическим.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости, занимающей некоторую область Ω_t на плоскости $z = x + iy$. Будем пренебрегать влиянием внешних сил и капиллярных эффектов. Положим, что вся граница области $\partial\Omega_t$ является свободной. Главная трудность решения таких задач связана с изменением геометрии границы со временем. Для фиксации границы введем вспомогательную комплексную плоскость ζ, в которой область течения всегда представляет собой единичный круг с центром в начале координат. Переход к фиксированной области порождает неизвестную функцию $Z(\zeta, t)$, задающую конформное отображение единичного круга плоскости ζ на физическую область Ω_t. Второй неизвестной функцией является комплексная скорость

$$U(z,t) = u(x,y,t) - iv(x,y,t), \tag{1}$$

где $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ — x- и y-компоненты вектора скорости жидкости.

Условия несжимаемости и потенциальности течения

$$u_x + v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0, \quad (x,y) \in \Omega_t, \tag{2}$$

где нижние индексы обозначают соответствующие частные производные, представляют собой условия Коши–Римана для функции $U(z,t)$. Следовательно, любая аналитическая функция $U(z,t)$ задает некоторое потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости (вообще говоря, в многолистной области).

Динамика свободной границы определяется двумя граничными условиями — кинематическим и динамическим. Кинематическое условие означает, что свободная граница всегда состоит из одних и тех же частиц жидкости, а динамическое условие заключается в постоянстве давления на ней. Существуют различные формы записи этих условий — как правило, в терминах потенциала скорости и конформного отображения [15–19]. В работе [14] был предложен способ их представления в терминах комплексной скорости U и конформного отображения Z:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\left(Z_s(\overline{Z}_t - U)\right) = 0, \\ &\operatorname{Re}\left(Z_s U_t - U_s(Z_t - \overline{U})\right) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь индекс «s» обозначает дифференцирование по длине дуги свободной границы во вспомогательной плоскости ζ (на единичной окружности $\zeta = e^{i\theta}$ величина s совпадает с угловой координатой θ), а черта над символом — комплексное сопряжение.

Первое уравнение (3) означает, что нормальная составляющая разности векторов скорости свободной границы и скорости жидкости равна нулю, что гарантирует выполнение кинематического условия. Второе уравнение системы (3) вытекает из ортогональности вектора ускорения к свободной границе. Тогда, в силу уравнений Эйлера, градиент давления также ортогонален свободной границе, что обеспечивает выполнение динамического граничного условия.

В работе [14] была выявлена следующая редукция условий (3) на свободной границе:

$$\begin{aligned} &\overline{Z}_t - U = 0, \\ &U_t = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения (4) являются частным случаем системы (3); следовательно, для всех решений, удовлетво-

ряющих (4), выполнены кинематическое и динамическое условия на свободной границе. Однако при этом ускорение жидких частиц, находящихся на свободной границе, обращается в нуль. Действительно, полное (субстанциональное) ускорение можно выразить следующим образом:

$$\frac{dU}{dt} = U_t + U_z\left(\overline{U} - Z_t\right). \tag{5}$$

Легко увидеть, что при выполнении условий (4) имеем $dU/dt = 0$.

В настоящей работе мы предлагаем алгоритм, позволяющий строить точные решения с ненулевым ускорением на свободной границе. Для этого предположим, что на свободной границе выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} &\overline{Z}_t - U = \lambda(s,t)\overline{Z}_s, \\ &U_t - \lambda(s,t)U_s = if(s,t)\overline{Z}_s, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\lambda(s,t)$ и $f(s,t)$ — некоторые вещественные функции. Прямая подстановка показывает, что если комплексная скорость U и конформное отображение Z удовлетворяют на свободной границе системе (6), то кинематическое и динамическое условия (3) также выполняются. При этом ускорение на свободной границе в общем случае отлично от нуля. Действительно, выражая $\overline{U}$ и U_t из соотношений (6), в силу (5) находим

$$\frac{dU}{dt} = if(s,t)\overline{Z}_s.$$

Отметим, что предложенный в работе [3] подход представляет собой частный случай модели (6), соответствующий значению $\lambda = 0$ (в этой ситуации конформные и лагранжевы переменные на границе совпадают).

