ЖЭТФ/JETP, 2026, том 170, вып. 6 (12), стр. 631–639 © 2026

СИНГЛЕТНАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ, ФАЗА БЕРРИ И ПЕРЕХОДЫ ЛИФШИЦА В t–t'–V-МОДЕЛИ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

В. Ф. Гильмутдинов [*]***, М. А. Тимиргазин, А. К. Аржников***

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук
426067, Ижевск, Россия

Поступила в редакцию 13 августа 2026 г.
после переработки 21 сентября 2026 г.
Принята к публикации 23 сентября 2026 г.

Построены фазовые диаграммы сверхпроводящих состояний однозонной модели на треугольной решетке с притяжением электронов между ближайшими соседями. Учитываются перескок электронов до второй координационной сферы, а также анизотропия интеграла перескока. В модели реализуется сверхпроводимость с $s_{x^2+y^2}$- или $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$-симметрией. Представлены зависимости амплитуды и симметрии сверхпроводящего параметра порядка в широком интервале изменений параметров гамильтониана. Проведен анализ особенностей Ван Хова и их влияния на сверхпроводимость. Показано, что система испытывает несколько топологических переходов, при которых меняются связность контура Ферми и топологический заряд фазы Берри.

Ключевые слова: топология, треугольная решетка, переходы Лифшица, число Черна, сверхпроводимость, фазовые диаграммы

DOI: 10.31857/S0044451026120101

1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследований сверхпроводимости квазидвумерных систем обусловлена возможностью возникновения в таких системах майорановских состояний. Эти состояния с нулевой энергией являются топологически защищенными и вызывают интерес не только с фундаментальной точки зрения, но и с практической в связи с перспективами создания отказоустойчивых квантовых компьютеров, новых принципов передачи информации и т. д. [1–7]. В большой степени появление майорановских состояний в сверхпроводниках связывают с киральной симметрией параметра порядка типа $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$. Возникновение киральной симметрии обсуждалось в различных аспектах, в том числе в объемных системах, муаровых структурах, во внешних магнитных полях, в джозефсоновских контактах и т. д. [5–7]. Несмотря на значительные усилия в этом направлении, до сих пор, по нашему мнению, не удалось получить надежных экспериментальных свидетельств существования майорановских состояний в сверхпроводящих системах. Наша статья посвящена теоретическому изучению поведения параметра порядка сверхпроводимости и топологических свойств квазидвумерной системы на треугольной решетке.

Следует отметить, что на треугольной решетке киральное состояние $d_{x^2-y^2}+id_{xy}$ возникает естественным образом при наличии притяжения между электронами, находящимися на разных узлах (см., например, [8–10]). В настоящей статье не акцентируется внимание на механизме притяжения между электронами. Предполагается, что такое притяжение может обеспечиваться антиферромагнитными флуктуациями, фононами, поляронами или просто наводиться за счет эффектов близости, как это предполагается в модели Китаева [11–13].

2. МОДЕЛЬ И МЕТОД

Рассматривается гамильтониан модели электронов на треугольной решетке с дополнительным

[*] E-mail: vital@udman.ru

слагаемым, которое описывает притяжение между электронами, находящимися на ближайших соседних узлах (рис. 1):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}. \tag{1}$$

Здесь и далее постоянная Планка $\hbar$ и постоянная решетки a принимаются равными единице для удобства записи.

Слагаемое $\mathcal{H}_0$ — гамильтониан невозмущенной системы, описывающий перескок электронов с узла на узел:

$$\mathcal{H}_0 = -t \sum_{\langle jj' \rangle} c^\dagger_{j\sigma} c_{j'\sigma} - t_x \sum_{\langle jj' \rangle_x} c^\dagger_{j\sigma} c_{j'\sigma} + \\ + t' \sum_{\langle\langle jj' \rangle\rangle} c^\dagger_{j\sigma} c_{j'\sigma} - \mu \sum_j c^\dagger_{j\sigma} c_{j\sigma}, \tag{2}$$

где t и t_x — интегралы перескока между ближайшими соседями (см. рис. 1), t' — интеграл перескока в пределах второй координационной сферы, $c^\dagger_{j\sigma}$ и $c_{j\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения электрона со спином σ на узле j. Знаки $\langle \dots \rangle_x$ означают суммирование по ближайшим соседям вдоль оси x, $\langle \dots \rangle$ — по ближайшим соседям в других направлениях, а $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ — по вторым ближайшим. В настоящей работе анизотропия учитывается только для ближайших соседей; перескоки между вторыми соседями считаются изотропными.

Взаимодействие $\mathcal{H}_{\text{int}}$ имеет вид

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -V_0 \sum_{\langle jj' \rangle} c^\dagger_{j\uparrow} c^\dagger_{j'\downarrow} c_{j'\downarrow} c_{j\uparrow}, \tag{3}$$

где V_0 — параметр притяжения электронов, находящихся на ближайших соседних узлах ($V_0 > 0$). Это феноменологическое взаимодействие, природа которого может быть различной, как отмечалось выше.

