ЖЭТФ/JETP, 2026, том 170, вып. 6 (12), стр. 604–614 © 2026

РЕЗОНАНС В МЕХАНИЗМЕ ПЛАНЕТАРНОГО ДИНАМО

Ф. А. Азизов [a], ***Е. В. Юшков*** [b,c*], ***Д. Д. Соколов*** [b,d]

[a] *Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в г. Баку*
AZ1143, Баку, Азербайджан

[b] *Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
119991, Москва, Россия

[c] *Институт космических исследований Российской академии наук*
117997, Москва, Россия

[d] *Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской академии наук*
108840, Троицк, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 сентября 2026 г.,
после переработки 6 сентября 2026г.,
Принята к публикации 5 октября 2026 г.

Исследуется возможность возникновения параметрического резонанса со стационарным планетарным магнитным полем в рамках сферического динамо Паркера. С помощью численного моделирования доказана возможность трансформации монотонного магнитного поля в осциллирующее при периодическом возбуждении параметров дифференциального вращения и зеркальной асимметрии. Продемонстрировано резонансное изменение структуры дипольного типа на квадрупольную, оценен диапазон частот, в котором такая трансформация возможна. На основании модельного примера анализируются гипотезы о потенциальной возможности подобных явлений для динамо-механизмов, формирующих стационарные магнитосферы планет и звезд.

Ключевые слова: параметрический резонанс, система динамо Паркера, магнитогидродинамика, численное моделирование, взаимодействие собственных мод, явление биений, параметрическое возбуждение, переходная область

DOI: 10.31857/S0044451026120077

1. ВВЕДЕНИЕ

Для большинства прикладных задач понятие параметрического резонанса тесно связано с уравнением гармонических колебаний, в котором периодическое изменение параметра собственной частоты может приводить к экспоненциальному росту амплитуды осцилляций. Уравнение гармонических колебаний с периодически меняющимся параметром, называемое часто уравнением Матье, имеет хорошо известное асимптотическое решение, определяющее скорость экспоненциального роста, а также диапазон частот периодического воздействия вблизи удвоенной собственной частоты колебаний, в котором эта скорость роста становится положительной [1, 2]. Аналогия с классическим случаем практически всегда переносится и на реальные примеры, т. е. по умолчанию чаще всего предполагается, что изменение параметров осциллирующей системы вблизи удвоенной собственной частоты этой системы может приводить к возрастанию амплитуды осцилляций.

В плане приложения к астрофизическому магнитному динамо [3, 4] с этим связан давний вопрос о том, не является ли 22-летний солнечный цикл магнитной активности следствием влияния 11-летнего вращения Юпитера вокруг Солнца [5, 6]. Однако теория магнитного динамо описывает не только осциллирующие системы, ее используют, в частности, для описания магнитных полей планет и галактик [7, 8]. Для этих небесных тел считается, что на линейной стадии динамо их магнитные поля монотонно растут, а далее этот рост стабилизируется нелинейными эффектами и магнитное поле становится стационарным. В связи с этим возникает во-

* E-mail: yushkov.msu@mail.ru

прос: возможен ли параметрический резонанс не в осциллирующих динамо-системах, а в монотонных?

С одной стороны, ответ кажется отрицательным, так как непонятно, какое решение будет раскачиваться периодическим изменением параметров, если динамо-решения являются монотонными. С другой стороны, если ответ будет положительным, то это означает, что даже слабое периодическое воздействие может приводить (или приводило в прошлом) к резонансу, например, в динамо-механизме Земли [9–11], с соответствующими, также пока непонятными трансформациями магнитной планетарной структуры. Причин периодических (или квазипериодических во времени) воздействий в астрофизических приложениях можно предложить множество, начиная от спутниковых или планетарных воздействий [5, 12] до релаксационных процессов, вызванных ударными, например метеоритными, взаимодействиями, в связи с чем проблема кажется важной и актуальной, хотя о реальной проверке речи, конечно, не идет.