Продемонстрируем, что соотношения (6) позволяют эффективно строить точные решения, описывающие динамику плоской капли. Предположим для простоты, что

$$f = f(t), \quad \lambda = 0.$$

Исключая комплексную скорость из системы (6), получим следующее линейное дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию конформного отображения:

$$Z_{tt} = f(t)\zeta Z_\zeta. \tag{7}$$

Здесь учтено, что дифференцирование по длине дуги s на единичной окружности во вспомогательной плоскости ζ эквивалентно дифференцированию по углу θ (при $\zeta = e^{i\theta}$), что позволяет связать эти операторы как $\partial/\partial s = \partial/\partial\theta = i\zeta\partial/\partial\zeta$.

Уравнение (7) позволяет сформулировать алгоритм построения точного решения задачи в виде следующей последовательности шагов.

1. *Задание начальной области течения.* Мы приняли, что во вспомогательной плоскости ζ область, занятая жидкостью, фиксирована и представляет собой единичный круг. Следовательно, задание формы области течения в физической плоскости z в начальный момент времени соответствует определению начального условия для конформного отображения $Z(\zeta,0)$.

2. *Задание комплексной скорости в начальный момент времени.* В силу первого уравнения системы (6) при $\lambda = 0$ комплексная скорость в начальный момент времени определяет значение первой производной по времени: $Z_t(\zeta,0) = \overline{U(\zeta,0)} = \overline{U}(1/\zeta,0)$. Здесь мы учли, что на границе $\zeta = e^{i\theta}$ справедливо $\overline{\zeta} = 1/\zeta$.

3. *Определение конформного отображения и комплексной скорости на свободной границе.* Интегрирование уравнения (7) с учетом начальных условий позволяет найти конформное отображение для любого момента времени t (вопрос о выборе вещественной функции $f(t)$ будет рассмотрен ниже). Из системы (6) находится значение комплексной скорости на свободной границе: $U(\zeta,t) = \overline{Z}_t(1/\zeta,t)$.

4. *Исследование динамики особых точек функций U и Z.* В силу принципа аналитического продолжения найденные на границе $\zeta = e^{i\theta}$ функции U и Z совпадают с искомыми всюду в области своей аналитичности. Анализ эволюции особых точек позволяет определить области, в которые возможно продолжение функций U и Z со свободной границы. Как только какая-либо особая точка достигает в плоскости ζ границы единичного круга, аналитичность функций нарушается, и найденное точное решение перестает существовать.

3. ТЕЧЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ДИПОЛЬ

Наличие произвольной функции $f(t)$ в уравнении (7), а также произвол в выборе начальных условий для самого конформного отображения $Z(\zeta,0)$ и его производной по времени $Z_t(\zeta,0)$, обеспечивают возможность построения широкого семейства точных решений. Рассмотрим конкретный пример, соответствующий эволюции плоской капли, содержащей диполь — гидродинамический источник и сток равной интенсивности, расположенные бесконечно близко друг к другу.

Положим, что в начальный момент времени в физической плоскости z жидкость занимает единичный круг с центром в начале координат. В силу выбора вспомогательной плоскости ζ это сразу задает тождественное начальное отображение $Z(\zeta,0)=\zeta$. Если предположить, что источник и сток интенсивности q расположены в точках $z=\pm r$, и рассмотреть предел $r\to 0$, $q\to\infty$ при условии $rq\to\mu_0/2=\text{const}$, то предельное течение будет соответствовать диполю с моментом μ_0. Комплексная скорость такого течения имеет вид $U(\zeta,0)=\mu_0/(2\pi\zeta^2)$. Отметим, что математически эквивалентное распределение скоростей получается при рассмотрении вихревого диполя — пары точечных вихрей противоположной интенсивности в точках $z=\pm ir$ в пределе $r\to 0$.

Будем искать решение уравнения (7) в виде

$$Z(\zeta,t)=a(t)\zeta+b(t)\zeta^2, \tag{8}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — неизвестные функции времени. Из первого уравнения системы (6) следует $U(\zeta,t)=\overline{Z_t(\zeta,t)}$. Как уже упоминалось, на свободной границе $\zeta=e^{i\theta}$, откуда $\overline{\zeta}=1/\zeta$. Следовательно, в предположении вещественности коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ комплексная скорость в силу принципа аналитического продолжения всюду в области течения принимает вид

$$U(\zeta,t)=\frac{a'(t)}{\zeta}+\frac{b'(t)}{\zeta^2}, \tag{9}$$

где штрих обозначает дифференцирование по t. Согласно (8) и (9), функция комплексной скорости имеет особую точку в начале координат в физической плоскости z. Выбором функций $a(t)$ и $b(t)$ можно добиться того, чтобы эта сингулярность соответствовала чистому диполю в произвольный момент времени.