Выбирая взаимодействие такого вида, мы не учитываем притяжение между электронами с одинаковыми спинами и тем самым пренебрегаем триплетным спариванием. Такое приближение вполне

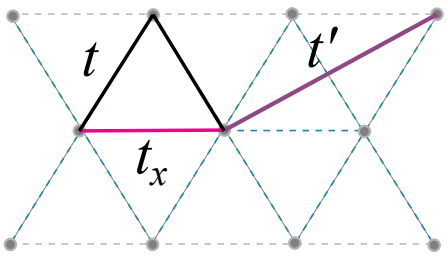


Рис. 1. Интегралы перескока в системе с треугольной решеткой: t — между ближайшими соседями; t_x — между ближайшими соседями в направлении оси x; t' — между вторыми ближайшими соседями

оправдано для большинства сверхпроводников на треугольной решетке. Например, прямым сравнением эксперимента и теории показано, что для системы $Na_xCoO_2{\cdot}yH_2O$ вкладом триплетных состояний при нулевых и малых магнитных полях можно пренебречь [14]. Кроме того, мы не фиксируем конкретный механизм притяжения электронов, чтобы не ограничивать симметрию параметра порядка.

Модели такого рода хорошо зарекомендовали себя при описании высокотемпературной сверхпроводимости. Одной из ранних работ является статья [15], где рассматривалась квадратная решетка с перескоками на первых и вторых соседей. Для треугольной решетки модель с межузельным притяжением применялась в работе [16]. В последующих работах [8, 17–20] рассматривались различные варианты такой модели.

Запишем взаимодействие между электронами в приближении Хартри – Фока:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -V_0 \sum_{\langle jj' \rangle} \Big(c^\dagger_{j\uparrow} c^\dagger_{j'\downarrow} \langle c_{j'\downarrow} c_{j\uparrow} \rangle + \\ + \langle c^\dagger_{j\uparrow} c^\dagger_{j'\downarrow} \rangle c_{j'\downarrow} c_{j\uparrow} - \langle c^\dagger_{j\uparrow} c^\dagger_{j'\downarrow} \rangle \langle c_{j'\downarrow} c_{j\uparrow} \rangle \Big), \tag{4}$$

где $\langle c^\dagger_{j\uparrow} c^\dagger_{j'\downarrow} \rangle = (\Delta_0/2V_0) \exp(-i\phi_\delta)$, ϕ_δ — фазовый множитель, зависящий только от вектора $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{r}_{j,j'}$, соединяющего соседние узлы, а Δ_0 — амплитуда параметра порядка, не зависящая от направления вектора $\boldsymbol{\delta}$.

Считаем, что амплитуда определяется вероятностью нахождения электрона на узле j и слабо зависит от флуктуаций электронной плотности на узле $j + \delta$:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{N\Delta_0^2}{V_0} - \frac{1}{2} \sum_{j,\delta} \Big(\Delta_0 \exp(i\phi_\delta)\, c^\dagger_{j,\uparrow} c^\dagger_{j+\delta,\downarrow} + \text{H. c.} \Big). \tag{5}$$

В импульсном представлении

$$c_{j\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)$$

(N — число узлов в системе) параметр порядка

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \Delta_0 \sum_\delta \exp(i\mathbf{k}\delta) \exp(i\phi_\delta)$$

после суммирования по ближайшим соседям имеет вид

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_0 \big(\exp(i\phi_1) \cos k_1 + \exp(i\phi_2) \cos k_2 + \\ + \exp(i\phi_3) \cos k_3 \big), \tag{6}$$

где $k_1 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_1$, $k_2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_2$, $k_3 = k_2 - k_1$, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ выражаются через базисные векторы прямой решетки $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y, \qquad \mathbf{e}_x = (1,0), \quad \mathbf{e}_y = (0,1). \tag{7}$$

Обобщенный энергетический спектр $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ свободных электронов для треугольной решетки с учетом электронного перескока на вторые ближайшие соседние узлы имеет вид

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = -2t_x\cos k_x - 4t\cos\frac{k_x}{2}\cos\frac{k_y\sqrt{3}}{2} + \\ + 2t'\Big(\cos k_y\sqrt{3} + 2\cos\frac{3k_x}{2}\cos\frac{k_y\sqrt{3}}{2}\Big). \tag{8}$$

Учитывая калибровочную симметрию $U(1)$ параметра порядка, можно записать $\Delta_{\mathbf{k}}$ в виде

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_0\big(\cos k_1 + \exp(i\phi)\cos k_2 + \exp(i\psi)\cos k_3\big). \tag{9}$$

Для определения состояния системы необходимо минимизировать квантовомеханическое среднее значение гамильтониана

$$\langle\mathcal{H}\rangle = \sum_{\mathbf{k}}(\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}) + \frac{N\Delta_0^2}{V_0}$$

(спектр квазичастиц $E_{\mathbf{k}} = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2)^{1/2}$, где $\xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu$) при заданном значении химического потенциала μ. В настоящей работе рассматривается основное состояние системы при $T = 0$, поэтому химический потенциал совпадает с энергией Ферми, $\mu = E_F$.

Концентрация электронов n и величина щели Δ_0 определяются в самосогласованной процедуре решения уравнений

$$n = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k},\sigma}\langle c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}c_{\mathbf{k}\sigma}\rangle = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}\left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\right), \\ \Delta_0 = \frac{V_0}{N}\sum_{\mathbf{k}}\frac{|\Delta_{\mathbf{k}}|^2}{2E_{\mathbf{k}}\Delta_0}. \tag{10}$$

Первое из уравнений связывает химический потенциал μ с концентрацией n, что позволяет при построении фазовых диаграмм параметризовать состояния значением n.