В нашей работе мы пытаемся ответить на вопрос о возможности резонанса в механизмах планетарного динамо численно, с помощью простейшей модели сферического динамо Паркера. Варьируя параметры задачи, мы подбираем их так, чтобы «монотонный» параметрический резонанс стал возможен, показываем, как долго он развивается и к чему приводит в плане трансформации структуры магнитного поля. Конечно, подбор параметров для реализации резонанса дает только демонстрационный пример, не претендующий, по крайней мере сейчас, на непосредственное отношение к реальному планетарному процессу. Однако демонстрируемая потенциальная возможность ввиду важности явления в контексте динамо Земли заслуживает, на наш взгляд, тщательного изучения в будущем.

Работа является продолжением наших исследований параметрических резонансов в маломодовых динамо-системах [13, 14], представляющих собой упрощение модели Паркера при разложении по дипольным или квадрупольным модам. Несмотря на то, что мы решаем исходную, более сложную систему Паркера, для трактовки результата мы попрежнему используем маломодовые приближения, более подробно описанные в ранних работах [15]. В частности, необходимостью использования маломодового подхода определяется выбранный в работе демонстрационный вариант широтного распределения динамо-параметров. Дело в том, что при численном решении системы Паркера можно использовать более-менее произвольные функции широтных распределений спиральности и дифференциального вращения, а для построения маломодового приближения круг таких распределений серьезно сужается. Конечно, это ограничивает возможные приложения, но зато позволяет в деталях изучить явление резонанса. В связи с этим мы рассматриваем настоящую работу лишь как первый шаг к исследованию нелинейного параметрического динамо-резонанса, предполагая, что более детальное исследование с произвольными функциями распределения параметров будет реализовано в будущем.

2. ДИНАМО-МОДЕЛЬ ПАРКЕРА

При описании планетарных магнитных полей, и в частности магнитного поля Земли, одной из наиболее часто используемых моделей является сферическая динамо-модель Паркера [3, 16–18], в которой вектор магнитного поля $\mathbf{B}$ представляется в виде двух компонент: тороидальной компоненты магнитного поля $B(\theta, t)$ и компоненты $A(\theta, t)$, связанной с векторным потенциалом полоидального магнитного поля. В предположении тонкого сферического слоя и вращательной симметрии система для компонент поля сводится к двум уравнениям параболического типа в частных производных:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_\alpha(\theta)B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_\omega(\theta)\sin\theta\,\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}. \tag{2}$$

Такая упрощенная система содержит всего лишь две определяющие функции: функцию $R_\alpha(\theta, t)$, отвечающую за зеркальную асимметрию в конвективном слое, вызванную действием силы Кориолиса, и функцию $R_\omega(\theta, t)$, отвечающую за дифференциальное вращение проводящей среды в конвективном слое. Основная модельная сложность заключается в том, что на данный момент у нас нет четкого понимания того, как эти функции выглядят для Земли, Юпитера или других планет, впрочем, как и для Солнца, и именно с этим будет связано основное допущение нашей работы, в которой мы выбираем эти функции в специальном виде:

$$R_\alpha(\theta) = a_1\cos\theta + a_2\cos 3\theta, \tag{3}$$

$$R_\omega(\theta)\sin\theta = D_0(b_1\sin\theta + b_2\sin 3\theta), \tag{4}$$

где D_0, a_1, a_2, b_1, b_2 — константы, в приведенном примере равные $D_0 = 215$, $a_1 = -1.0$, $a_2 = 1.0$, $b_1 = -0.1$, $b_2 = 2.0$. Такой выбор констант, а соответственно и функций, обусловливается несколь-

кими факторами, которые мы детально объясним в следующем разделе.

Из вида системы (1), (2) очевидно, что при недостаточной эффективности зеркальной асимметрии и дифференциального вращения, или, как обычно говорят, при динамо-параметре $D \sim R_\alpha R_\omega$, близком к нулю, решение системы затухает. Если же абсолютное значение динамо-параметра достаточно велико, то решение в рамках линейной модели экспоненциально растет. Такой режим часто называют кинематическим, т. е. предполагающим отсутствие обратного влияния растущего магнитного поля на поле скорости. Учет нелинейных эффектов — задача непростая и не до конца решенная. Чаще всего нелинейные эффекты связывают с альфа-квенчингом [19–21] — уменьшением параметра зеркальной асимметрии при увеличении амплитуды магнитного поля. В рамках нашей работы мы моделируем это самым простым способом, выбирая

$$R_\alpha(\theta) = \frac{2(a_1 \cos\theta + a_2 \cos 3\theta)}{1 + \int B^2(\theta, t)\, d\theta / \int B_0^2(\theta)\, d\theta}, \qquad (5)$$

