ЖЭТФ/JETP, 2026, том 170, вып. 6 (12), стр. 640–656 © 2026

РЕЖИМЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ МАГНИТНОЙ РЕЕНТЕРАБЕЛЬНОСТИ В МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕКОРИРОВАННОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

А. В. Зарубин [*]***, Ф. А. Кассан-Оглы***

Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук
620108, Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 25 августа 2026 г.,
после переработки 2 октября 2026 г.
Принята к публикации 2 октября 2026 г.

На основе точного решения модели Изинга на декорированной квадратной решетке с произвольным числом декорирующих спинов установлен режим параметров модели, при котором возникает явление магнитной реентерабельности (возвратного магнетизма). Последовательно рассмотрены все возможные режимы возникновения данного явления, а его характерные особенности проиллюстрированы на наиболее репрезентативных примерах. Показано, что в рассматриваемой спиновой системе возможно существование лишь одного, трех или пяти магнитных фазовых переходов.

Ключевые слова: декорированная квадратная решетка, модель Изинга, точное решение, магнитная реентерабельность

DOI: 10.31857/S0044451026120111

1. ВВЕДЕНИЕ

В контексте современных исследований магнитная реентерабельность, или возвратный магнетизм, представляет собой явление, при котором в процессе однонаправленного изменения температуры наблюдается последовательность фазовых превращений между магнитоупорядоченным и парамагнитным состояниями. Этот сложный термодинамический и магнитный феномен на протяжении многих лет вызывает устойчивый научный интерес [1–3]. Экспериментально возвратный магнетизм зафиксирован в различных магнитных системах, включая спиновые стекла [2,4], магнитные жидкости [5], аморфные магнетики [6, 7], магнитные полупроводники [8], перовскиты [9, 10], пирохлоры [11, 12], сплавы Гейслера [13], сверхпроводники [14–17] и интерметаллические соединения [18]. Глубокое исследование и точное моделирование данного эффекта имеют ключевое значение для понимания природы множественных фазовых переходов в сложных магнитных средах, а также открывают возможности для разработки новых магнитных материалов с уникальными свойствами.

Для всестороннего описания широкого круга магнитных материалов, разнообразно демонстрирующих множественные магнитные фазовые переходы, необходимо применение теоретических методов, основанных на анализе точных или приближенных решений для большого набора моделей и решеточных конфигураций. Модель Изинга благодаря своей простоте и аналитической разрешимости для ряда решеток остается ключевым инструментом исследования подобных явлений. Наиболее значимые и яркие результаты были получены именно в рамках этой модели — как на недекорированных [19–29], так и на декорированных решетках [30–40]. Следует отметить, что декорирование решетки (внедрение дополнительных спинов между исходными узлами) позволяет моделировать сложные магнитные конфигурации и изучать влияние геометрических факторов на фазовые переходы. В частности, на декорированных квадратных решетках были выявлены множественные магнитные фазовые переходы [30–33, 36–39]; однако точное аналитическое решение и детальное описание этого явления для

[*] E-mail: Alexander.Zarubin@imp.uran.ru

произвольной степени декорирования решетки ранее отсутствовали.

Настоящая работа посвящена исследованию явления магнитной реентерабельности в рамках классической модели Изинга на декорированной квадратной решетке с произвольным числом декорирующих спинов в элементарной ячейке. В работе обсуждается исчерпывающая совокупность режимов, обеспечивающих возникновение множественных магнитных фазовых переходов. На основе точного решения модели проведен детальный анализ термодинамических и магнитных функций модели, который демонстрирует принципиальную возможность описания магнитной реентерабельности на рассматриваемой решетке. Установлено, что подобное поведение обусловлено конкуренцией обменных взаимодействий между узловыми и декорирующими спинами, а также их соотношениями.

2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МОДЕЛИ

Точное решение модели Изинга на декорированной квадратной решетке с произвольным числом декорирующих спинов было представлено в наших работах [41, 42]. Данное решение основано на решении Онзагера [43–45] для классической модели Изинга [46] на квадратной решетке и концепции декорирующе-итерационного преобразования, предложенной Сиози в работе [47]. Мы получили аналитическое выражение для главного (единственного максимального вещественного, согласно теореме Фробениуса – Перрона) собственного значения (λ) трансфер-матрицы Крамерса – Ваннье [48–50] для изучаемой спиновой системы, которое можно записать в форме

$$\ln\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{8\pi^2(1+d_x+d_y)}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}L(\phi_x,\phi_y)\,d\phi_x\,d\phi_y, \quad (1)$$

где

$$L(\phi_x,\phi_y)=\ln(C_xC_y-S_xD_y\cos\phi_x-D_xS_y\cos\phi_y), \quad (2)$$

$$\begin{gathered}C_i=\frac{(e^{J_i/T}u_i)^2+(e^{-J_i/T}v_i)^2}{2},\\ S_i=\frac{(e^{J_i/T}u_i)^2-(e^{-J_i/T}v_i)^2}{2},\\ D_i=u_iv_i,\quad i=\{x,\ y\},\\ u_i=\mathrm{ch}^{d_i+1}\left(J_{di}/T\right)+\mathrm{sh}^{d_i+1}\left(J_{di}/T\right),\\ v_i=\mathrm{ch}^{d_i+1}\left(J_{di}/T\right)-\mathrm{sh}^{d_i+1}\left(J_{di}/T\right),\end{gathered} \quad (3)$$

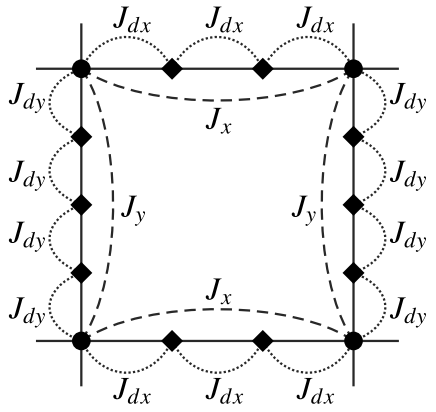


Рис. 1. Пример декорированной квадратной решетки, дважды декорированной по оси x ($d_x=2$) и трижды декорированной по оси y ($d_y=3$). Кружки — узловые спины, ромбы — декорирующие спины. Штриховыми линиями указаны прямые обменные взаимодействия (J_x, J_y), пунктирными линиями — декорирующие обменные взаимодействия (J_{dx}, J_{dy}), а сплошными прямыми линиями показана пространственная сетка, на которой расположены атомные спины рассматриваемой решетки

здесь J_x и J_y означают обменные взаимодействия между атомными спинами на узлах ближайших соседей решетки (прямое обменное взаимодействие) в направлениях x и y; J_{dx} и J_{dy} означают обменные взаимодействия как между соседними декорирующими спинами, так и между соседними декорирующими и узловыми спинами (декорирующее обменное взаимодействие) в направлениях x и y; d_x и d_y — параметры кратности (или степени) декорирования, которые определяют количество дополнительных (декорирующих) спинов между узловыми спинами в направлениях x и y решетки; T — абсолютная температура. Пример такой декорированной квадратной решетки приведен на рис. 1.

Обратим внимание, что в представленных ниже вычислениях постоянная Больцмана выбирается равной единице, а также для сохранения единого масштаба температура и параметры обменных взаимодействий измеряются в абсолютных единицах прямого обменного взаимодействия по направлению x.

Зная главное собственное значение матрицы переноса Крамерса – Ваннье (1), можно вычислить термодинамические функции системы, включая удельную энтропию

$$S=\ln\lambda+\frac{T}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial T} \quad (4)$$

и магнитную удельную теплоемкость

$$C = 2\frac{T}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial T} + \frac{T^2}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial T^2} - \frac{T^2}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)^2. \qquad (5)$$

В свою очередь спонтанная намагниченность в изинговских магнетиках определяется [51–53] как квадратный корень из парной спин-спиновой корреляционной функции при удалении спинов на бесконечность:

$$M = \sqrt{\lim_{\Delta\to\infty}\langle\sigma_{1,1}\sigma_{1,1+\Delta}\rangle}.$$

Точное аналитическое выражение для спонтанной намагниченности в модели Изинга на недекорированной квадратной решетке впервые было представлено Онзагером [53] в виде

$$M = \left(1-k^2\right)^{1/8}, \quad k = \left(\operatorname{sh}\frac{2J_x}{T}\operatorname{sh}\frac{2J_y}{T}\right)^{-1}. \qquad (6)$$

Из обобщения известного выражения Онзагера (6) для недекорированной решетки и применения концепции декорирующе-итерационного преобразования с использованием функций (2) мы получили [42] аналитическое выражение для спонтанной намагниченности модели Изинга на декорированной квадратной решетке с произвольным числом декорирующих спинов в виде

$$M = \left(1-k^2\right)^{1/8}, \quad k = \left(\frac{S_xS_y}{D_xD_y}\right)^{-1}. \qquad (7)$$

Заметим, что в отсутствие декорирования выражение (1) упрощается и становится известным выражением Онзагера [43] для главного собственного значения трансфер-матрицы Крамерса – Ваннье, а выражение для спонтанной намагниченности (7) становится выражением (6).