Полученное решение соответствует минимуму энергии. Отметим, что фазы ϕ и ψ выбираются также из процедуры минимизации энергии, при этом получаются значения $\phi = -\psi = 2\pi/3$ ($d_{x^2-y^2} + id_{xy}$-симметрия) либо $\phi = \psi = 0$ ($s_{x^2+y^2}$-симметрия). К любому из фазовых множителей можно добавить 2π — результаты не изменятся (см., например, [8]). Далее, для краткости, мы будем ссылаться на эти симметрии как s и $d + id$ соответственно. На рис. 2 изображено распределение в зоне Бриллюэна амплитуды $|\Delta_{\mathbf{k}}|$ сверхпроводящего параметра порядка. Специально выделены цветом значения, где $|\Delta_{\mathbf{k}}| = 0$ (бесщелевые состояния): для s-симметрии (слева) — это сплошная линия, а для $d + id$-симметрии (справа) — 8 точек, одна из которых находится в центре зоны (Γ) и является двукратно вырожденной.

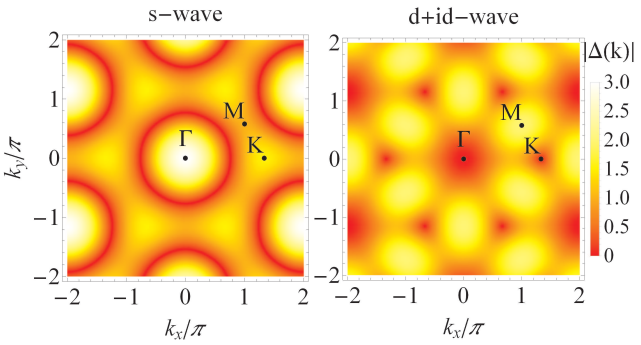


Рис. 2. Распределения амплитуды сверхпроводящей щели $|\Delta_{\mathbf{k}}|$ для s-симметрии (слева) и $d + id$-симметрии (справа). Красным цветом обозначены значения импульсов, в которых $|\Delta_{\mathbf{k}}| = 0$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Одной из целей данной работы является построение фазовых диаграмм в широком интервале параметров t'/t, t_x/t и n. Были исследованы четыре случая: в первом полагалось $t_x/t = 1$, а отношение t'/t изменялось от -1 до 1; в трех других рассматривались анизотропные законы дисперсии, в которых отношение t_x/t менялось от -1 до 2, а t'/t принимало значения 0, 0.95, -0.3. Выбор конкретных значений t'/t будет обоснован ниже. Взаимодействие V_0/t выбиралось равным единице, как в работах [8–10, 21]. Вариации V_0/t не приводили к качественным изменениям диаграмм, они лишь расширяли или сужали незакрашенные области на диаграммах с $\Delta_0/t < 10^{-5}$, в которых точность вычислений не позволяла определить симметрию сверхпроводящего параметра порядка. Напомним, что модельный гамильтониан в выбранном приближении Хартри – Фока гарантирует существование сверхпроводимости во всем диапазоне изменений параметров при любой сколь угодно малой величине Δ_0/t.

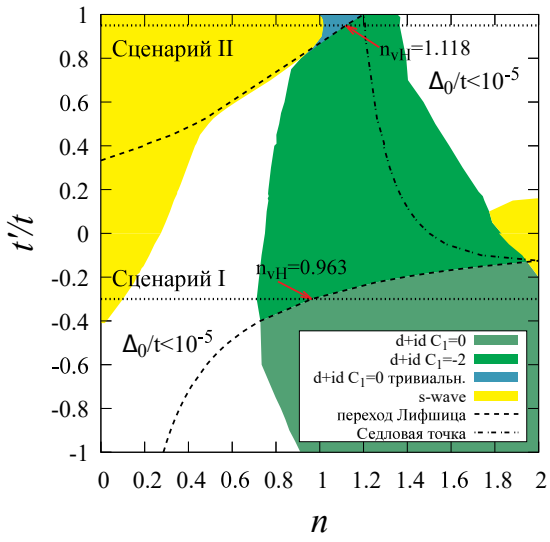


Рис. 3. Фазовая диаграмма для изотропной решетки ($t_x/t = 1$). Цветом отмечены фазы с различной симметрией параметра порядка. Штриховыми линиями обозначены переходы Лифшица, штрихпунктирной линией — седловая точка. Характерные сценарии изменения топологии поверхности Ферми (см. разд. 3.2) отмечены горизонтальными пунктирными линиями, которые пересекают линии особенностей Ван Хова и переходов Лифшица при концентрациях электронов n_{vH}.

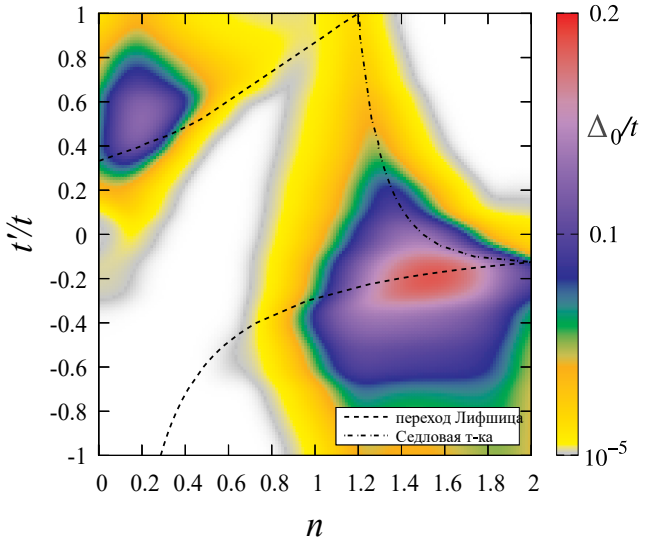


Рис. 4. Распределение амплитуды сверхпроводящего параметра порядка для изотропной решетки ($t_x/t = 1$). Обозначения те же, что и на рис. 3