где B_0 — тороидальное поле в начальный момент времени, а интеграл берется по всей области изменения параметров, $\theta \in [0, \pi]$. Такое нелинейное подавление обеспечивает уменьшение функции зеркальной асимметрии, а соответственно, и эффективного динамо-числа по модулю. В свою очередь, уменьшение динамо-числа приводит к замедлению и остановке генерации. Несмотря на то, что такой способ подавления динамо весьма прост, он часто используется и, более того, в рамках нашего исследования по поиску подходящего случая резонанса с планетарным динамо является вполне оправданным.

Наконец, заметим, что параметрическое возбуждение в рассмотренной модели сферического динамо может быть приложено или к зеркальной асимметрии, или к дифференциальному вращению. В случае линейной задачи это не играет никакой роли, так как путем перенормировки полоидальной и тороидальной компонент эффективный динамо-параметр, а соответственно, и его параметрическое возбуждение, может перемещаться и в первое, и во второе уравнение системы. В нелинейной модели все немного сложнее, однако традиционно мы перемещаем динамо-параметр в уравнение для тороидальной компоненты, см. (4), и соответственно параметрическое возбуждение также накладываем на дифференциальное вращение

$$R_\omega(\theta) \sin\theta = D_0\big(1 + \varepsilon \sin(\Omega t)\big)(b_1 \sin\theta + b_2 \sin 3\theta),$$

где частота возмущения обозначается Ω, а интенсивность — ε. Для классического случая параметрического резонанса в уравнении Матье с ростом интенсивности линейно растут скорость генерации (экспоненциального роста решения) и область генерации, например, вблизи удвоенной частоты. В нашем случае будут наблюдаться аналогичные зависимости, но для большей зрелищности мы выбираем достаточно значимое $\varepsilon = 0.3$.

3. ВЫБОР УПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Теперь объясним выбор пространственного (широтного) распределения функций зеркальной асимметрии и дифференциального вращения, для чего нам понадобится идея маломодового разложения.

Маломодовое упрощение модели Паркера [13, 15, 22, 23] заключается в том, что на сегменте $\theta \in [0, \pi]$ решение системы может быть представлено в виде ряда Фурье по углам с зависящими от времени коэффициентами. Собирая выражения при соответствующих тригонометрических функциях из системы Паркера в частных производных, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Система получается бесконечномерной, но так как с ростом номера гармоник растет роль диссипативных членов, соответствующих второй производной по углу, данную систему можно оборвать на каком-то уравнении, пренебрегая последующими старшими модами. Обычно для качественного описания решения хватает 3–5 мод, поэтому данное упрощение называется маломодовым, детали см. в [21, 22].

Кроме того, что система в частных производных сводится к системе ОДУ, маломодовый подход позволяет добиться еще одного преимущества. Заметим, что граничные условия для компонент магнитного поля чаще всего предполагаются нулевыми, поэтому для разложения Фурье хватает только синусов $\sin(n\theta)$, где n — целое число, при этом синусы с четными n являются нечетными функциями относительно экватора, а синусы с нечетными n соответственно являются четными. Это позволяет в маломодовом приближении построить раздельные системы для магнитного поля с четной относительно экватора структурой (далее будем называть его полем дипольного типа) и нечетной относительно экватора структурой (далее соответственно будем называть его полем квадрупольного типа). Такое разложение можно провести не всегда, но для выбранных функций спиральности и дифференциального вращения (3), (4) это сделать можно. Таким образом, в случае

линейной системы в зависимости от динамо-числа могут быть проанализированы вещественная и мнимая временные части решения отдельно для поля дипольного типа (красные линии) и квадрупольного типа (синие линии), см. рис. 1. Другими словами, маломодовый анализ позволяет понять, где доминирует решение с четной относительно экватора структурой (при $100 < D < 300$ красная линия на верхней панели выше синей), а где — с нечетной (остальные D), а анализ мнимой части позволяет понять, где доминирует монотонное решение, а где осциллирующее. Заметим, что такие рассуждения возможны именно для разложения по четным и нечетным модам, так как в случае системы Паркера (черные точки на рис. 1) уступающее по скорости роста решение вообще не видно — видно только доминирующее.