3. МАГНИТНАЯ ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА

Построение магнитной фазовой диаграммы исследуемой системы опирается на точное решение (1), которое учитывает все 2^N возможных спиновых конфигураций на решетке с периодическими краевыми условиями [42, 43] (где N — полное число спинов в решетке). Также вычисление термодинамических и магнитных функций системы представляет собой многопараметрическую задачу, зависящую от двух параметров прямого обменного взаимодействия (J_x и J_y), двух параметров декорирующего обменного взаимодействия (J_{dx} и J_{dy}) и двух параметров кратности декорирования (d_x и d_y). Параметры обменного взаимодействия могут принимать произвольные непрерывные значения, а также иметь как положительные, так и отрицательные знаки. При этом положительные значения обменного взаимодействия ($J > 0$) задают ферромагнитный тип взаимодействия между спинами, а отрицательные ($J < 0$) — антиферромагнитный тип. В свою очередь, переменные кратности декорирования представляют собой дискретные величины и принадлежат бесконечному множеству натуральных чисел ($d_i \in \mathbb{N}_0,\ i = x,\ y$).

В контексте теории фазовых переходов хорошо известно, что обнаруженная Онзагером [43] при анализе двумерной модели Изинга логарифмическая расходимость (сингулярность типа лямбда-пика), наблюдаемая на температурной зависимости теплоемкости при критических температурах, напрямую связана с расходимостью интегрируемого логарифма (2) в четырех ключевых точках области интегрирования:

$$\{(0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)\}.$$

Функция (2) в указанных точках выглядит следующим образом:

$$L(0,0) = \ln(C_xC_y - S_xD_y - D_xS_y), \qquad (8a)$$

$$L(0,\pi) = \ln(C_xC_y - S_xD_y + D_xS_y), \qquad (8b)$$

$$L(\pi,0) = \ln(C_xC_y + S_xD_y - D_xS_y), \qquad (8c)$$

$$L(\pi,\pi) = \ln(C_xC_y + S_xD_y + D_xS_y). \qquad (8d)$$

Используя эти выражения, можно получить уравнения для границ магнитных фаз на магнитной фазовой диаграмме спиновой системы. В частности, уравнение для определения фазовых границ области, которая определяется из функции (8a), есть уравнение

$$\frac{T}{2}\ln\left(-\frac{\operatorname{sh}\frac{J_y}{T}\operatorname{sh}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T} + \operatorname{ch}\frac{J_y}{T}\operatorname{ch}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}}{\operatorname{sh}\frac{J_y}{T}\operatorname{ch}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T} + \operatorname{ch}\frac{J_y}{T}\operatorname{sh}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\operatorname{sh}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T} - \operatorname{ch}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}}{\operatorname{sh}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T} + \operatorname{ch}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}}\right) = J_x, \qquad (9a)$$

из функции (8b) —

$$\frac{T}{2}\ln\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{J_y}{T}\operatorname{sh}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T} + \operatorname{ch}\frac{J_y}{T}\operatorname{ch}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}}{\operatorname{sh}\frac{J_y}{T}\operatorname{ch}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T} + \operatorname{ch}\frac{J_y}{T}\operatorname{sh}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\operatorname{sh}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T} - \operatorname{ch}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}}{\operatorname{sh}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T} + \operatorname{ch}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}}\right) = J_x, \qquad (9b)$$

из функции (8c) —

$$\frac{T}{2}\ln\left(-\frac{\operatorname{sh}\frac{J_y}{T}\operatorname{ch}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}+\operatorname{ch}\frac{J_y}{T}\operatorname{sh}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}}{\operatorname{sh}\frac{J_y}{T}\operatorname{sh}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}+\operatorname{ch}\frac{J_y}{T}\operatorname{ch}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\operatorname{sh}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}-\operatorname{ch}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}}{\operatorname{sh}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}+\operatorname{ch}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}}\right)=J_x, \quad (9c)$$

из функции (8d) —

$$\frac{T}{2}\ln\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{J_y}{T}\operatorname{ch}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}+\operatorname{ch}\frac{J_y}{T}\operatorname{sh}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}}{\operatorname{sh}\frac{J_y}{T}\operatorname{sh}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}+\operatorname{ch}\frac{J_y}{T}\operatorname{ch}^{d_y+1}\frac{J_{dy}}{T}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\operatorname{sh}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}-\operatorname{ch}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}}{\operatorname{sh}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}+\operatorname{ch}^{d_x+1}\frac{J_{dx}}{T}}\right)=J_x. \quad (9d)$$

Отсюда можно определить все области магнитного упорядочения спиновой системы при наперед заданных параметрах модели.

Особенности температурных зависимостей функций (8) позволяют установить количество и значения температур магнитных фазовых переходов (см. работу [54]). Важно заметить, что уравнения (9) позволяют не только установить границы фаз на магнитной диаграмме, но и определить тип магнитного упорядочения системы в заданных интервалах параметров модели при низких температурах. В частности, анализ поведения функции (8a) в точке интегрирования $(\phi_x, \phi_y) = (0, 0)$ показывает поведение магнитных фаз при ферромагнитном типе упорядочения системы по обоим направлениям x и y. Функция (8d) в точке $(\phi_x, \phi_y) = (\pi, \pi)$ проявляет поведение системы при антиферромагнитном типе упорядочения системы также по обоим направлениям x и y. Функция (8b) в точке $(\phi_x, \phi_y) = (0, \pi)$ показывает состояние системы при ферромагнитном типе упорядочения по направлению x и при антиферромагнитном типе упорядочения по направлению y. Функция (8c) в точке $(\phi_x, \phi_y) = (\pi, 0)$ показывает состояние системы при антиферромагнитном типе упорядочения по направлению x и при ферромагнитном типе упорядочения по направлению y.

Понятно, что при низких температурах вдоль направлений x и y в данной системе могут устанавливаться как ферромагнитные, так и антиферромагнитные типы магнитного упорядочения. Комбинации этих упорядочений порождают сложную картину магнетизма в рассматриваемой декорированной спиновой системе. С учетом геометрии решетки, т. е. существования двух направлений x и y, можно выделить четыре возможных типа упорядочений: ферромагнитно-ферромагнитный, ферромагнитно-антиферромагнитный, антиферромагнитно-ферромагнитный и антиферромагнитно-антиферромагнитный. Также следует упомянуть область, где магнитные упорядочения разрушаются, — парамагнитную фазу (P).

Однако по мере повышения температуры задача поиска конкретных спиновых конфигураций, определяющих магнитное поведение системы, превращается в сложную, самостоятельную задачу, требующую поиска конфигураций с наибольшими статистическими весами. Следует учитывать, что при возрастании температуры основной вклад в магнитное поведение системы могут вносить достаточно запутанные комбинации спиновых последовательностей.

Сложная комбинация спиновых упорядочений вдоль разных направлений решетки может привести к возникновению частично разупорядоченных фаз, а также к появлению адаптированных фаз, когда часть решетки сохраняет локальный порядок, а часть — нет. Таким образом, возникает фазовая мультимода — ситуация, при которой в системе одновременно сосуществуют несколько устойчивых локальных конфигураций (фаз), каждая из которых обладает собственной характерной структурой порядка (модой). Такое нарушение симметрии системы порождает не единую моду, а спектр дополняющих или конкурирующих упорядочений. Подобные сочетания сложных упорядочений могут приводить к последовательности фазовых переходов, где разные виды порядка исчезают при различных температурах. Отметим, что подробный конфигурационный анализ в настоящей работе не проводился, однако полученные уравнения (9) позволяют построить полную магнитную фазовую диаграмму исследуемой системы.

Опираясь на результаты наших предыдущих исследований [54–56], в которых была установлена и подтверждена возможность описания множественных магнитных фазовых переходов в рассматриваемой спиновой системе, в настоящей работе мы систематизируем ключевые закономерности, определяющие данное явление. В частности, в работе [55] продемонстрировано влияние степени декорирования на формирование указанных переходов, при этом показано, что вариация данного параметра приводит к качественному и количественному изменению топологии магнитной фазовой диаграммы. В публикации [56] выявлены и охарактеризованы основные сценарии возникновения магнитной реентерабельности при варьировании параметров обменного

взаимодействия, что позволило установить критические условия ее реализации. В работе [54] детально описаны условия формирования магнитной реентерабельности на декорированной квадратной решетке в зависимости от параметров модели, включая соотношения между интенсивностями обменных связей и кратностями декорирования. Совокупность полученных результатов создает основу для дальнейшего анализа сложного магнитного поведения в рассматриваемой спиновой системе.

В настоящей работе рассмотрен вопрос, не охваченный в наших предыдущих исследованиях, а именно возникновение магнитной реентерабельности на различных стадиях формирования декорированной квадратной решетки в условиях конкурирующих обменных взаимодействий. Всего выделено четыре качественно различных режима формирования магнитного поведения декорированной спиновой системы, реализующихся при таких соотношениях параметров модели, которые приводят к появлению магнитной реентерабельности.

Также следует особо подчеркнуть, что исчерпывающий анализ всей совокупности модельных параметров в пределах одной публикации представляется принципиально неосуществимым; в связи с этим мы ограничиваемся рассмотрением одной связной последовательности параметров, позволяющей проследить эволюцию магнитных состояний и выявить критические точки, соответствующие условиям возникновения реентерабельного поведения в модели Изинга на декорированной квадратной решетке.

4. РЕЖИМ 1. КОНКУРИРУЮЩИЕ ОБМЕННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПОЛУДЕКОРИРОВАННОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

Сначала рассмотрим первый режим — случай полудекорированной квадратной решетки. При этом спиновая система декорирована только вдоль одного из направлений решетки,

$$|J_i| > 0, \quad d_i > 0, \quad |J_{di}| > 0, \tag{10a}$$

а вдоль другого направления эта система не декорирована,

$$|J_j| > 0, \quad d_j = 0, \quad J_{dj} = 0, \tag{10b}$$

где $\{i, j\} = \{x, y\}$. Пример такой решетки представлен на рис. 2.