Подставляя (8) в дифференциальное уравнение (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a''&=af,\\ b''&=2bf. \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая, что $Z(\zeta,0)=\zeta$ и $U(\zeta,0)=\mu_0/(2\pi\zeta^2)$, дополним систему (10) следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} &a(0)=1,\quad a'(0)=0,\\ &b(0)=0,\quad b'(0)=\mu_0/2\pi. \end{aligned} \tag{11}$$

В силу (8) и (9) имеем

$$Z^2U=a^2b'+(a^2a'+2abb')\zeta+(b^2b'+2aba')\zeta^2+a'b^2\zeta^3. \tag{12}$$

Учитывая, что в окрестности особой точки $\zeta=0$ конформное отображение имеет вид $Z=a\zeta+\mathcal{O}(\zeta^2)$, из (12) находим

$$U=\frac{a^2b'}{Z^2}+\frac{aa'+2bb'}{Z}+\frac{b^2b'+2aba'}{a^2}+\mathcal{O}(Z). \tag{13}$$

Для сохранения типа особенности (чистого диполя без появления слагаемых типа источника/стока) в физической плоскости для любого момента времени потребуем, чтобы коэффициент при $1/Z$ обращался в нуль:

$$aa'+2bb'=0. \tag{14}$$

Заметим, что условие (14) выполнено при $t=0$ в силу начальных условий (11).

Интегрируя (14), получаем первый интеграл системы $a^2+2b^2=I=\text{const}$. С учетом начальных условий (11) имеем $I=1$. Таким образом, находим алгебраическую связь между неизвестными функциями a и b:

$$a=\sqrt{1-2b^2}. \tag{15}$$

Исключая из системы (10) функцию f, находим второе уравнение для a и b:

$$\frac{a''}{a}=\frac{b''}{2b}. \tag{16}$$

Преобразуя (16) с учетом связи (15), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для b:

$$b''(1-4b^4)+4b(b')^2=0. \tag{17}$$

Понизим порядок уравнения (17) стандартной заменой $b'=p(b)$, где b рассматривается как новая независимая переменная. Тогда для функции $p(b)$ получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{4b\,db}{1-4b^4}. \tag{18}$$

Решая (18) с учетом (11), находим уравнение первого порядка для функции b,

$$b'=\frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{1-2b^2}{1+2b^2}}, \tag{19}$$

которое интегрируется в квадратурах, и функция $b(t)$ выражается явно через эллиптические функции.

Из второго уравнения системы (10) с учетом (19) получаем зависимость функции f от b:

$$f = \frac{b''}{2b} = \frac{p}{2b}\frac{dp}{db} = -\frac{2p^2}{1-4b^4} = -\frac{\mu_0^2}{2\pi^2(1+2b^2)^2}. \quad (20)$$

Таким образом, функциональный произвол в ключевом уравнении (7) позволяет задать f в виде (20) и тем самым построить точное решение (8) и (9), описывающее течение жидкости в ограниченной области, содержащей диполь. Заметим, что функции $a(t)$ и $b(t)$ заданы таким образом, что автоматически выполняется условие сохранения объема (площади) области течения со временем.

Напомним, что функции $a(t)$ и $b(t)$ считаются вещественными, а значит, уравнение (15) накладывает ограничение

$$1 - 2b^2 \geq 0. \quad (21)$$

Покажем, что условие (21) выполнено во все моменты существования решения (8) и (9). Поскольку комплексная скорость должна быть аналитической в области течения, то построенное решение разрушается при выходе особой точки на свободную границу [16, 17, 20, 21]. Исследуем сингулярности этого решения.

Поскольку $U_z = U_\zeta/Z_\zeta$, положение особых точек определяется из уравнения $Z_\zeta = 0$. С учетом (8) получаем, что во вспомогательной плоскости ζ существует единственная особая точка ζ^*, которая движется по закону

$$\zeta^*(t) = -\frac{a(t)}{2b(t)}. \quad (22)$$

Для вещественных $a(t)$ и $b(t)$ с учетом начальных условий (11) получаем, что сингулярность движется по действительной оси от бесконечности к началу координат. Напомним, что в плоскости ζ области течения соответствует единичный круг с центром в начале координат, следовательно, решение будет существовать при условии $|\zeta^*| > 1$, или $a/(2|b|) > 1$. В силу (15) легко видеть, что $0 \leq a(t) \leq 1$. Таким образом, во все моменты существования решения выполнено неравенство $|b| < 1/\sqrt{2}$, а следовательно, и условие (21).