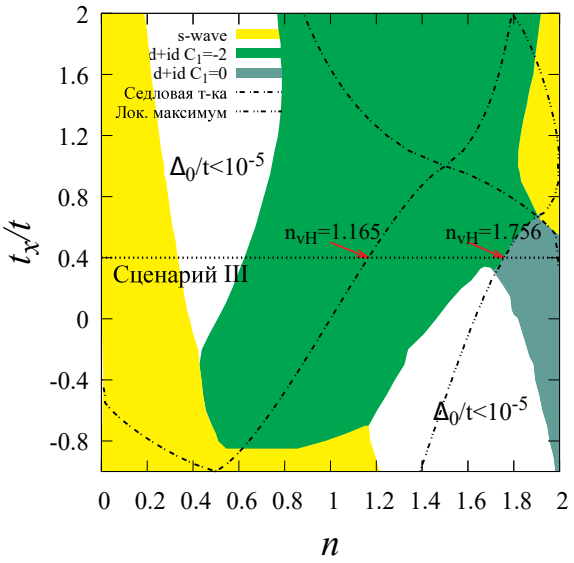


Рис. 5. Фазовая диаграмма для анизотропной решетки ($t'/t = 0$). Обозначения те же, что и на рис. 3. Штрихпунктирная линия с двумя точками обозначает локальный максимум

3.1. Фазовые диаграммы и распределение величины щели

Значительную роль в формировании сверхпроводимости играют особенности Ван Хова. Они определяются законом дисперсии невозмущенного гамильтониана, а именно точками, в которых $\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon(\mathbf{k}) = 0$. Для треугольной решетки возможны три типа особенностей Ван Хова: седловая точка (гиперболическая особенность), локальный минимум и локальный максимум (эллиптические точки). В некоторых случаях при прохождении уровня Ферми через данные точки может изменяться связность контура Ферми, что сопровождается переходом Лифшица и изменением соответствующего топологического инварианта [22]. На рис. 3–8 показаны линии, соответствующие некоторым особенностям Ван Хова и переходам Лифшица. На рис. 4 и 6 прослеживается корреляция амплитуды сверхпроводящего параметра порядка с близостью энергии Ферми к седловым точкам, которая наиболее отчетливо проявляется в анизотропном случае (рис. 6).

Помимо инварианта Лифшица, киральная $d + id$-фаза может обладать нетривиальной топологией, описываемой фазой Берри [23]. Соответствующий топологический инвариант — число Черна C_1 — при нулевых температурах вычисляется через следующий интеграл по зоне Бриллюэна (см., например, [9, 24]):

$$C_1 = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\mathrm{BZ}} \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{k}) \cdot \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{m}}}{\partial k_x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{m}}}{\partial k_y}\right] dk_x\, dk_y, \qquad (11)$$

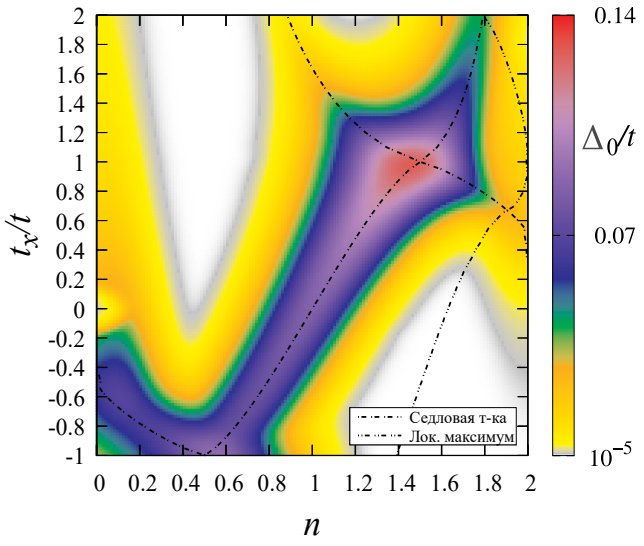


Рис. 6. Распределение амплитуды сверхпроводящего параметра порядка для анизотропной решетки ($t'/t = 0$). Обозначения линий те же, что и на рис. 5

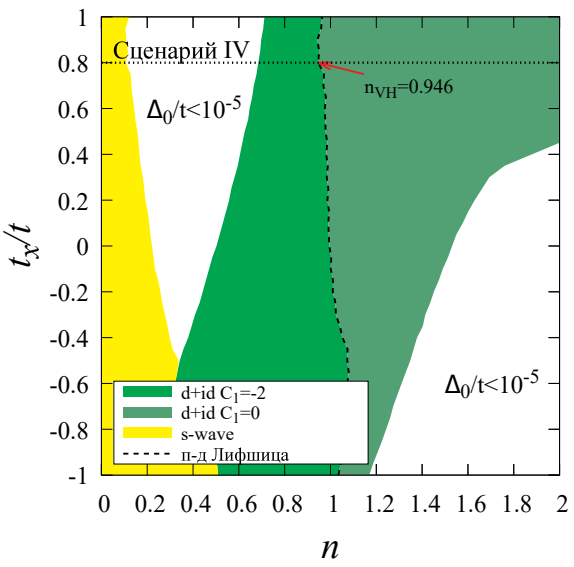


Рис. 7. Фазовая диаграмма для анизотропного случая при $t'/t = -0.3$. Обозначения те же, что и на рис. 3