При данном наборе параметров модели явление магнитной реентерабельности возникает только

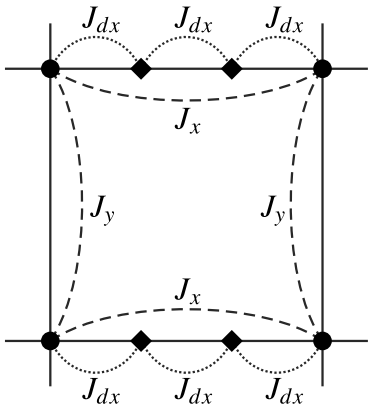


Рис. 2. Пример полудекорированной квадратной решетки, дважды декорированной по оси x ($d_x = 2$), а по оси y декорирование отсутствует ($d_y = 0$). (Условные обозначения на рисунке аналогичны обозначениям на рис. 1)

в области параметров, при которых возможно существование конкурирующих обменных взаимодействий. (Подробное рассмотрение случаев возникновения конкуренции обменных взаимодействий между спинами проведено в работах [54–56].) Конкуренция обменных взаимодействий в системе возникает вдоль одного из направлений i (10a), вдоль которого действуют как прямые, так и декорирующие обменные взаимодействия. Другое направление j (10b) не декорировано, и конкуренции обменных взаимодействий нет.

Следует обратить внимание, что в рассматриваемой спиновой системе условие существования конкурирующих обменных взаимодействий вдоль одного из направлений решетки может возникнуть для нечетных значений кратности декорирования при антиферромагнитном прямом обменном взаимодействии и произвольном декорирующем обменном взаимодействии,

$$J_i < 0, \quad |J_{di}| > 0, \quad d_i = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{11a}$$

т. е. в двух случаях: 1) антиферромагнитное прямое обменное взаимодействие и ферромагнитное декорирующее обменное взаимодействие вдоль оси решетки; 2) антиферромагнитное прямое обменное взаимодействие и антиферромагнитное декорирующее обменное взаимодействие вдоль оси решетки.

С другой стороны, конкуренция обменных взаимодействий вдоль одного направления решетки может возникнуть для четных значений кратности декорирования при антиферромагнитном прямом и ферромагнитном декорирующих обменных взаимодействиях (или наоборот),

$$J_i J_{di} < 0, \quad d_i = 2k, \quad k \in \mathbb{N}_1. \tag{11b}$$

Таким образом, это может возникнуть в двух случаях: 1) антиферромагнитное прямое обменное взаимодействие и ферромагнитное декорирующее обменное взаимодействие вдоль оси решетки; 2) ферромагнитное прямое обменное взаимодействие и антиферромагнитное декорирующее обменное взаимодействие вдоль оси решетки. Во всех остальных случаях конкуренция обменных взаимодействий в системе не возникает.

Обратим внимание, что при переборе различных вариантов знаков обменных взаимодействий в данном случае (10) существуют всего четыре варианта интервалов параметров модели, при которых возникает конкуренция обменных взаимодействий. При нечетном параметре степени декорирования системы (11a) вдоль оси i и при различных знаках параметров прочих обменных взаимодействий (J_{di} и J_j) такая система возникает при следующих наборах обменных параметров:

$$J_i < 0, \quad J_{di} > 0, \quad J_j > 0, \quad J_{dj} = 0, \tag{12a}$$

$$J_i < 0, \quad J_{di} > 0, \quad J_j < 0, \quad J_{dj} = 0, \tag{12b}$$

$$J_i < 0, \quad J_{di} < 0, \quad J_j > 0, \quad J_{dj} = 0, \tag{12c}$$

$$J_i < 0, \quad J_{di} < 0, \quad J_j < 0, \quad J_{dj} = 0. \tag{12d}$$

В свою очередь также существуют всего четыре варианта интервалов параметров модели, при которых возникает конкуренция обменных взаимодействий при четном параметре декорирования (11b) вдоль оси i. Это возможно при следующих наборах обменных параметров:

$$J_i < 0, \quad J_{di} > 0, \quad J_j > 0, \quad J_{dj} = 0, \tag{13a}$$

$$J_i < 0, \quad J_{di} > 0, \quad J_j < 0, \quad J_{dj} = 0, \tag{13b}$$

$$J_i > 0, \quad J_{di} < 0, \quad J_j > 0, \quad J_{dj} = 0, \tag{13c}$$

$$J_i > 0, \quad J_{di} < 0, \quad J_j < 0, \quad J_{dj} = 0. \tag{13d}$$

Здесь важно заметить, что при определенных соотношениях параметров модели наличие конкурирующих обменных взаимодействий может привести спиновую систему к магнитным фрустрациям, а при других соотношениях параметров магнитные фрустрации в системе не возникают [42, 57–59].

Теперь для демонстрации явления магнитной реентерабельности рассмотрим спиновую систему на полудекорированной квадратной решетке при следующих параметрах модели:

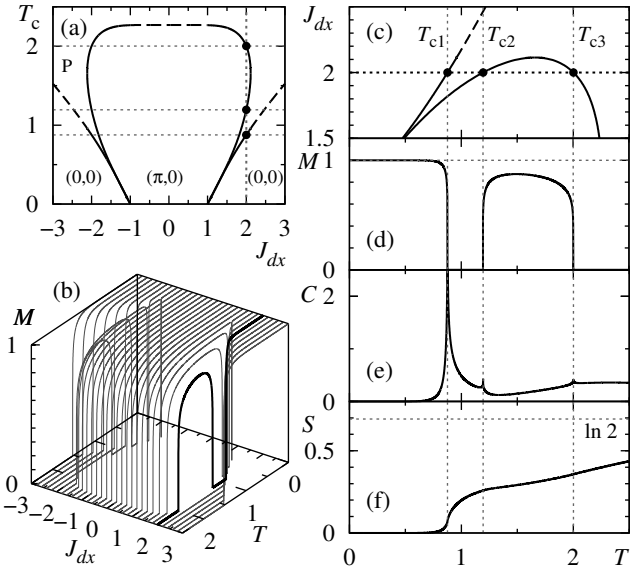


Рис. 3. Магнитная фазовая диаграмма (*a*) зависимости критической температуры T_c от декорирующего обменного взаимодействия J_{dx} полудекорированной квадратной решетки при заданных значениях параметров модели (14) и варьировании параметра J_{dx}. Вертикальная пунктирная прямая при $J_{dx} = +2$ пересекает линии магнитной фазовой диаграммы в температурных точках: $T_{c1} \approx 0.876$, $T_{c2} \approx 1.194$, $T_{c3} \approx 2.002$. Спонтанная намагниченность $M(J_{dx}, T)$ (*b*), где толстой сплошной кривой выделена функция при $J_{dx} = +2$. На правой панели показаны часть магнитной фазовой диаграммы $J_{dx}(T)$ (*c*), температурные зависимости спонтанной намагниченности M (*d*), удельной теплоемкости C (*e*) и энтропии S (*f*) при $J_{dx} = +2$. Вертикальные пунктирные прямые показывают положения критических температур T_{c1}, T_{c2} и T_{c3}. На рисунке *f* горизонтальная штриховая прямая соответствует энтропии $S^\infty = \ln 2$ при $T \to \infty$

вдоль оси x

$$J_x = -1, \quad d_x = 7, \quad J_{dx} = +2, \tag{14a}$$

вдоль оси y

$$J_y = +1, \quad d_y = 0, \quad J_{dy} = 0. \tag{14b}$$

Здесь следует обратить внимание, что параметры подобраны так, что только вдоль оси x возникает конкуренция прямых и декорирующих обменных взаимодействий, согласно условию (11a), а вдоль оси y система не декорирована.

Для набора параметров модели (14) на рис. 3 проиллюстрировано поведение термодинамических и магнитных функций рассматриваемой спиновой системы. На рис. 3 *a* представлена магнитная фазовая диаграмма (зависимости критической температуры от параметра обменного взаимодействия), на

которой показано поведение границ существования магнитоупорядоченных областей в зависимости от температуры. Граница областей существования магнитной реентерабельности отмечена сплошными линиями, а штриховой линией отмечена граница фаз, в которых магнитная реентерабельность не возникает. Также вертикальной пунктирной прямой указано значение параметра обменного взаимодействия, соответствующее набору (14), для которого вычислены температурные функции системы, представленные на правой панели рисунка.

Таким образом, как показано на рис. 3 *a*, в центре магнитной фазовой диаграммы (при параметрах обменного взаимодействия $|J_{dx}| < 2.114$ и температуре $T < 2.269$) возникает магнитная фаза, границы которой определяются из уравнения (9c). Поэтому эта область на магнитной фазовой диаграмме обозначена как $(\pi, 0)$. По краям фазовой диаграммы при низкой температуре возникает магнитоупорядоченная область, определяемая из уравнения (9a), которая обозначена как $(0, 0)$. При повышении температуры магнитное упорядочение разрушается и возникает парамагнитная фаза (P).

Как следует из магнитной фазовой диаграммы на рис. 3 *a*, явление магнитной реентерабельности здесь возникает не во всем интервале соотношений параметров модели, в котором действуют конкурирующие обменные взаимодействия (11), а только при $1 < |J_{dx}| < 2.114$, т. е. при следующем соотношении величин параметров обменного взаимодействия:

$$|J_i| < |J_{di}|. \tag{15}$$

С другой стороны, при соотношении параметров модели (14) и варьировании величины J_y фазовая диаграмма будет выглядеть по-другому, как показано на рис. 4. На этой магнитной фазовой диаграмме видны области $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, (π, π), которые определяются соответствующими уравнениями (9), а также область парамагнитной фазы (P).