Одна из существенных сложностей настоящей работы — это подбор таких функций $R_\alpha(\theta)$ и $R_\omega(\theta)$, при которых рядом (по скорости генерации) будут находиться монотонная и немонотонная гармоники, при этом скорость роста монотонной будет немного больше. Тогда, согласно нашей гипотезе, при подходящем параметрическом резонансе возбуждение накладывалось бы на недоминирующее осциллирующее решение, в процессе резонанса скорость роста осциллирующей гармоники повышалась бы и в итоге она становилась бы преобладающей. Конечно, для полной системы нет разделения на дипольное и квадрупольное решения, однако эта гипотеза достаточно легко проверяется в линейном случае для различных распределений параметров, в частности, ранее она была опробована в [13, 14], а для выбранного распределения параметров ее проверка представлена на рис. 2. В линейном случае, анализируя показатель экспоненциальной скорости роста для разных частот возбуждения Ω, мы видим широкий резонансный пик (синие точки) вблизи удвоенной собственной частоты. На нижних панелях представлены временные развертки на различных возбуждающих частотах: видны осцилляции вокруг нуля в резонансном случае (нижняя средняя панель), а также колеблющиеся вдали от нуля решения при отсутствии резонанса (нижние крайние панели). Более того, видно, что вдали от резонанса колебания вблизи монотонного решения имеют частоту возбуждающей силы, а в резонансной области — собственную частоту осциллирующей моды (красные точки). Весь вопрос теперь заключается в том, будет ли данный механизм работать в нелинейном случае системы Паркера или нет.

Сложность нелинейного режима связана с тем, что у него отсутствуют экспоненциально растущие

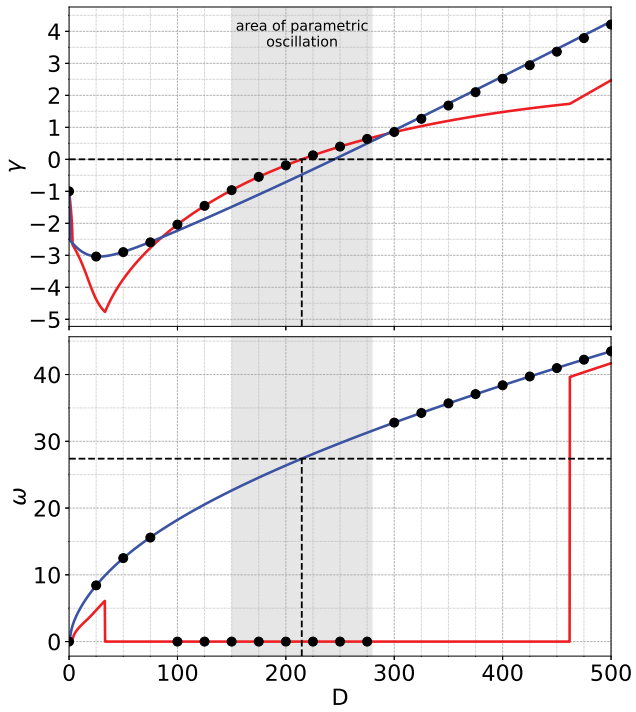


Рис. 1. Графики зависимости инкремента γ (верхняя панель) и частоты ω (нижняя панель) от динамо-числа D. Черные точки соответствуют результатам прямого численного решения уравнений в частных производных, красные и синие линии — маломодовому приближению для дипольной и квадрупольной симметрии соответственно. Горизонтальная штриховая линия $\gamma = 0$ на верхней панели показывает, что при динамо-числе $D = 215$ скорость роста равна нулю (вертикальная штриховая линия). Серая область на графике показывает область осцилляции динамо-числа

решения: с ростом магнитного поля динамо-число уменьшается, пока не стабилизируется вблизи $\gamma = 0$ (на рис. 1 этому соответствуют черные штриховые линии и $D = 214.7$). При подборе параметров важно, чтобы это состояние в нелинейном режиме было устойчивым, т. е. чтобы скорость росла с увеличением D, а во всем диапазоне периодического возбуждения параметра (серая область на рис. 1) осциллирующая гармоника не уходила далеко от монотонного решения. Еще раз повторим, что в модели Паркера нет четной/нечетной гармоники, но, согласно нашей идее, это не должно мешать механизму резонанса для выбранных $R_\alpha(\theta)$ и $R_\omega(\theta)$.