На рис. 1 представлена эволюция капли жидкости, содержащей диполь. Область течения закрашена. Диполь постоянно расположен в начале координат и отмечен на рисунке звездочкой. Момент диполя при $t = 0$ выбран равным $\mu_0 = 2\pi$. С течением времени величина момента уменьшается. Действительно, из представления (13) с учетом (15) и (19) имеем

$$\mu(t) = 2\pi a^2 b' = \mu_0(1-2b^2)\sqrt{\frac{1-2b^2}{1+2b^2}} < \mu_0.$$

Напомним, что решение разрушается при выходе сингулярности на свободную границу. Для случая, представленного на рис. 1, это соответствует условию $a/(2b) = 1$. Учитывая (15), можно найти значение функции $b(t)$ в момент коллапса: $b(t^*) = 1/\sqrt{6}$, а следовательно, и время разрушения решения t^*. Для течения, изображенного на рис. 1, получаем $t^* \approx 0.46$. Заметим, что интенсивность диполя к этому моменту уменьшается более чем в два раза: $\mu(t^*) = \sqrt{2}\mu_0/3 \approx 0.47\mu_0$.

Зная закон движения сингулярности во вспомогательной плоскости (22) и вид конформного отображения (8), можно определить положение особой точки в физической плоскости. Для течения на рис. 1 имеем $z^* = -a^2/(4b)$. Положение сингулярности отмечено точкой на рисунке. Она постепенно приближается к свободной границе, двигаясь по действительной оси от минус бесконечности. Особая точка достигает свободной границы в момент разрушения решения $t^* \approx 0.46$. При этом на ней образуется точка заострения — касп (см. для сравнения [7, 22]).

4. ВЛИЯНИЕ УСКОРЕНИЯ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

Напомним, что построенное выше решение удовлетворяет на свободной границе условиям (6), где функция f задана выражением (20), а также принято $\lambda = 0$. Ускорение частиц на свободной границе при этом отлично от нуля. Исследуем влияние ненулевого ускорения на динамику капли, сравнивая ее со случаем нулевого ускорения, описываемого редукцией (4).

Найдем точное решение для течения, удовлетворяющего на свободной границе условиям (4), которые обеспечивают баллистическое (с постоянной скоростью) движение частиц жидкости. Пусть, как и ранее, в начальный момент времени жидкость занимает единичный круг с центром в начале координат, т. е. начальное конформное отображение имеет вид $Z(\zeta, 0) = \zeta$. Начальную комплексную скорость выберем также соответствующей течению с диполем в начале координат: $U(\zeta, 0) = \mu_0/(2\pi\zeta^2)$. В силу второго уравнения системы (4) комплексная скорость сохраняет свой начальный вид:

$$U(\zeta, t) = \frac{\mu_0}{2\pi\zeta^2}. \quad (23)$$

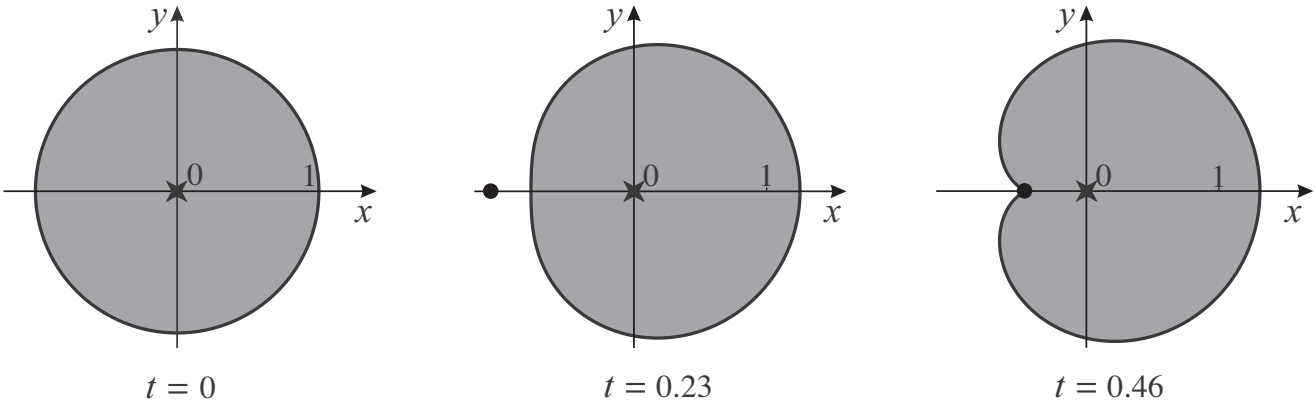


Рис. 1. Эволюция капли жидкости с ненулевым ускорением на свободной границе

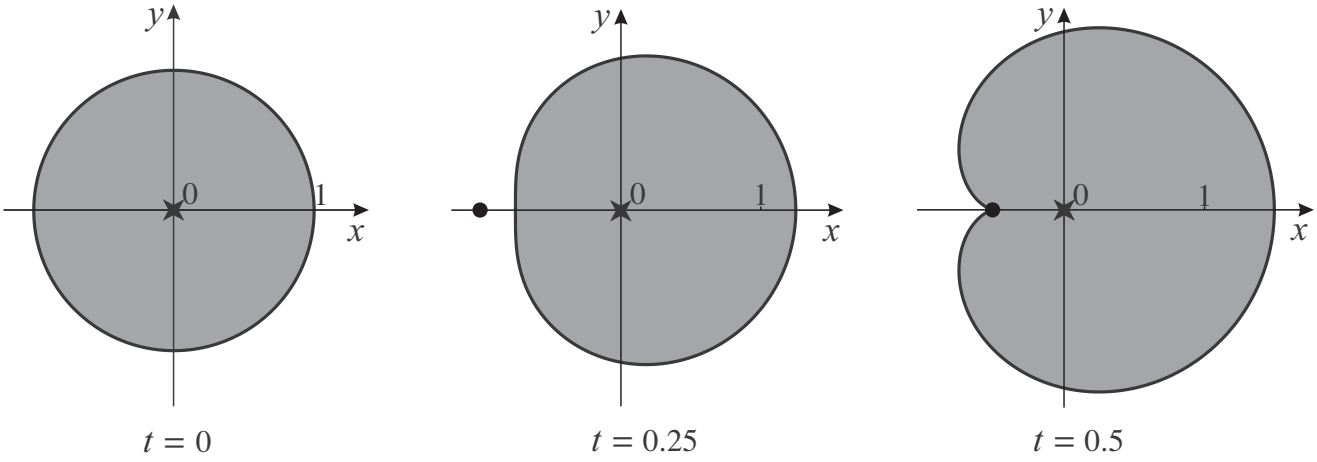


Рис. 2. Эволюция капли жидкости с нулевым ускорением на свободной границе

Первое уравнение (4) тогда запишется как

$$Z_t = \frac{\mu_0}{2\pi}\zeta^2, \tag{24}$$

где учтено, что на свободной границе $\overline{\zeta} = 1/\zeta$. Интегрируя (24) с учетом начального условия, находим закон изменения конформного отображения:

$$Z(\zeta, t) = \zeta + \frac{\mu_0}{2\pi}\zeta^2 t. \tag{25}$$

В силу принципа аналитического продолжения формулы (23) и (25) описывают течение жидкости всюду в области аналитичности комплексной скорости и конформного отображения. Из условия $Z_\zeta = 0$ и формулы (25) легко находим закон движения особой точки во вспомогательной плоскости: $\zeta^* = -\pi/(\mu_0 t)$. Если $\mu_0 > 0$ (в построенном выше решении $\mu_0 = 2\pi$), то сингулярность в плоскости ζ движется по действительной оси от минус бесконечности к началу координат, и решение будет существовать до момента выхода этой сингулярности на свободную границу, т. е. до $t^* = \pi/\mu_0 = 1/2$. Напомним, что решение с ненулевым ускорением на свободной границе разрушается при $t^* \approx 0.46$. Таким образом, при одинаковых начальных условиях учет ненулевого ускорения на свободной границе приводит к сокращению времени существования решения.

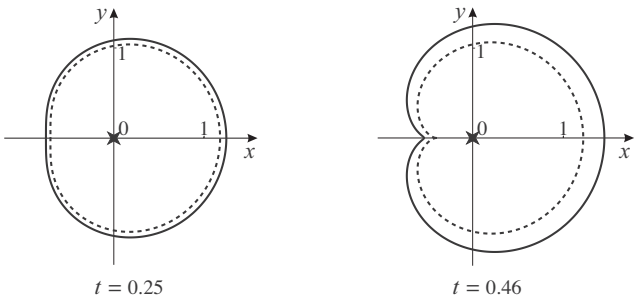


Рис. 3. Сравнение геометрии границ области течения для решений с нулевым и ненулевым ускорением на свободной поверхности (сплошные и штриховые линии соответственно)