Отметим, что выбранные параметры (14) представлены на магнитной фазовой диаграмме (рис. 3 *a* и рис. 4) в виде вертикальной пунктирной прямой, которая находится в области магнитной реентерабельности. В данном случае явление магнитной реентерабельности можно продемонстрировать на основе поведения термодинамических функций при конкретном значении параметров обменных взаимодействий модели.

Для демонстрации критического поведения системы на рис. 3 *b* приведена зависимость спонтанной намагниченности системы от температуры и параметра обменного взаимодействия (J_{dx}). На графике

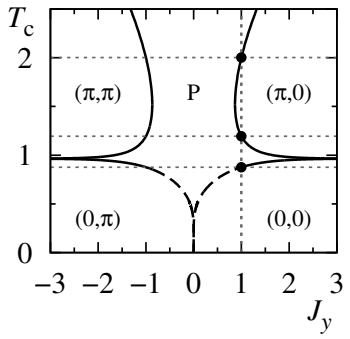


Рис. 4. Магнитная фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_c от параметра прямого обменного взаимодействия J_y, соответствующая расчетным параметрам модели (14). Вертикальная пунктирная прямая при $J_y = +1$ пересекает линии магнитной фазовой диаграммы в тех же температурных точках T_{ci}, что и на рис. 3 *a*

выделена сплошная жирная кривая, которая соответствует выбранным значениям параметров обменного взаимодействия (14). Именно для этих параметров модели на правой панели рис. 3 представлены температурные зависимости фрагмента магнитной фазовой диаграммы (*c*), спонтанной намагниченности (*d*), теплоемкости (*e*) и энтропии (*f*).

На магнитной фазовой диаграмме (рис. 3 *c*) видно, что спиновая система может испытывать до трех фазовых переходов. Такое поведение наблюдается на графике температурной зависимости спонтанной намагниченности (рис. 3 *d*). То есть при температуре T_{c1} разрушается исходное магнитоупорядоченное состояние, возникшее при низкой температуре; при температуре T_{c2} магнетизм возвращается, хотя и с другим типом упорядочения; а при T_{c3} разрушается и это магнитоупорядоченное состояние, и система окончательно становится парамагнитной. Здесь мы видим этапы формирования явления магнитной реентерабельности.

Таким образом, на рис. 3 *d* видно, что в интервале низких температур, $0 \leqslant T \leqslant T_{c1}$, формируется область с ферромагнитно-ферромагнитным упорядочением, определяемая уравнением (9a), а при температурах $T_{c2} \leqslant T \leqslant T_{c3}$ возникает область упорядочения, вычисляемая уже из уравнения (9c).

Интересно обратить внимание, что температурная зависимость теплоемкости системы (рис. 3 *e*) имеет три лямбда-образных пика (один большой низкотемпературный и два малых пика при более высоких температурах), соответствующих трем критическим температурам.

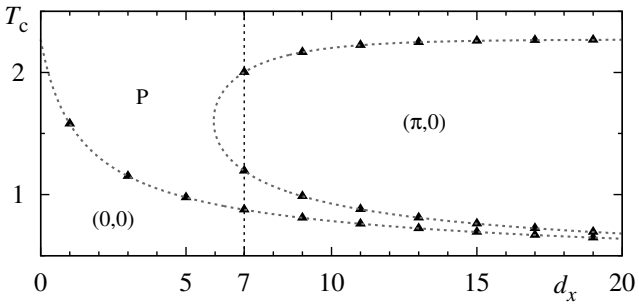


Рис. 5. Магнитная фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_c от степени декорирования d_x (при $d_y = 0$) полудекорированной квадратной решетки для параметров расчета (14). Треугольники обозначают нечетные степени декорирования по направлению x (d_x). Вертикальная пунктирная прямая показывает значения критической температуры при $d_x = 7$ и $d_y = 0$

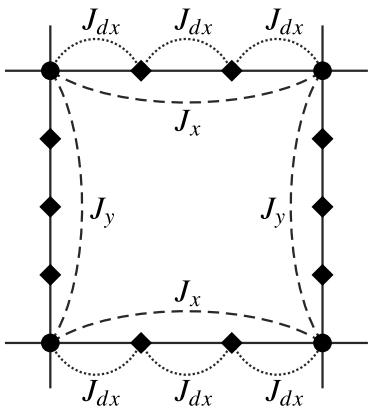


Рис. 6. Пример декорированной квадратной решетки, дважды декорированной по оси x ($d_x = 2$) и трижды декорированной по оси y ($d_y = 3$) свободными спинами ($J_{dy} = 0$). (Условные обозначения на рисунке аналогичны обозначениям на рис. 1)

В диапазоне значений, в котором возникает магнитная реентерабельность (15), в рассматриваемой спиновой системе энтропия при нулевой температуре равна нулю (см. рис. 3 *f*), что говорит о том, что при наличии условий (11) основное состояние системы не испытывает магнитного вырождения и магнитные фрустрации в системе не возникают [42]. С другой стороны, энтропия системы при $T \to \infty$ стремится к $S^\infty = \ln 2$ (где 2 — количество возможных состояний модели на узле), как указано на рис. 3 *f*.

В данном случае интересно также рассмотреть поведение критической температуры в зависимости от параметра кратности декорирования для нечетного случая, что показано на рис. 5. Здесь видно, что при соотношении параметров (14) (вертикальная пунктирная прямая при $d_x = 7$ и $d_y = 0$ на рис. 5; ср. с рис. 3 *a* и рис. 4) в системе возникают две области магнитоупорядоченных состояний, которые определяются уравнением (9a) при низких температурах, а при температурах выше — уравнением (9c), как указано на рис. 5. Обратим внимание, что из представленных расчетов следует, что исследуемая спиновая система может испытывать один или три магнитных фазовых перехода.

5. РЕЖИМ 2. КОНКУРИРУЮЩИЕ ОБМЕННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И СВОБОДНЫЕ СПИНЫ В ДЕКОРИРОВАННОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

Рассмотрим второй режим, когда спиновая система декорирована вдоль обоих направлений квадратной решетки, причем вдоль одного направления есть как прямое, так и декорирующее обменные взаимодействия между спинами,

$$|J_i| > 0, \quad d_i > 0, \quad |J_{di}| > 0, \tag{16a}$$

вдоль другого направления есть только прямое обменное взаимодействие между спинами, а декорирующее обменное взаимодействие отсутствует (свободные спины),

$$|J_j| > 0, \quad d_j > 0, \quad J_{dj} = 0, \tag{16b}$$

где $\{i, j\} = \{x, y\}$. По сравнению с предыдущим набором параметров (10), в данном случае изменился лишь один параметр d_j, теперь он больше нуля. Пример такой решетки представлен на рис. 6.

В данном случае (16) при переборе различных вариантов знаков обменных взаимодействий существуют шестнадцать случаев возникновения конкуренции обменных взаимодействий вдоль только одного направления решетки. Для примера выберем следующие параметры модели, которые отличаются от предыдущего набора (14) всего на одну величину $d_y = 10$. При этом вдоль оси x степень декорирования нечетная,

$$J_x = -1, \quad d_x = 7, \quad J_{dx} = +2, \tag{17a}$$

а вдоль оси y степень декорирования четная, но декорирующее обменное взаимодействие равно нулю,

$$J_y = +1, \quad d_y = 10, \quad J_{dy} = 0. \tag{17b}$$

Здесь параметры подобраны так, что только вдоль оси x возникает конкуренция прямых и декорирующих обменных взаимодействий, согласно условию

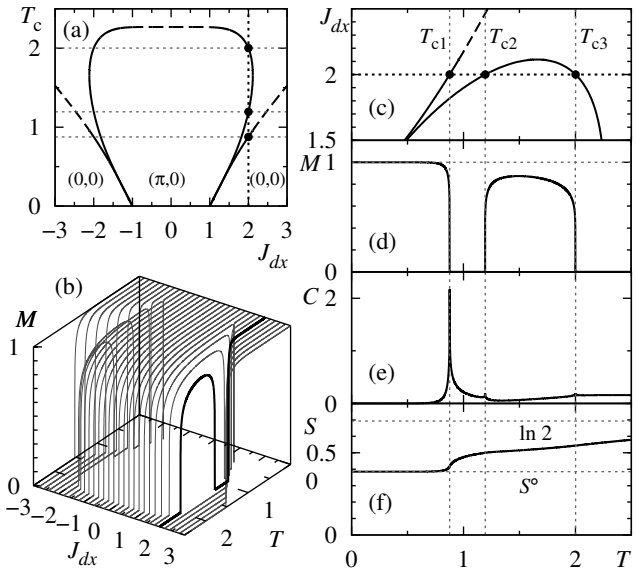


Рис. 7. Магнитная фазовая диаграмма (*a*) зависимости критической температуры T_c от декорирующего обменного взаимодействия J_{dx} декорированной квадратной решетки при заданных значениях параметров модели (17) и варьировании параметра J_{dx}. Вертикальная пунктирная прямая при $J_{dx} = +2$ пересекает линии магнитной фазовой диаграммы в температурных точках: $T_{c1} \approx 0.876$, $T_{c2} \approx 1.194$, $T_{c3} \approx 2.002$. Спонтанная намагниченность $M(J_{dx}, T)$ (*b*), где толстой сплошной кривой выделена функция при $J_{dx} = +2$. На правой панели показаны часть магнитной фазовой диаграммы $J_{dx}(T)$ (*c*), температурные зависимости спонтанной намагниченности M (*d*), удельной теплоемкости C (*e*) и энтропии S (*f*) при $J_{dx} = +2$. Вертикальные пунктирные прямые показывают положения критических температур T_{c1}, T_{c2} и T_{c3}. На рисунке *f* нижняя горизонтальная штриховая прямая соответствует остаточной энтропии $S^\circ \approx 0.385$ (18), а верхняя прямая — энтропии $S^\infty = \ln 2$ при $T \to \infty$

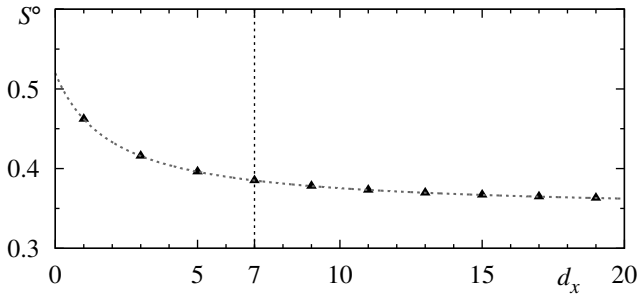


Рис. 8. Зависимость остаточной энтропии от нечетной степени декорирования спиновой системы (d_x, где $d_y = d_x + 3$). Треугольники обозначают нечетные степени декорирования по направлению x. Вертикальной пунктирной прямой отмечена остаточная энтропия, соответствующая расчетам для параметров (17), т. е. $S^\circ(d_x = 7, d_y = 10) \approx 0.385$

(11a), а вдоль оси y система имеет только свободные декорирующие спины, т. е. невзаимодействующие спины, не связанные обменным взаимодействием.