4. РЕЗОНАНС С МОНОТОННЫМ РЕШЕНИЕМ

В выбранном модельном примере в нелинейном случае при отсутствии параметрического возбужде-

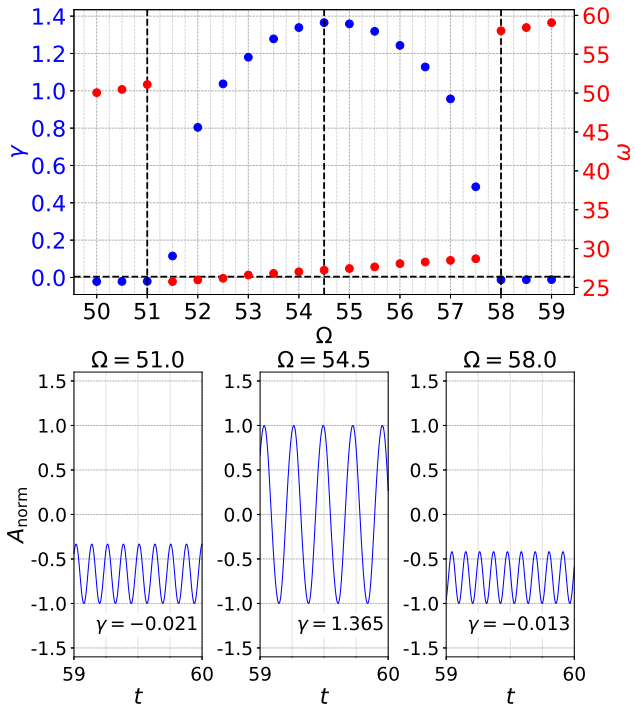


Рис. 2. Осциллирующее решение при $D = 215$. На верхней панели — графики зависимости частоты ω (красные точки) и скорости генерации γ (синие точки) от частоты параметрического возбуждения Ω. Горизонтальная штриховая линия соответствует уровню $\gamma = 0.0042$. На нижних панелях — зависимости от времени нормированной на максимальное значение функции $A(t)\exp(-\gamma t)$ на частотах возбуждения, указанных выше вертикальными штриховыми линиями ($\Omega = 51.0$, 54.5 и 58.0). Четко видна область параметрического резонанса, при заходе в которую скорость генерации γ становится положительной, сопровождаясь захватом частоты ω

ния решение стабилизируется при любых начальных данных — формируется монотонная структура. В нашем случае эта монотонная структура имеет вид, отличный от земного диполя, хотя по-прежнему она симметрична относительно экватора и выглядит как суперпозиция двух диполей. Структура поля с силовыми линиями, а также профили тороидальной и полоидальной компонент представлены в левом столбце рис. 3. Монотонный характер решения показан на рис. 4, где режиму без параметрического возбуждения соответствует интервал времени $t \leq 10$ (голубая область).

В момент времени $t = 10$ включается периодическое изменение динамо-параметра на удвоенной частоте системы [1, 2]. В качестве этой частоты мы выбираем частоту моды, следующей за наиболее легко возбуждаемой модой. Примерно до момента времени $t = 25$ решение остается монотонным с той же структурой (белая область на рис. 4). Единственным следствием включенных осцилляций являются малые колебания вблизи монотонного уровня на частоте возбуждения. Причина отсутствия отклика на параметрическое возбуждение ясна: параметрическое возбуждение почти не влияет на решение, четное относительно экватора [13, 15] (красная линия на нижней панели рис. 4), пока возрастает решение, нечетное относительно экватора (синяя линия на нижней панели рис. 4). Амплитуда осциллирующего решения растет экспоненциально, но так как в момент включения параметрического возбуждения она присутствует только на уровне шума, ее раскачка требует достаточно большого времени, за которое она вырастает более чем на 10 порядков.