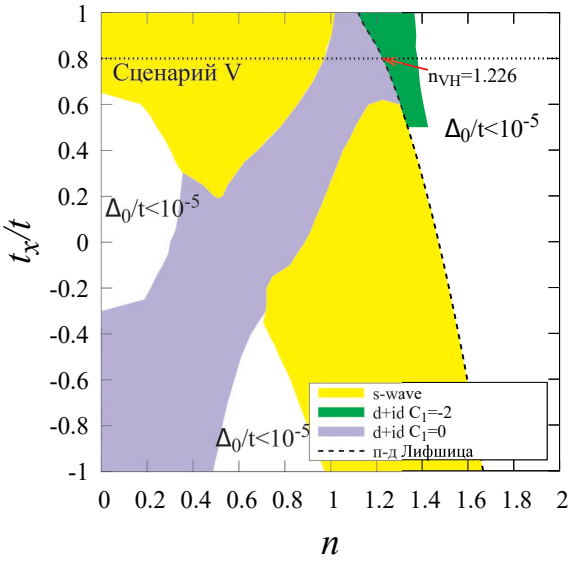


Рис. 8. Фазовая диаграмма для анизотропного случая при $t'/t = 0.95$. Обозначения те же, что и на рис. 3

где $\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{k}) = \mathbf{m}(\mathbf{k})/|\mathbf{m}(\mathbf{k})|$, а вектор $\mathbf{m}(\mathbf{k})$ определяется как

$$\mathbf{m}(\mathbf{k}) = \big(\operatorname{Re}\Delta_{\mathbf{k}},\ \operatorname{Im}\Delta_{\mathbf{k}},\ \xi_{\mathbf{k}}\big). \tag{12}$$

На рис. 3, 5, 7, 8 цветом выделены области с различной симметрией параметра порядка и значениями числа Черна C_1. Фаза с s-симметрией параметра порядка тривиальна во всей области существования: под контуром Ферми отсутствуют монополи, а бесщелевые состояния реализуются на линии, представляющей собой окружность (см. рис. 2). В $d + id$-фазе число Черна может принимать значения $C_1 = -2$ и $C_1 = 0$ в зависимости от параметров. Конкретные сценарии изменения C_1 обсуждаются в разд. 3.2.

Еще одна особенность, которая проявляется вблизи топологических переходов, — это увеличение амплитуды сверхпроводящей щели (рис. 4, 6) и, соответственно, увеличение температуры сверхпроводящего перехода. Эта особенность отмечалась и ранее [17, 18] и была сформулирована как уплощение одночастичного спектра вблизи контура Ферми в области топологического перехода.

3.2. Эволюция контура Ферми и топологические переходы

Изменение числа Черна C_1 происходит при пересечении контуром Ферми бесщелевых точек параметра порядка $|\Delta_{\mathbf{k}}| = 0$ (монополей фазы Берри). Как показано ниже, во многих случаях это пересечение совпадает с переходами Лифшица, однако возможны и иные сценарии. Ниже мы последовательно рассмотрим эволюцию контура Ферми для пяти характерных наборов параметров, отмеченных на фазовых диаграммах горизонтальными пунктирными линиями и римскими цифрами I–V.

Сценарий I ($t'/t = -0.3$; $t_x/t = 1$). На рис. 9 показана эволюция контура Ферми при увеличении концентрации электронов. При малых концентрациях реализуется s-фаза (см. рис. 3), которая затем переходит в $d + id$-состояние, характеризующееся во-

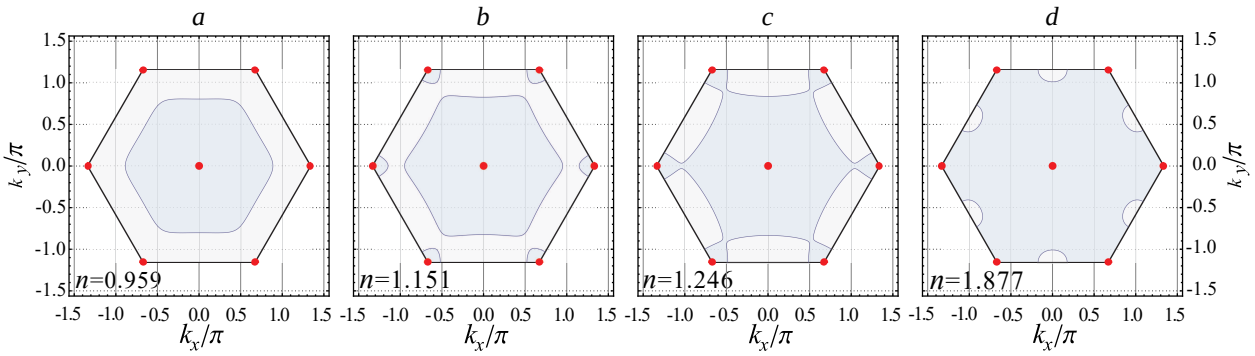


Рис. 9. Эволюция контура Ферми для сценария I ($t'/t = -0.3$; $t_x/t = 1$) при увеличении концентрации электронов, демонстрирующая переход Лифшица и изменение числа Черна. Красным показаны бесщелевые состояния $|\Delta_{\mathbf{k}}| = 0$