В этой ситуации критическое поведение спиновой системы не отличается от предыдущего случая, описанного в разд. 4. Это видно при сравнении магнитных фазовых диаграмм, полученных в данном и предыдущем разделах (ср. рис. 7 *a* с соответствующей диаграммой на рис. 3 *a*). Также и магнитная фазовая диаграмма зависимости критической температуры от прямого обменного взаимодействия J_y в данном случае полностью совпадает с диаграммой, представленной на рис. 4. Это говорит о том, что наличие свободных декорирующих спинов не влияет на формирование новых магнитных состояний в этой спиновой системе и критические температуры не меняются с появлением свободных декорирующих спинов.

Так же, как и в предыдущем случае, здесь с появлением свободных декорирующих спинов не изменяется температурная зависимость спонтанной намагниченности (ср. рис. 3 *d* и рис. 7 *d*), что демонстрирует возможность возникновения магнитной реентерабельности в области параметров существования конкурирующих обменных взаимодействий (11) и (15). Обратим внимание, что три критические температуры, вычисленные для параметров (14), полностью совпадают с критическими температурами для параметров (17). Таким образом, из представленных расчетов следует, что рассматриваемая спиновая система может испытывать один или три магнитных фазовых перехода, как и в предыдущем режиме.

При совпадении положения пиков на температурной зависимости теплоемкости системы с предыдущим случаем сам ход функции несколько отличается. Также видно, что при наличии свободных декорирующих спинов температурная зависимость энтропии принципиально отличается от предыдущего случая (ср. рис. 7 *f* и рис. 3 *f*). Это важное различие заключается в поведении энтропии при нулевой температуре (см. рис. 7 *f*).

В предыдущем случае (см. разд. 4) энтропия при нулевой температуре была равна нулю, а в данном случае остаточная энтропия (при нулевой температуре) больше нуля. Поведение такой остаточной энтропии определяется выражением

$$S_i = \frac{d_j \ln 2}{1 + d_i + d_j}, \tag{18}$$

где $\{i,j\} = \{x,y\}$ [42], и показано на рис. 8. Интересно, что остаточная энтропия (18) зависит только от степени декорирования системы, а не от величин и знаков параметров обменных взаимодействий.

В данном случае наличие ненулевой остаточной энтропии определяется присутствием магнитного вырождения в спиновой системе, которое возникает из-за наличия свободных декорирующих спинов. Здесь важно заметить, что свободные спины порождают магнитное вырождение, но не порождают магнитной фрустрации, поскольку появление остаточной энтропии в данном случае связано только с появлением в системе свободных спинов (не связанных между собой обменным взаимодействием).

6. РЕЖИМ 3. КОНКУРИРУЮЩИЕ И НЕКОНКУРИРУЮЩИЕ ОБМЕННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ДЕКОРИРОВАННОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

Рассмотрим третий режим, когда система декорирована вдоль обоих направлений квадратной решетки, но вдоль одного направления есть конкурирующие обменные взаимодействия,

$$|J_i| > 0, \quad d_i > 0, \quad |J_{di}| > 0, \tag{19a}$$

а вдоль второго направления конкуренции обменных взаимодействий нет,

$$|J_j| > 0, \quad d_j > 0, \quad |J_{dj}| > 0, \tag{19b}$$

где $\{i,j\} = \{x,y\}$. Таким образом, вдоль одного направления выполняется условие (11), а вдоль второго направления оно не выполняется. По сравнению с предыдущим набором параметров (16), в данном случае изменился лишь один параметр J_{dj}, теперь он не равен нулю. Пример такой решетки представлен на рис. 1.

При соотношении параметров системы (19) и при переборе различных вариантов знаков обменных взаимодействий существуют шестнадцать случаев сосуществования конкурирующих обменных взаимодействий вдоль одного из направлений и одновременно неконкурирующих обменных взаимодействий вдоль другого направления.

Для примера выберем следующие параметры модели, которые отличаются от предыдущего набора (17) всего на одну величину $J_{dy} = +1.5$, т. е.

$$J_x = -1, \quad d_x = 7, \quad J_{dx} = +2, \tag{20a}$$
$$J_y = +1, \quad d_y = 10, \quad J_{dy} = +1.5. \tag{20b}$$

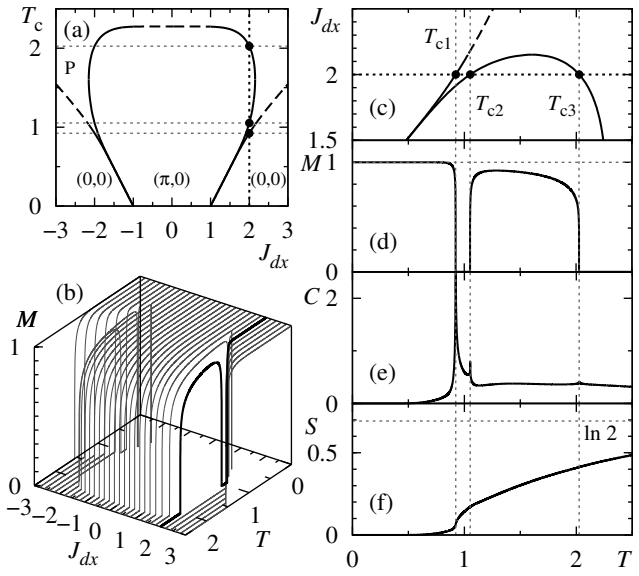


Рис. 9. Магнитная фазовая диаграмма (*a*) зависимости критической температуры T_c от декорирующего обменного взаимодействия J_{dx} декорированной квадратной решетки при заданных значениях параметров модели (20) и варьировании параметра J_{dx}. Вертикальная пунктирная прямая при $J_{dx} = +2$ пересекает линии магнитной фазовой диаграммы в температурных точках: $T_{c1} \approx 0.923$, $T_{c2} \approx 1.052$, $T_{c3} \approx 2.026$. Спонтанная намагниченность $M(J_{dx}, T)$ (*b*), где толстой сплошной кривой выделена функция при $J_{dx} = +2$. На правой панели показаны часть магнитной фазовой диаграммы $J_{dx}(T)$ (*c*), температурные зависимости спонтанной намагниченности M (*d*), удельной теплоемкости C (*e*) и энтропии S (*f*) при $J_{dx} = +2$. Вертикальные пунктирные прямые показывают положения критических температур T_{c1}, T_{c2} и T_{c3}. На рисунке *f* горизонтальная штриховая прямая соответствует энтропии $S^\infty = \ln 2$ при $T \to \infty$

Здесь также следует обратить внимание, что параметры подобраны так, что только вдоль оси x возникает конкуренция прямых и декорирующих обменных взаимодействий, согласно условию (11a), а вдоль оси y конкуренция обменных взаимодействий не возникает, т. е. условие (11b) не выполняется.

Сравнение рис. 9 с предыдущими результатами (см. рис. 3 и рис. 7) показывает, что структурно и качественно магнитная фазовая диаграмма не изменилась. На магнитной фазовой диаграмме (рис. 9 *a*) сохранились те же магнитные фазы, но несколько изменились значения критических температур. Как показано на рис. 9 *a*, в центре магнитной фазовой диаграммы (при параметрах обменного взаимодействия $|J_{dx}| < 2.151$ и температуре $T < 2.275$) возникает магнитная фаза, границы которой определяют-

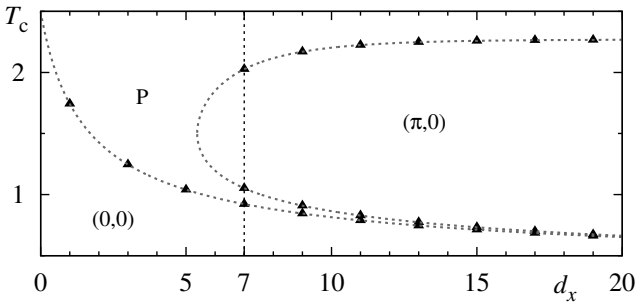


Рис. 10. Магнитная фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_c от степени декорирования d_x (при $d_y = d_x + 3$) декорированной квадратной решетки для параметров расчета (20). Треугольники обозначают нечетные степени декорирования по направлению x (d_x). Вертикальная пунктирная прямая показывает значения критической температуры при $d_x = 7$ и $d_y = 10$