В момент времени $t = 25$ амплитуда осциллирующей компоненты опережает монотонную, происходит лавинообразный переход монотонной структуры в осциллирующую. При этом амплитуда осциллирующего нечетного относительно экватора решения стабилизируется, см. правый столбец рис. 3, а четное относительно экватора решение начинает затухать. Скорость его затухания (красная линия на нижней панели) не такая большая, как скорость роста нечетной компоненты (синяя линия на нижней панели), но затухание все равно присутствует — осциллирующее решение вытесняет монотонное. Это означает, что через некоторое время система забывает про монотонную составляющую и в случае отключения периодического воздействия может выйти на новое монотонное решение, но уже, возможно, с измененной полярностью (магнитная инверсия).

Таким образом, нелинейный резонанс в динамо планетарного типа можно описать так. При возникновении периодического возбуждения параметров зеркальной асимметрии или дифференциального вращения в механизме магнитного динамо, формирующем стационарное планетарное магнитное поле, может начаться раскачка осциллирующей гармоники. В зависимости от параметров задачи эта осциллирующая гармоника может быть незаметна долгое время: монотонное решение практически не меняет амплитуды, однако на нем появляются слабые колебания на частоте возбуждающей силы. После длительной раскачки может произойти резкая трансформация монотонной структуры магнитного поля в осциллирующую структуру на частоте, примерно вдвое меньшей частоты параметрического возбуждения. Структура при этом может трансформироваться из четной относительно экватора в нечетную, четное монотонное решение после такой

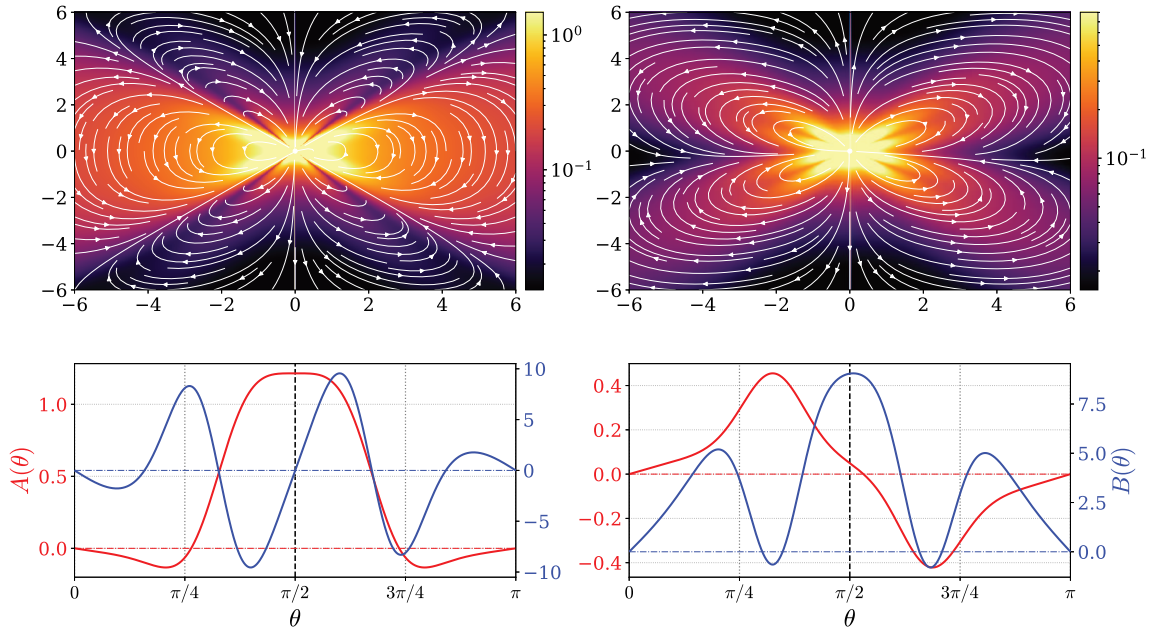


Рис. 3. Совмещенное представление магнитного поля для дипольной (левый столбец) и квадрупольной (правый столбец) конфигураций. Верхний ряд: силовые линии поля в плоскости (x, z) для осесимметричного случая; цветом показана величина $|\mathbf{B}|$, стрелками — направление поля. Нижний ряд: профили $A(\theta)$ (красные линии) и $B(\theta)$ (синие линии)