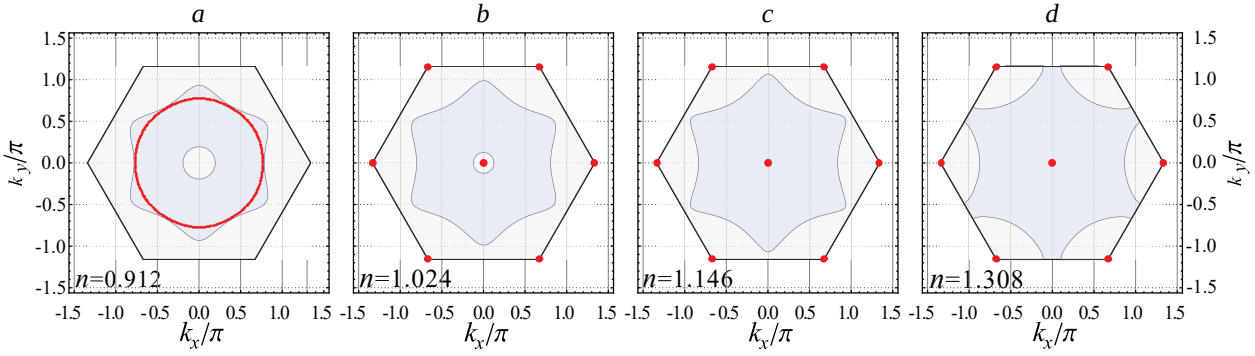


Рис. 10. Эволюция контура Ферми для сценария II ($t'/t = 0.95$; $t_x/t = 1$)

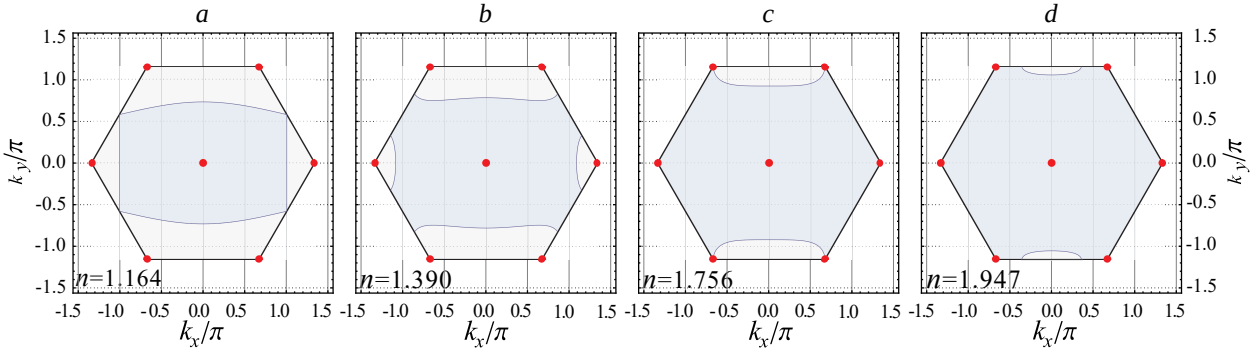


Рис. 11. Эволюция контура Ферми для сценария III ($t_x/t = 0.4$; $t'/t = 0$)

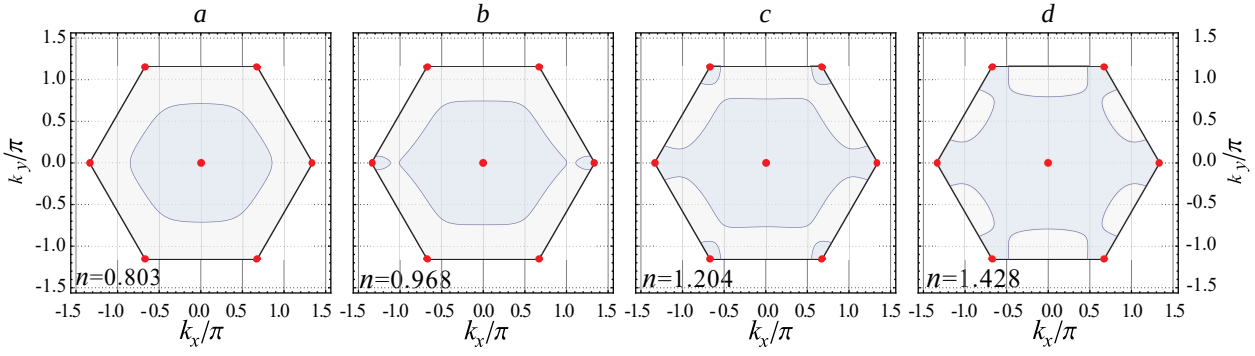


Рис. 12. Эволюция контура Ферми для сценария IV ($t_x/t = 0.8$; $t'/t = -0.3$)

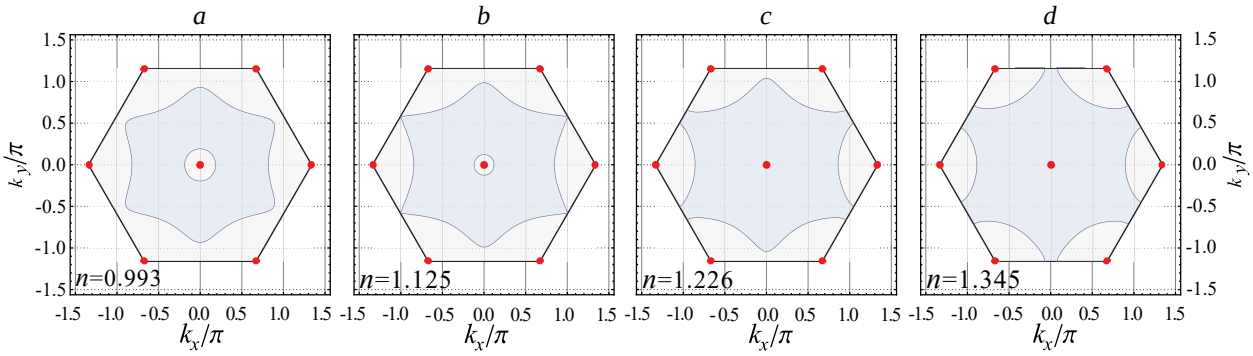


Рис. 13. Эволюция контура Ферми для сценария V ($t_x/t = 0.8$; $t'/t = 0.95$)

семью точками бесщелевых состояний (рис. 9 *a*). Две из них, вырожденные в центре зоны Бриллюэна (Г), оказываются под контуром Ферми и дают вклад $C_1 = -2$ в выражение (11). Остальные шесть точек лежат вне контура Ферми и не влияют на топологию.