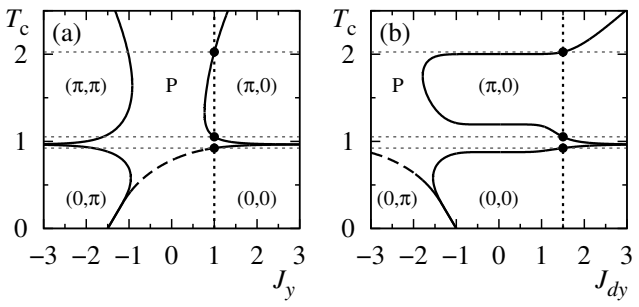


Рис. 11. Магнитные фазовые диаграммы зависимости критической температуры T_c от параметров обменного взаимодействия J_y (*a*) и J_{dy} (*b*), соответствующие расчетным параметрам модели (20). Вертикальные пунктирные прямые, соответствующие $J_y = +1$ (*a*) и $J_{dy} = +1.5$ (*b*), пересекают линии магнитной фазовой диаграммы в тех же температурных точках T_{ci}, что и на рис. 9

ся уравнением (9c), а по краям фазовой диаграммы при низкой температуре возникает магнитоупорядоченная область, определяемая уравнением (9a). Это также видно из сравнения рис. 5 и 10. При этом осталось то же количество магнитных фазовых переходов, что и в двух предыдущих случаях. Это хорошо видно на рис. 10, где показана зависимость критической температуры от параметра кратности декорирования для нечетного случая. Здесь видно, что при соотношении параметров (20) (вертикальная пунктирная прямая при $d_x = 7$ и $d_y = 10$) в системе возникают две области магнитоупорядоченных состояний, которые определяются уравнением (9a) при низких температурах, а при температурах выше — уравнением (9c).

При сравнении магнитных фазовых диаграмм зависимостей T_c от параметра J_y на рис. 11 *a* и рис. 4 различия более заметны. Причем количество и типы упорядочения магнитных фаз на диаграммах совпадают. При этом появившаяся возможность варьирования по параметру J_{dy} позволила построить дополнительную магнитную фазовую диаграмму, представленную на рис. 11 *b*. На этой магнитной фазовой диаграмме видны области упорядочений, определяемые из уравнений (9) в точках $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, а также области парамагнитной фазы (P). На всех этих магнитных фазовых диаграммах (рис. 9 *a* и рис. 11) вертикальными пунктирными прямыми показаны значения параметров (20).

Таким образом, на этих графиках видно, что температурные зависимости термодинамических и магнитных функций количественно изменились (см. правую панель на рис. 9), а критические температуры отличаются от аналогичных температур, полученных в предыдущих разделах. При всех этих различиях исследуемая спиновая система, так же как и в предыдущих случаях, испытывает один или три магнитных фазовых перехода. Также заметим, что энтропия при нулевой температуре равна нулю (рис. 9 *f*), т. е. магнитная система не испытывает магнитного вырождения в основном состоянии.

7. РЕЖИМ 4. КОНКУРИРУЮЩИЕ ОБМЕННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВДОЛЬ ОБОИХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЕКОРИРОВАННОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКИ

Рассмотрим четвертый режим, когда система декорирована и испытывает конкуренцию обменных взаимодействий (соблюдается условие (11)) вдоль обоих направлений квадратной решетки,

$$|J_i| > 0, \quad d_i > 0, \quad |J_{di}| > 0, \tag{21a}$$

$$|J_j| > 0, \quad d_j > 0, \quad |J_{dj}| > 0, \tag{21b}$$

где $\{i,j\} = \{x,y\}$. Здесь следует отметить, что это самый сложный из всех рассмотренных случаев. Пример такой решетки соответствует рис. 1.

Таким образом, при соотношении параметров модели (21) перебор различных вариантов знаков обменных взаимодействий может дать шестнадцать случаев, когда конкурирующие обменные взаимодействия возникают сразу вдоль двух направлений декорированной квадратной решетки.

Для примера выберем следующие параметры модели, которые отличаются от предыдущего набора (20) всего на один знак величины: $J_{dy} = -1.5$, т. е.

$$J_x = -1, \quad d_x = 7, \quad J_{dx} = +2, \tag{22a}$$
$$J_y = +1, \quad d_y = 10, \quad J_{dy} = -1.5. \tag{22b}$$

Здесь следует обратить внимание, что параметры подобраны так, что вдоль оси x возникает конкуренция прямых и декорирующих обменных взаимодействий согласно условию (11a), а вдоль оси y также возникает конкуренция обменных взаимодействий, но уже согласно условию (11b). Изменение знака всего одного параметра модели (J_{dy}) в наборе (22) приводит к кардинальному изменению магнитной фазовой диаграммы (представленной на рис. 12 *a*) по сравнению с предыдущим случаем и дает яркие эффекты.

Видно, что при сравнении с предыдущими магнитными фазовыми диаграммами на данной диаграмме (рис. 12 *a*) сохранились те же фазы магнитоупорядоченных состояний, но появились и новые магнитные фазы. Также изменились количество и значения критических температур. Как показано на рис. 12 *a*, при низких температурах в центре магнитной фазовой диаграммы (при параметрах обменного взаимодействия $|J_{dx}| < 1.208$ и температуре $T < 0.420$) возникает новая магнитная фаза, границы которой определяются из уравнения (9d), с антиферромагнитно-антиферромагнитным упорядочением, а по краям фазовой диаграммы при $|J_{dx}| > 1$ появились еще новые фазы, границы которых определяются из уравнения (9b), с ферромагнитно-антиферромагнитным упорядочением. При повышенных температурах в центре магнитной фазовой диаграммы (при параметрах обменного взаимодействия $|J_{dx}| < 2.077$ и температуре $0.420 < T < 2.263$) возникает фаза, область существования которой вычисляется из уравнения (9c), а по краям фазовой диаграммы при $|J_{dx}| > 1.918$ возникает фаза, границы которой можно вычислить из уравнения (9a). Последние две фазы также наблюдались и на предыдущей магнитной фазовой диаграмме (рис. 9 *a*). Обратим внимание, что на магнитной фазовой диаграмме не осталось места, где бы ни могла возникнуть магнитная реентерабельность. При этом появились области, где возникает не только три, но и пять магнитных фазовых переходов.

На рис. 12 *a* и рис. 13 вертикальной пунктирной прямой отмечено состояние модели, соответствующее набору параметров (22), при котором в спиновой системе возникает пять магнитных фазовых переходов. Это можно наблюдать на графиках температурных зависимостей спонтанной намагниченности на рис. 12 *b* и рис. 12 *d*. Также на графике температурной зависимости теплоемкости есть пять острых лямбда-образных пиков: большой при низкой температуре и четыре небольших пика при более высоких температурах (см. рис. 12 *e*). При этом энтропия системы (рис. 12 *f*) при нулевой температуре равна нулю, т. е. система в основном состоянии упорядочена, и в ней не возникает магнитное вырождение.

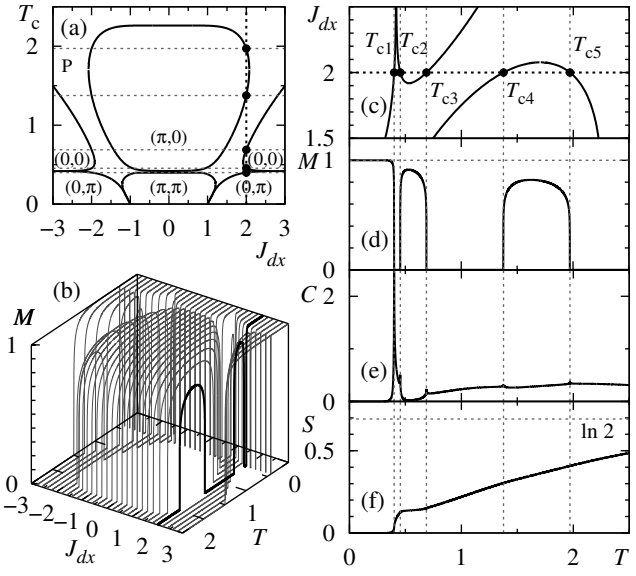


Рис. 12. Магнитная фазовая диаграмма (*a*) зависимости критической температуры T_c от декорирующего обменного взаимодействия J_{dx} декорированной квадратной решетки при заданных значениях параметров модели (22) и при варьировании параметра J_{dx}. Вертикальная пунктирная прямая при $J_{dx} = +2$ пересекает линии магнитной фазовой диаграммы в температурных точках: $T_{c1} \approx 0.399$, $T_{c2} \approx 0.454$, $T_{c3} \approx 0.688$, $T_{c4} \approx 1.376$, $T_{c5} \approx 1.971$. Спонтанная намагниченность $M(J_{dy}, T)$ (*b*), где толстой сплошной кривой выделена функция при $J_{dx} = +2$. На правой панели показаны часть магнитной фазовой диаграммы $J_{dy}(T)$ (*c*), температурные зависимости спонтанной намагниченности M (*d*), удельной теплоемкости C (*e*) и энтропии S (*f*) при $J_{dx} = +2$. Вертикальные пунктирные прямые показывают положения критических температур $T_{c1}, T_{c2}, T_{c3}, T_{c4}, T_{c5}$. На рисунке *f* горизонтальная штриховая прямая соответствует энтропии $S^\infty = \ln 2$ при $T \to \infty$

Зависимость критической температуры от степени декорирования показана на рис. 14. Здесь видно, что при нечетных степенях декорирования решетки вдоль оси x, $1 \leqslant d_x < 7$ (и прочих параметрах (22)) система испытывает только три магнитных фазо-