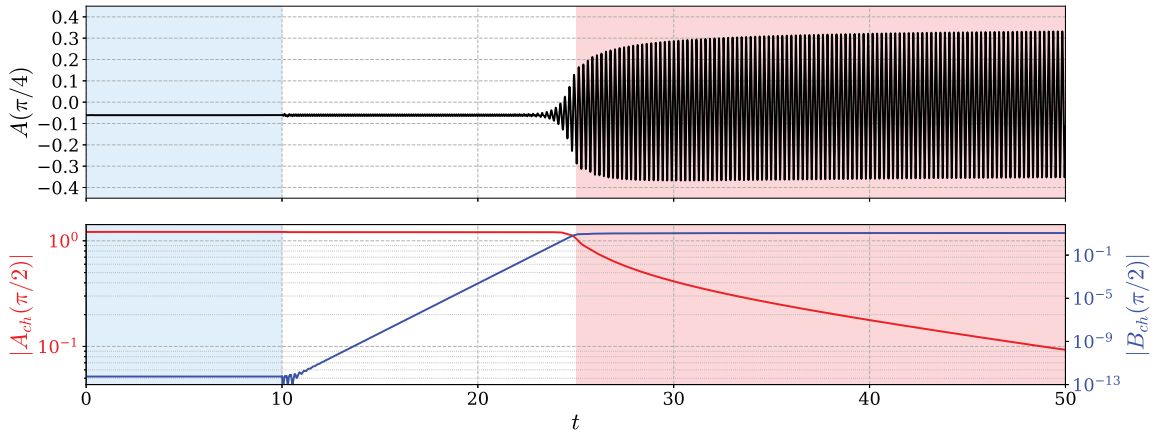


Рис. 4. Эволюция системы в процессе развития неустойчивости. На верхней панели представлена временная развертка амплитуды поля $A(t)$ на широте $\theta = \pi/4$ (черная линия). Нижняя панель иллюстрирует динамику амплитуд четных пространственных гармоник на экваторе ($\theta = \pi/2$) в полулогарифмическом масштабе. Для наглядности представлены сплошные огибающие кривые, построенные по локальным максимумам колебаний: красная кривая (левая ось ординат) описывает эволюцию $|A_{\rm ch}(\pi/2)|$, синяя кривая (правая ось ординат) демонстрирует рост компоненты $|B_{\rm ch}(\pi/2)|$. Цветовым фоном выделены различные стадии развития системы: начальная линейная стадия ($t \leq 10$, голубая область) и выход на нелинейное насыщение ($t \geq 25$, розовая область)

трансформации затухает и через какое-то время может окончательно исчезнуть. Так что при прекращении параметрического воздействия и возвращении системы в исходное монотонное состояние полярность стационарной структуры может быть уже другой, т. е. могут поменяться местами север и юг.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Кратко изложим техническую часть приведенного численного эксперимента. Для численного интегрирования системы (1), (2) используются неявная схема Эйлера первого порядка по времени и цен-

тральные разности второго порядка по пространству. Вводя равномерную сетку по пространству $\theta_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+2$, с шагом $h = \pi/(N+2)$ и по времени $t^j = j\tau$, обозначим вектор состояния на шаге j как

$$\mathbf{X}^j = [\mathbf{A}^j, \mathbf{B}^j]^T,$$

где $\mathbf{A}^j, \mathbf{B}^j \in \mathbb{R}^{N+1}$ содержат значения полей во внутренних узлах $\theta_1, \ldots, \theta_{N+1}$. На границах $\theta = 0, \pi$ используются однородные нулевые условия Дирихле. Вторые и первые пространственные производные аппроксимируются классическим разностным способом, см., например, [24–26].

Переход с одного временного слоя на следующий осуществляется решением системы линейных алгебраических уравнений [26, 27]

$$(\mathbf{I} - \tau \mathbf{M}^j)\mathbf{X}^{j+1} = \mathbf{X}^j, \tag{6}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, $\mathbf{M}^j$ — блочная ленточная матрица коэффициентов, элементы которой пересчитываются на каждом шаге по времени с учетом текущего нелинейного подавления, описываемого формулой (5), и возмущения динамо-числа $D(t^j)$.