При дальнейшем увеличении концентрации происходит переход Лифшица при $n = 0.963$: в углах зоны Бриллюэна возникают заполненные электронами дополнительные области (рис. 9 *b*). Шесть угловых монополей попадают под контур Ферми, и, поскольку их заряд противоположен заряду центральных монополей, суммарный заряд обращается в нуль: $C_1 = 0$. При последующем увеличении n (рис. 9 *c*, *d*) контур Ферми продолжает деформироваться, но топология фазы Берри остается тривиальной.

Сценарий II ($t'/t = 0.95$; $t_x/t = 1$). Принципиально иная картина наблюдается на рис. 10. При концентрации $n = 0.912$ (рис. 10 *a*) реализуется s-симметрия: бесщелевые состояния образуют замкнутую линию (показана красным), а сама фаза является топологически тривиальной. При переходе от s- к $d + id$-симметрии ($n = 1.024$, рис. 10 *b*) линия бесщелевых состояний распадается на восемь точек, однако все они оказываются вне контура Ферми. Вследствие этого число Черна остается нулевым: $C_1 = 0$.

При дальнейшем увеличении концентрации при $n = 1.118$ происходит переход Лифшица: схлопывается карман в центре зоны Бриллюэна (см. рис. 10 *c*). Две вырожденные точки в центре попадают под контур Ферми, и число Черна становится равным $C_1 = -2$, а топология фазы Берри становится нетривиальной.

Сценарий III ($t_x/t = 0.4$; $t'/t = 0$). В этом случае после возникновения $d + id$-фазы ($n = 1.164$, рис. 11 *a*) под контуром Ферми находятся два вырожденных монополя в центре зоны Бриллюэна, что дает $C_1 = -2$. В отличие от сценариев I и II, здесь изменение топологии происходит без перехода Лифшица: при концентрации $n = 1.756$ (рис. 11 *c*) контур Ферми пересекает шесть угловых монополей, которые в сумме с центральными дают нулевой заряд ($C_1 = 0$). При $n = 1.947$ (рис. 11 *d*) все восемь монополей остаются под контуром Ферми, и топология фазы Берри тривиальна.

Сценарий IV ($t_x/t = 0.8$; $t'/t = -0.3$). Эволюция контура Ферми для этого случая представлена на рис. 12. При малых концентрациях реализуется s-фаза (рис. 7). После перехода в $d + id$-фазу ($n = 0.803$, рис. 12 *a*) бесщелевая линия распадается на восемь точек; две центральные находятся под контуром Ферми и обеспечивают $C_1 = -2$.

При $n = 0.946$ происходит переход Лифшица: в углах зоны Бриллюэна возникают электронные карманы, и шесть угловых монополей попадают под контур Ферми (рис. 12 *b*). Их заряд противоположен заряду центральных монополей, поэтому суммарное число Черна обращается в нуль: $C_1 = 0$. При дальнейшем увеличении концентрации (рис. 12 *c*, *d*) топология остается тривиальной.

Сценарий V ($t_x/t = 0.8$; $t'/t = 0.95$). Эволюция контура Ферми для этого набора параметров показана на рис. 13. С переходом из s- в $d + id$-фазу линия бесщелевых состояний распадается на восемь точек, но все они лежат вне контура Ферми, и $C_1 = 0$. Это топологически тривиальная $d + id$-фаза. При $n = 1.226$ происходит переход Лифшица (карман в центре зоны схлопывается), и топологический индекс $C_1 = -2$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены исследования модельного гамильтониана, описывающего электроны на треугольной

решетке. В приближении Хартри – Фока для электрон-электронного взаимодействия получены условия возникновения сверхпроводящего состояния с различной симметрией параметра порядка.

Показано, что киральная $d + id$-симметрия, с которой связывают существование майорановских состояний, реализуется в широких интервалах изменения параметров модели и занимает значительную часть фазовых диаграмм (рис. 3, 5, 7, 8). При этом $d + id$-фаза может быть топологически тривиальной ($C_1 = 0$) в двух качественно различных случаях: когда под контуром Ферми отсутствуют монополи параметра порядка (сценарий II, рис. 10 *b*) и когда монополи присутствуют, но их заряды полностью скомпенсированы (сценарий I, рис. 9 *c*). В последнем случае, как показано в работе [25], можно наблюдать пространственно разделенные фриделевские осцилляции, отвечающие интерференции рассеянных волн в зависимости от разности зарядов монополей. С точки зрения принципа соответствия «объем – граница» майорановские состояния не должны возникать при $C_1 = 0$, однако возможность их появления при наличии скомпенсированных монополей требует дополнительных исследований.

Изучено влияние особенностей Ван Хова на сверхпроводящее состояние. В большинстве рассмотренных случаев (сценарии I, II, IV, V) изменение числа Черна происходит при переходе Лифшица, когда меняется связность контура Ферми и монополи входят под него или выходят из-под него. Вместе с тем в сценарии III (анизотропный закон дисперсии, $t'/t = 0$) изменение топологии фазы Берри происходит без перехода Лифшица, просто за счет пересечения контуром Ферми бесщелевых точек в углах зоны Бриллюэна. В обоих случаях изменение числа Черна происходит через бесщелевые сверхпроводящие состояния, что соответствует общим закономерностям топологических переходов. Области параметров, в которых происходят топологические переходы, наиболее предпочтительны для поиска майорановских состояний, поскольку энергия нетривиальных состояний близка к нулю, а амплитуда сверхпроводящего параметра порядка возрастает (увеличивается критическая температура сверхпроводимости).