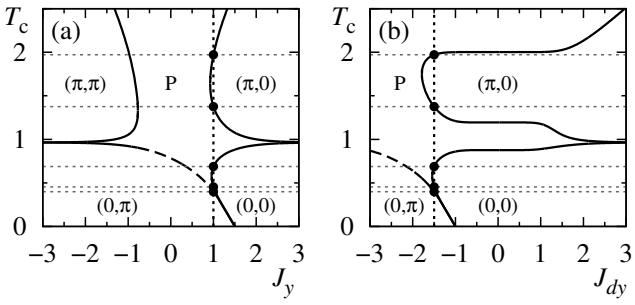


Рис. 13. Магнитные фазовые диаграммы зависимости критической температуры T_c от параметров обменного взаимодействия J_y (*a*) и J_{dy} (*b*), соответствующие расчетным параметрам модели (22). Вертикальные пунктирные прямые, соответствующие $J_y = +1$ (*a*) и $J_{dy} = -1.5$ (*b*), пересекают линии магнитной фазовой диаграммы в тех же температурных точках T_{ci}, что и на рис. 12

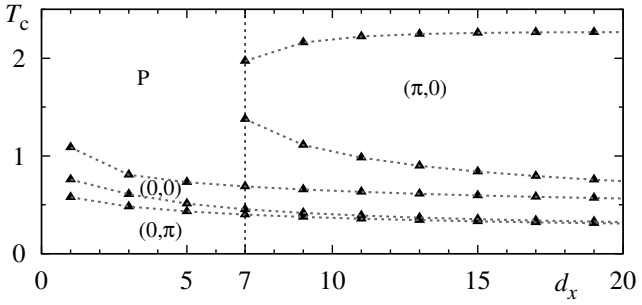


Рис. 14. Магнитная фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_c от степени декорирования d_x (при $d_y = d_x + 3$) декорированной квадратной решетки для параметров расчета (22). Треугольники обозначают нечетные степени декорирования по направлению x (d_x). Вертикальная пунктирная прямая показывает значения критической температуры при $d_x = 7$ и $d_y = 10$

вых перехода, а при $d_x \geqslant 7$ система испытывает уже пять переходов. На рис. 14 вертикальной пунктирной линией при $d_x = 7$ ($d_y = 10$) указано положение на магнитной фазовой диаграмме, заданное параметрами (22). В этом случае при монотонном увеличении температуры в спиновой системе возникают три области магнитоупорядоченных состояний, которые определяются уравнением (9b) при низких температурах, а при температурах выше — уравнениями сначала (9a), а затем (9c), что указано на рис. 14. Обратим внимание, что между магнитными областями всегда формируется переходная парамагнитная область. Поэтому исследуемая спиновая система может испытывать один, три или пять магнитных фазовых переходов.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на основе точного решения модели Изинга на декорированной квадратной решетке с произвольным числом декорирующих спинов вдоль обоих кристаллографических направлений показана принципиальная возможность описания в такой системе магнитной реентерабельности (возвратного магнетизма) — нетривиального явления, заключающегося в возникновении множественных магнитных фазовых переходов между магнитоупорядоченной и парамагнитной фазами при монотонном изменении температуры. Систематически исследованы все возможные режимы формирования магнитной реентерабельности. Полученные выводы проиллюстрированы на примере единой последовательности параметров модели.

Исследованы все возможные режимы соотношений параметров модели, при которых в указанной декорированной спиновой системе возникают возвратные магнитные фазовые переходы. Четыре характерных режима, при которых формируется явление магнитной реентерабельности, проиллюстрированы магнитными фазовыми диаграммами и температурными зависимостями термодинамических и магнитных функций. Полученные результаты выявляют сложное взаимодействие между различными типами магнитного упорядочения и наглядно демонстрируют влияние декорирования на магнитные свойства спиновой системы.

Установлено, что магнитная реентерабельность возникает исключительно при наличии конкурирующих обменных взаимодействий и выполнении условия, согласно которому абсолютная величина декорирующего обменного взаимодействия превышает величину прямого обменного взаимодействия. При соблюдении этих условий вдоль только одного из направлений декорированной квадратной решетки система может испытывать один или три магнитных фазовых перехода; при наличии таких условий одновременно вдоль двух направлений в системе формируются один, три или пять магнитных фазовых переходов.

При этом возникновение пяти переходов обусловлено анизотропией решетки, а именно разностью абсолютных величин декорирующих или прямых обменных взаимодействий либо различием кратностей декорирования по двум направлениям решетки. Следует подчеркнуть, что в декорированной квадратной решетке не наблюдается более пяти магнитных фазовых переходов, равно как и любого четного их числа.

Также важно обратить внимание, что при наличии конкуренции обменных взаимодействий в модели количество индуцируемых магнитных фазовых переходов определяется величинами и соотношениями кратностей декорирования кристаллографических направлений решетки. Монотонное возрастание степени декорирования решетки приводит к последовательному увеличению числа магнитных фазовых переходов: сначала один, затем три и, наконец, пять. При этом дальнейшее увеличение степени декорирования решетки не приводит к большему увеличению числа магнитных фазовых переходов.

Спиновые системы, демонстрирующие магнитную реентерабельность, характеризуются нетривиальной магнитной фазовой диаграммой, что является закономерным следствием многопараметрической зависимости модели, реализованной на декорированной квадратной решетке. Помимо прямых и декорирующих обменных взаимодействий, определяющих энергетические параметры связи между спинами вдоль двух кристаллографических направлений, а также двух параметров, задающих степень декорирования решетки в различных направлениях, ключевым фактором, формирующим магнитное упорядочение, выступает температура. В рамках этой сложной системы взаимосвязанных параметров может возникать конкуренция между различными магнитными состояниями и упорядочениями, что приводит к последовательной многократной смене доминирующего типа магнитного упорядочения и парамагнитной фазы при повышении температуры.

Таким образом, магнитная реентерабельность представляет собой явление множественных переходов между магнитоупорядоченными фазами через неупорядоченную (парамагнитную) область. При этом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками возникновения и исчезновения спонтанной намагниченности и температурами логарифмической расходимости теплоемкости. Дополнительным критерием магнитной реентерабельности выступает структурное различие сменяющих друг друга магнитоупорядоченных фаз, между которыми возникает парамагнитная фаза.

Заметим, что при наличии конкурирующих обменных взаимодействий вдоль одного направления решетки и свободных (декорирующих) спинов в другом направлении спиновая система демонстрирует магнитное вырождение, не сопровождающееся возникновением магнитных фрустраций; при этом энтропия системы при нулевой температуре остается отличной от нуля. Во всех остальных рассмотренных режимах существования магнитной реентерабельности в исследуемой спиновой системе ни магнитные вырождения, ни магнитные фрустрации не возникают.

Именно эта сложная картина магнитного упорядочения и, как следствие, насыщенная магнитная фазовая диаграмма обусловливают особый научный интерес к изучению декорированных спиновых систем. Мы полагаем, что настоящая работа вносит вклад в систематическое описание магнитных фазовых переходов на декорированных решетках и углубляет понимание механизмов формирования магнитной реентерабельности в таких системах, а результаты имеют фундаментальное значение для развития теории фазовых переходов в сложных магнитных системах и могут быть экстраполированы на реальные материалы, где наблюдаются аналогичные эффекты.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для ИФМ УрО РАН.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Senoussi, Phys. Rev. B **31**, 6086 (1985), doi:10.1103/PhysRevB.31.6086.
2. J. A. Mydosh, *Spin Glasses: An Experimental Introduction*, CRC Press, London (1993), doi:10.1201/9781482295191.
3. *Frustrated Spin Systems*, ed. by H. T. Diep, 3rd ed., World Scientific, Singapore (2020), doi:10.1142/11660.
4. K. Binder and A. P. Young, Rev. Mod. Phys. **58**, 801 (1986), doi:10.1103/RevModPhys.58.801.
5. D. V. Makarov and A. N. Zakhlevnykh, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **553**, 199 (2012), doi:10.1080/15421406.2011.609471.
6. Y. Kakehashi, Phys. Rev. B **43**, 10820 (1991), doi:10.1103/PhysRevB.43.10820.
7. Y. Kakehashi, Phys. Rev. B **47**, 3185 (1993), doi:10.1103/PhysRevB.47.3185.
8. M. J. Calderón and S. Das Sarma, Phys. Rev. B **75**, 235203 (2007), doi:10.1103/PhysRevB.75.235203.
9. P. Sanyal, Phys. Rev. B **96**, 214407 (2017), doi:10.1103/PhysRevB.96.214407.

10. K. Naveen, M. Reehuis, P. Adler, Ph. Pattison, A. Hoser, T. K. Mandal, U. Arjun, P. K. Mukharjee, R. Nath, C. Felser, and A. K. Paul, Phys. Rev. B **98**, 224423 (2018), doi:10.1103/PhysRevB.98.224423.

11. A. Scheie, J. Kindervater, S. Säubert, C. Duvinage, C. Pfleiderer, H. J. Changlani, S. Zhang, L. Harriger, K. Arpino, S. M. Koohpayeh, O. Tchernyshyov, and C. Broholm, Phys. Rev. Lett. **119**, 127201 (2017), doi:10.1103/PhysRevLett.119.127201.

12. D. R. Yahne, D. Pereira, L. D. C. Jaubert, L. D. Sanjeewa, M. Powell, J. W. Kolis, G. Xu, M. Enjalran, M. J. P. Gingras, and K. A. Ross, Phys. Rev. Lett. **127**, 277206 (2021), doi:10.1103/PhysRevLett.127.277206.

13. T. Samanta, P. A. Bhobe, A. Das, A. Kumar, and A. K. Nigam, Phys. Rev. B **97**, 184421 (2018), doi:10.1103/PhysRevB.97.184421.