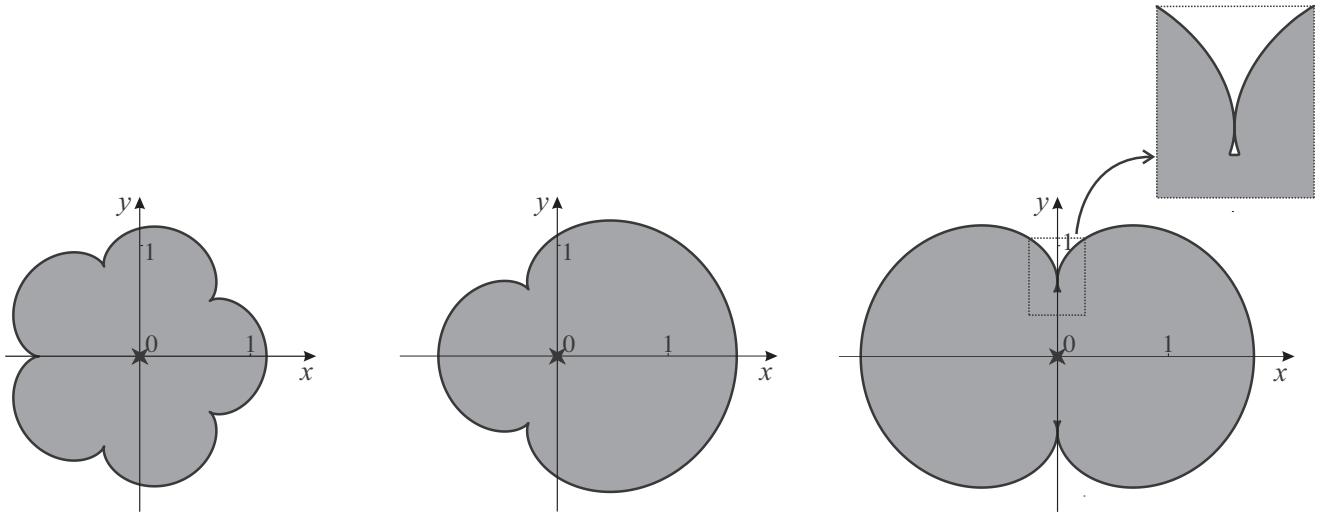


Рис. 4. Профили свободной границы в моменты разрушения решений при различных начальных распределениях скорости

Рассмотрим теперь сингулярность, расположенную в начале координат. В силу (23) и (25) в окрестности начала координат имеет место представление

$$U = \frac{\mu_0}{2\pi Z^2} + \frac{\mu_0^2 t}{2\pi^2 Z} - \frac{\mu_0^3 t^2}{8\pi^3} + \mathcal{O}(Z). \tag{26}$$

Таким образом, в начальный момент времени построенное решение описывает течение жидкости, содержащей диполь с моментом μ_0. Однако с течением времени характер сингулярности меняется: возникает слагаемое $\mathcal{O}(Z^{-1})$, которое описывает течение, имеющее источник в начале координат. Это приводит к увеличению площади (объема) области течения со временем.

На рис. 2 представлена эволюция капли с нулевым ускорением на свободной границе при тех же начальных условиях, что и для течения на рис. 1. Область, занятая жидкостью, закрашена. Виртуальная подвижная сингулярность, расположенная вне области течения, отмечена точкой. Решение разрушается в момент выхода этой сингулярности на свободную границу при $t^* = 1/2$. В начале координат звездочкой отмечена неподвижная сингулярность, которой можно придать физический смысл суперпозиции диполя и источника.

На рис. 3 приведено сравнение геометрии области течения для построенных решений. В начальный момент времени свободной границей является единичная окружность с центром в начале координат. Качественно эволюция формы капли для решений с нулевым ускорением на свободной границе (сплошная линия) и с ненулевым ускорением (штриховая линия) близка. Однако имеются существенные количественные различия — увеличение площади капли и времени существования решения при нулевом ускорении.

5. ТЕЧЕНИЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМ МУЛЬТИПОЛЕМ

В рамках уравнений (6) можно строить более сложные течения с ненулевым ускорением частиц на свободной границе, чем рассмотренные выше. Исследуем частный случай $\lambda = 0$ и $f = 1$, в котором вытекающее из (6) уравнение (7) для эволюции конформного отображения легко интегрируется методом разделения переменных. Общее решение имеет вид

$$Z(\zeta, t) = \sum_j \zeta^j \left(a_j e^{\sqrt{j}t} + b_j e^{-\sqrt{j}t} \right), \tag{27}$$

$$U(\zeta, t) = \overline{Z}_t(1/\zeta, t) = \sum_j \frac{\sqrt{j}}{\zeta^j} \left(\overline{a}_j e^{\sqrt{j}t} - \overline{b}_j e^{-\sqrt{j}t} \right), \tag{28}$$

где постоянные a_j и b_j определяются из начальных условий.