Несмотря на простоту гамильтониана, рассматриваемого в данной работе, он использовался для описания реальной системы — кобальтата натрия, интеркалированного водой ($Na_xCoO_2{\cdot}yH_2O$) [8]. Более того, выбранные в [8] параметры $t'/t = -0.18$ близки к области топологического перехода (см. рис. 3).

Модель является удобной платформой для изучения влияния сильных корреляций и флуктуаций сверхпроводящего параметра порядка на топологические свойства, в том числе в ограниченных системах.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FUUE-2024-0006).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern et al., Rev. Mod. Phys. **80**, 1083 (2008).

2. B. Zeng, X. Chen, D.-L. Zhou et al., *Quantum Information Meets Quantum Matter: From Quantum Entanglement to Topological Phases of Many-Body Systems*, Springer, New York (2019).

3. V. V. Val'kov, M. S. Shustin, S. V. Aksenov et al., Phys. Usp. **65**, 2 (2022) [В. В. Вальков, М. С. Шустин, С. В. Аксенов и др., УФН **192**, 3 (2022)].

4. X.-L. Qi and S.-C. Zhang, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).

5. O. Can, T. Tummuru, R. P. Day et al., Nat. Phys. **17**, 519 (2021).

6. R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **80**, 5188 (1998).

7. T. Yokoyama, S. Kawabata, T. Kato et al., Phys. Rev. B **76**, 134501 (2007).

8. S. Zhou and Z. Wang, Phys. Rev. Lett. **100**, 217002 (2008).

9. A. G. Groshev and A. K. Arzhnikov, JETP Lett. **121**, 276 (2025) [А. Г. Грошев, А. К. Аржников, Письма в ЖЭТФ **121**, 289 (2025)].

10. A. G. Groshev and A. K. Arzhnikov, J. Phys. Condens. Matter **36**, 405602 (2024).

11. A. Yu. Kitaev, Phys. Usp. **44**, 131 (2001) [А. Ю. Китаев, УФН **171**, 131 (2001)].

12. K. S. Chen, Z. Y. Meng, U. Yu et al., Phys. Rev. B **88**, 041103 (2013).

13. H. Kondo and T. Moriya, Phys. B: Condens. Matter **281–282**, 940 (2000).

14. M. Maśka, M. Mierzejewski, B. Andrzejewski et al., Phys. Rev. B **70**, 144516 (2004).

15. R. Micnas, J. Ranninger, and S. Robaszkiewicz, J. Phys. C **21**, L145 (1988).

16. O. I. Motrunich and P. A. Lee, Phys. Rev. B **69**, 214516 (2004).

17. A. G. Groshev and A. K. Arzhnikov, J. Phys. Condens. Matter **33**, 215604 (2021).

18. M. A. Timirgazin, V. F. Gilmutdinov, and A. K. Arzhnikov, Physica C **557**, 7 (2019).

19. M. Roig, A. T. Rømer, P. J. Hirschfeld et al., Phys. Rev. B **106**, 214530 (2022).

20. N. Gneist, L. Classen, and M. M. Scherer, Phys. Rev. B **106**, 125141 (2022).

21. T.-H. Park and H.-Y. Choi, Phys. Rev. B **99**, 174503 (2019).

22. G. E. Volovik, Phys. Usp. **61**, 89 (2018) [Г. Е. Воловик, УФН **188**, 95 (2018)].

23. B. A. Bernevig and T. L. Hughes, *Topological Insulators and Topological Superconductors*, Princeton Univ. Press, Princeton (2013).

24. G. E. Volovik, JETP Lett. **66**, 522 (1997) [Г. Е. Воловик, Письма в ЖЭТФ **66**, 492 (1997)].

25. L. Engström, P. Simon, and A. Mesaros, Phys. Rev. B **111**, 134505 (2025).

Singlet Superconductivity, Berry Phase, and Lifshitz Transitions in the $t{-}t'{-}V$ Model on a Triangular Lattice

V. F. Gilmutdinov, M. A. Timirgazin, A. K. Arzhnikov***

Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
426067, Izhevsk, Russia

*E-mail: vital@udman.ru

Received August 13, 2026
Revised September 21, 2026
Accepted September 23, 2026

Abstract

Phase diagrams of superconducting states are constructed for a two-dimensional single-band tight-binding model on a triangular lattice, accounting for electron attraction between nearest-neighbor sites. Both next-nearest-neighbor hopping and hopping integral anisotropy are taken into account. Superconducting states with $s_{x^2+y^2}$ wave and $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ wave order parameter symmetries are shown to be realized. Dependencies of the magnitude and symmetry of the superconducting gap in a wide range of model parameters are demonstrated. The influence of Van Hove features on superconductivity is analyzed. It is shown that the system exhibits several topological transitions, during which the connectivity of the Fermi contour and the topological charge of the Berry phase change.

Keywords: topology, triangular lattice, Lifshitz transitions, Chern number, superconductivity, phase diagrams

Funding. The research was carried out with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (No. FUUE-2024-0006).

Conflict of interest. The authors declare that they have no conflict of interest.

Authors' contributions. The contributions of the authors are equal.