14. A. I. Buzdin, Rev. Mod. Phys. **77**, 935 (2005), doi:10.1103/RevModPhys.77.935.

15. L. M. Tran, A. J. Zaleski, and Z. Bukowski, Phys. Rev. B **109**, 014509 (2024), doi:10.1103/PhysRevB.109.014509.

16. H. Deng, G. Liu, Z. Guguchia, T. Yang, J. Liu, Zh. Wang, Y. Xie, S. Shao, H. Ma, W. Liege, F. Bourdarot, X.-Y. Yan, H. Qin, C. Mielke, R. Khasanov, H. Luetkens, X. Wu, G. Chang, J. Liu, M. H. Christensen, A. Kreisel, B. M. Andersen, W. Huang, Y. Zhao, Ph. Bourges, Y. Yao, P. Dai, and J.-X. Yin, Nat. Mater. **23**, 1639 (2024), doi:10.1038/s41563-024-01995-w.

17. J. Cha, H. Lee, S. Sim, Y. Sur, K.-T. Kim, J.-H. Han, S.-W. Kim, G. Lee, J. Hyun, Ch.-y. Lim, Y. Ahn, S. Gim, J. D. Denlinger, S. Kim, K. H. Kim, S. B. Lee, M. J. Han, and Y. Kim, Nat. Phys. **22**, 1245 (2026), doi:10.1038/s41567-026-03331-2.

18. S. Chakraborty, Sh. Gupta, S. Pakhira, R. Choudhary, A. Biswas, Y. Mudryk, V. K. Pecharsky, D. D. Johnson, and Ch. Mazumdar, Phys. Rev. B **106**, 224427 (2022), doi:10.1103/PhysRevB.106.224427.

19. V. G. Vaks, A. I. Larkin, and Yu. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **22**, 820 (1966) [В. Г. Вакс, А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **49**, 1180 (1965)].

20. H. Kitatani, S. Miyashita, and M. Suzuki, Phys. Lett. A **108**, 45 (1985), doi:10.1016/0375-9601(85)90827-8.

21. T. Morita, J. Phys. A **19**, 1701 (1986), doi:10.1088/0305-4470/19/9/040.

22. P. Azaria, H. T. Diep, and H. Giacomini, Phys. Rev. Lett. **59**, 1629 (1987), doi:10.1103/PhysRevLett.59.1629.

23. T. Yokota, Phys. Rev. B **39**, 523 (1989), doi:10.1103/PhysRevB.39.523.

24. H. T. Diep, M. Debauche, and H. Giacomini, J. Magn. Magn. Mater. **104**–**107**, 184 (1992), doi:10.1016/0304-8853(92)90757-F.

25. C. K. Thomas and H. G. Katzgraber, Phys. Rev. E **84**, 040101 (2011), doi:10.1103/PhysRevE.84.040101.

26. N. De La Espriella, J. C. Madera, and A. Sánchez-Caraballo, Physica A **511**, 289 (2018), doi:10.1016/j.physa.2018.07.053.

27. H. T. Diep and H. Giacomini, in *Frustrated Spin Systems*, ed. by H. T. Diep, 3rd ed., World Scientific, Singapore (2020), p. 1, doi:10.1142/9789811214141_0001.

28. P. Lajkó, J.-C. A. d'Auriac, H. Rieger, and F. Iglói, Phys. Rev. B **101**, 024203 (2020), doi:10.1103/PhysRevB.101.024203.

29. R. Kaneko, Y. Douda, S. Goto, and I. Danshita, J. Phys. Soc. Jpn. **90**, 073001 (2021), doi:10.7566/JPSJ.90.073001.

30. I. Syozi, Prog. Theor. Phys. **39**, 1367 (1968), doi:10.1143/ptp/39.5.1367.

31. S. Miyazima and I. Syozi, Prog. Theor. Phys. **40**, 185 (1968), doi:10.1143/PTP.40.185.

32. S. Miyazima, Prog. Theor. Phys. **40**, 462 (1968), doi:10.1143/PTP.40.462.

33. H. Nakano, Prog. Theor. Phys. **39**, 1121 (1968), doi:10.1143/ptp/39.5.1121.

34. H. Nakano, Prog. Theor. Phys. **40**, 231 (1968), doi:10.1143/PTP.40.231.

35. E. H. Fradkin and T. P. Eggarter, Phys. Rev. A **14**, 495 (1976), doi:10.1103/PhysRevA.14.495.

36. M. Jaščur, Physica A **252**, 217 (1998), doi:10.1016/S0378-4371(97)00584-0.

37. M. Boughrara, E. Taifi, and M. Kerouad, Ferroelectrics **372**, 47 (2008), doi:10.1080/00150190802381746.

38. J. Strečka, O. Rojas, and S. M. de Souza, Phys. Lett. A **376**, 197 (2012), doi:10.1016/j.physleta.2011.11.008.

39. F. F. Doria, M. S. S. Pereira, and M. L. Lyra, J. Magn. Magn. Mater. **368**, 98 (2014), doi:10.1016/j.jmmm.2014.05.022.

40. S. Chen, Y. Wu, J. Lu, and B. Teng, Phys. Scr. **98**, 125941 (2023), doi:10.1088/1402-4896/ad0933.

41. F. A. Kassan-Ogly, A. I. Proshkin, A. K. Murtazaev, and V. A. Mutailamov, Phys. Solid State **62**, 770 (2020) [Ф. А. Кассан-Оглы, А. И. Прошкин, А. К. Муртазаев, В. А. Мутайламов, ФТТ **62**, 683 (2020)], doi:10.1134/S1063783420050121.

42. F. A. Kassan-Ogly and A. V. Zarubin, Phys. Rev. E **111**, 044133 (2025), doi:10.1103/PhysRevE.111.044133.

43. L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944), doi:10.1103/PhysRev.65.117.

44. B. Kaufman, Phys. Rev. **76**, 1232 (1949), doi:10.1103/PhysRev.76.1232.

45. B. Kaufman and L. Onsager, Phys. Rev. **76**, 1244 (1949), doi:10.1103/PhysRev.76.1244.

46. E. Ising, Z. Phys. **31**, 253 (1925), doi:10.1007/BF02980577.

47. I. Syôzi, Prog. Theor. Phys. **6**, 306 (1951), doi:10.1143/ptp/6.3.306.

48. H. A. Kramers and G. H. Wannier, Phys. Rev. **60**, 252 (1941), doi:10.1103/PhysRev.60.252.

49. H. A. Kramers and G. H. Wannier, Phys. Rev. **60**, 263 (1941), doi:10.1103/PhysRev.60.263.

50. R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London (1982) [Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, Москва (1985)].

51. E. W. Montroll, R. B. Potts, and J. C. Ward, J. Math. Phys. **4**, 308 (1963), doi:10.1063/1.1703955.

52. T. Tanaka, *Methods of Statistical Physics*, Cambridge Univю Press, Cambridge (2002), doi:10.1017/CBO9780511755675.

53. R. J. Baxter, J. Stat. Phys. **145**, 518 (2011), doi:10.1007/s10955-011-0213-z.

54. A. V. Zarubin and F. A. Kassan-Ogly, arXiv:2606.12572, doi:10.48550/arXiv.2606.12572.

55. F. A. Kassan-Ogly and A. V. Zarubin, Phys. Met. Metallogr. **126**, 1038 (2025) [Ф. А. Кассан-Оглы, А. В. Зарубин, ФММ **126**, 1038 (2025)], doi:10.7868/S3034621525090095.

56. F. A. Kassan-Ogly and A. V. Zarubin, Phys. Met. Metallogr. **126**, 991 (2025) [Ф. А. Кассан-Оглы, А. В. Зарубин, ФММ **126**, 991 (2025)], doi:10.7868/S3034621525090045.

57. F. A. Kassan-Ogly and A. V. Zarubin, Physica A **627**, 129136 (2023), doi:10.1016/j.physa.2023.129136.

58. A. V. Zarubin, F. A. Kassan-Ogly, A. I. Proshkin, and A. E. Shestakov, J. Exp. Theor. Phys. **128**, 778 (2019) [А. В. Зарубин, Ф. А. Кассан-Оглы, А. И. Прошкин, А. Е. Шестаков, ЖЭТФ **155**, 914 (2019)], doi:10.1134/S106377611904006X.

59. A. V. Zarubin, F. A. Kassan-Ogly, and A. I. Proshkin, J. Magn. Magn. Mater. **514**, 167144 (2020), doi:10.1016/j.jmmm.2020.167144.

Regimes of Magnetic Reentrancy in the Ising Model on a Decorated Square Lattice

A. V. Zarubin, **F. A. Kassan-Ogly***

M. N. Mikheev Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
620108, Ekaterinburg, Russia

*E-mail: Alexander.Zarubin@imp.uran.ru

Received August 25, 2026
Revised October 2, 2026
Accepted October 2, 2026

Abstract

Based on the exact solution of the Ising model on a decorated square lattice with an arbitrary number of decorating spins, a regime of model parameters is established under which the phenomenon of magnetic reentrancy (reentrant magnetism) occurs. All possible regimes in which this phenomenon arises are considered in sequence, and its characteristic features are illustrated by the most representative examples. It is shown that only one, three, or five magnetic phase transitions can exist in the spin system under consideration.

Keywords: decorated square lattice, Ising model, exact solution, magnetic reentrancy

Funding. The work was carried out within the framework of the State Assignment of the Ministry of Science and Higher Education of Russia for the M. N. Mikheev Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences.

Conflict of interest. The authors declare that they have no conflict of interest.

Authors' contributions. The contributions of the authors are equal.