Для решений (27) и (28) характерны конечное время существования и ограниченность области течения. Некоторые примеры течений, описываемых выражениями (27) и (28), представлены на рис. 4. Для них в начальный момент времени капля представляла собой круг единичного радиуса,

т. е. $Z(\zeta,0)=\zeta$, а течение жидкости индуцировалось гидродинамическими мультиполями различного порядка, расположенными в начале координат.

Форма области течения на рис. 4 *а* получена при начальной комплексной скорости $U(z,0)=1/z^6$. При этом во внешней области образуются пять виртуальных особых точек, которые постепенно приближаются к свободной границе, определяя ее геометрию. В момент выхода сингулярностей на свободную границу на ней возникают пять точек заострения.

На рис. 4 *б* представлено решение, которое также разрушается за конечное время благодаря выходу особых точек на свободную границу. При этом в начальный момент времени комплексная скорость имеет вид $U(z,0)=4\sqrt{2}/z^2+4\sqrt{3}/z^3$.

Случай, представленный на рис. 4 *в*, интересен тем, что здесь решение разрушается за счет самопересечения границы с образованием пузырей (см. также [7, 23]). Четыре виртуальные сингулярности, которые имеются в этом случае, в момент разрушения все еще находятся вне области течения. Решение получено при $U(z,0)=8\sqrt{3}/z^3+2\sqrt{5}/z^5$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен алгоритм построения точных решений, описывающих нестационарную динамику плоской капли идеальной несжимаемой жидкости, индуцированную гидродинамическим мультиполем, расположенным внутри области течения. Функциональный произвол в записи граничных условий позволяет конструировать решения, сохраняющие площадь (объем) капли в процессе всей ее эволюции.

На основе разработанного подхода аналитически исследована задача о капле с центральным диполем. Показано, что соответствующие уравнения движения могут быть проинтегрированы в квадратурах. Характерной особенностью найденного решения является ограниченное время его существования. Оно разрушается за конечное время за счет выхода виртуальной особой точки (особенности поля скоростей вне области течения) на свободную границу с образованием на ней точки заострения — каспа.

Ранее в работе [14] рассматривалась родственная задача об эволюции двумерной капли, индуцированной стоком. Принципиальное физическое отличие построенных в настоящей работе решений от полученных в [14] заключается в том, что было снято ограничение нулевого ускорения частиц жидкости на свободной границе. В найденных решениях частицы жидкости движутся с ускорением согласно системе уравнений (6), лежащей в основе предлагаемого подхода. В частном случае, когда для входящих в уравнения (6) функций принимается $\lambda\equiv 0$ и $f\equiv 0$, эта система сводится к более простой (4), рассмотренной в [14] (см. также работы [6–8], где изучались течения с нулевым ускорением на свободной границе в неограниченной геометрии). Применительно к рассматриваемой задаче о капле с диполем подход, основанный на предположении о нулевом ускорении, приводит к решениям, в которых в окрестности начала координат со временем неизбежно генерируется эффективный гидродинамический источник, вызывающий монотонный рост площади капли. Предложенное в настоящей работе решение сохраняет тип особенности (чистый диполь) и площадь капли неизменными.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственных заданий Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, Института электрофизики Уральского отделения РАН и Физического института им. П. Н. Лебедева РАН.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. L. Dirichlet, J. Reine Angew. Math. **58**, 181 (1861); DOI: 10.1515/crll.1861.58.181.

2. L. V. Ovsyannikov, *The Problem of Unsteady Fluid Motion with a Free Boundary*, Nauka, Novosibirsk (1967), p. 3 [Л. В. Овсянников, в сб. *Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей*, Наука, Новосибирск (1967), с. 3].

3. F. John, Commun. Pure Appl. Math. **6**, 497 (1953); DOI: 10.1002/cpa.3160060405.

4. M. S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **55**, 529 (1972); DOI: 10.1017/S0022112072001995.

5. M. S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech. **127**, 103 (1983); DOI: 10.1017/S0022112083002645.

6. E. A. Karabut and E. N. Zhuravleva, J. Fluid Mech. **754**, 308 (2014); DOI: 10.1017/jfm.2014.401.

7. N. M. Zubarev and E. A. Karabut, JETP Lett. **107**, 412 (2018); DOI: 10.7868/S0370274X18070056

[Н. М. Зубарев, Е. А. Карабут, Письма в ЖЭТФ **107**, 434 (2018)].

8. E. A. Karabut, E. N. Zhuravleva, and N. M. Zubarev, J. Fluid Mech. **890**, A13 (2020); DOI: 10.1017/jfm.2020.119.

9. V. E. Zakharov, Theor. Math. Phys. **202**, 285 (2020); DOI: 10.1134/S0040577920030010 [В. Е. Захаров, ТМФ **202**, 327 (2020)].

10. J.-G. Liu and R. L. Pego, Chin. Ann. Math. Ser. B **40**, 925 (2019); DOI: 10.1007/s11401-019-0167-z.

11. P. Ya. Polubarinova-Kochina, Doklady AN SSSR **47**, 254 (1945) [in Russian] [П. Я. Полубаринова-Кочина, ДАН СССР **47**, 254 (1945)].

12. L. A. Galin, Doklady AN SSSR **47**, 250 (1945) [in Russian] [Л. А. Галин, ДАН СССР **47**, 250 (1945)].

13. V. M. Entov and P. I. Etingof, Q. J. Mech. Appl. Math. **44**, 507 (1991); DOI: 10.1093/qjmam/44.4.507.

14. E. A. Karabut and E. N. Zhuravleva, J. Fluid Mech. **980**, A23 (2024); DOI: 10.1017/jfm.2024.38.

15. L. V. Ovsyannikov, in *Dynamics of Continuous Media*, issue 15, Nauka, Novosibirsk (1973), p. 104 [in Russian] [Л. В. Овсянников, в сб. *Динамика сплошной среды*, вып. 15, Наука, Новосибирск (1973), с. 104].

16. S. Tanveer, Proc. R. Soc. Lond. A **435**, 137 (1991); DOI: 10.1098/rspa.1991.0134.

17. S. Tanveer, Proc. R. Soc. Lond. A **441**, 501 (1993); DOI: 10.1098/rspa.1993.0076.

18. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **221**, 73 (1996); DOI: 10.1016/0375-9601(96)00417-3.

19. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, Eur. J. Mech. B/Fluids **21**, 283 (2002); DOI: 10.1016/S0997-7546(02)01189-5.

20. E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **182**, 387 (1993); DOI: 10.1016/0375-9601(93)90413-T.

21. N. M. Zubarev and E. A. Kuznetsov, J. Exp. Theor. Phys. **119**, 169 (2014); DOI: 10.7868/S0044451014070207 [Н. М. Зубарев, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **146**, 194 (2014)].

22. N. M. Zubarev, J. Exp. Theor. Phys. **94**, 534 (2002) [Н. М. Зубарев, ЖЭТФ **121**, 624 (2002)].

23. E. N. Zhuravleva, N. M. Zubarev, O. V. Zubareva, and E. A. Karabut, JETP Lett. **110**, 452 (2019); DOI: 10.1134/S0370274X19190032 [Е. Н. Журавлева, Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, Е. А. Карабут, Письма в ЖЭТФ **110**, 443 (2019)].

A Family of Exact Solutions for Unsteady Multipole Flows of a Planar Drop of an Ideal Fluid

E. N. Zhuravleva [a], ***N. M. Zubarev*** [b,c*], ***E. A. Karabut*** [a]

[a] Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
630090, Novosibirsk, Russia

[b] Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
620016, Yekaterinburg, Russia

[c] Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences
119991, Moscow, Russia

*E-mail: nick@iep.uran.ru

Received September 29, 2026
Revised September 29, 2026
Accepted October 16, 2026

Abstract

Using the conformal mapping method, a wide family of exact solutions is constructed that describe the unsteady dynamics of a planar drop of an ideal incompressible fluid with a free boundary. Capillary effects and the influence of external fields are neglected. The motion of the drop boundary is induced by an internal hydrodynamic multipole. The evolution of the drop with a central dipole, for which the equations of motion are integrated in quadratures, is studied in detail. It is shown that the solution exists only for a finite time and breaks down with the formation of a cusp on the free surface.

Keywords: ideal fluid, free boundary, exact solutions, conformal mappings, hydrodynamic multipole, cusp

Funding. This work was carried out within the State Assignments of the Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of RAS, the Institute of Electrophysics, Ural Branch of RAS, and the Lebedev Physical Institute of RAS.

Conflict of interest. The authors declare that they have no conflict of interest.

Authors' contributions. The contributions of the authors are equal.