Для нелинейного случая с параметрическим возбуждением (см., например, рис. 4) изменение динамо-числа вводится как

$$D(t^j) = D_0 \left[1 + \varepsilon(t^j) \sin(\Omega t^j)\right], \tag{7}$$

где $\varepsilon(t^j)$ равно нулю до момента времени t_* (первый момент перехода $\sin(\Omega t)$ через нуль после $t = 10$, чтобы обеспечить плавное включение возмущения без скачка коэффициентов матрицы), а далее равно 0.3.

На каждом временном шаге система (6) решалась с помощью функции `linalg.solve` из библиотеки NumPy [27, 28], т. е. методом LU-разложения. В ходе счета в точке $\theta = \pi/4$ (точнее, в ближайшем к ней узле сетки) записывались значения $A(t, \pi/4)$ и $B(t, \pi/4)$. Кроме того, в заданные моменты времени сохранялись полные пространственные профили $A(\theta)$ и $B(\theta)$.

Скорость роста γ и частота ω рассчитывались по динамике $A(t, \pi/4)$ во второй половине временного интервала $[T/2, T]$. Для этого находились локальные максимумы модуля $|A(t, \pi/4)|$ и методом наименьших квадратов строилась линейная аппроксимация зависимости $\ln|A|_{\max}$ от t, угловой коэффициент которой давал γ. Затем вычислялось преобразование функции Фурье $A(t, \pi/4)\exp(-\gamma t)$ [28], и в качестве частоты ω принималась частота максимального спектрального пика. В отсутствие осцилляций скорость роста определялась линейной аппроксимацией $\ln|A(t, \pi/4)|$ без поиска максимумов.

С учетом описанной выше численной схемы кратко прокомментируем результаты, показанные на рисунках. В расчетах на основе уравнений в частных производных использовалась описанная выше неявная схема Эйлера с параметрами $N = 600$ (число внутренних узлов по θ), $\tau = 10^{-4}$ и конечным временем $T = 60$, а описанная в предыдущем абзаце процедура нахождения скорости роста использовалась и в последующих расчетах.

Для получения данных, представленных на рис. 1, использовались два независимых подхода: маломодовая модель и прямое численное интегрирование уравнений в частных производных. В маломодовой модели решение искалось в виде разложения по конечному числу гармоник ($N_{\text{modes}} = 20$) отдельно для дипольной и квадрупольной симметрий. Базис нечетных мод $\sin((2k-1)\theta)$ использовался для дипольной структуры, а базис четных мод $\sin(2k\theta)$ — для квадрупольной. Матрица коэффициентов размерности $2N_{\text{modes}} \times 2N_{\text{modes}}$ формировалась из операторов α-эффекта и дифференциального вращения, где профили задавались выражениями (3), (4). Для каждого значения динамо-числа D из диапазона $[0, 500]$ вычислялись собственные значения полученной матрицы. Среди них выбирались два с наибольшей действительной частью; их действительные части давали скорости роста γ, а мнимые — частоты ω. Таким образом были получены кривые для дипольной (красная линия) и квадрупольной (синяя линия) мод.

Профили $R_\alpha(\theta)$ и $R_\omega(\theta)$ совпадали с использованными в маломодовой модели. Для каждого значения D из набора $\{0, 25, 50, \ldots, 500\}$ проводилось интегрирование до установления. Далее анализировался временной ряд $A(t, \theta = \pi/4)$. Скорость роста γ определялась по описанному ранее алгоритму. Полученные таким образом значения наносились на график в виде черных точек.

Для исследования параметрического резонанса (рис. 2) начальные профили $\mathbf{A}^0$ и $\mathbf{B}^0$ загружались из файлов, полученных в расчетах без параметрического возбуждения, и нормировались на максимальное по модулю значение. Динамо-число фиксировалось равным $D = 215$, амплитуда модуляции $\varepsilon = 0.3$. Частота возбуждения Ω варьировалась в диапазоне от 50 до 59 с шагом 0.5.

Для каждого значения Ω проводились интегрирование системы и последующее нахождение параметров γ и ω по описанной выше схеме. Полученные таким образом значения γ и ω для всех Ω показаны на верхней панели рис. 2: синие точки соответ-

ствуют γ, красные — ω. Горизонтальная штриховая линия отмечает скорость роста $\gamma = 0.0042$ невозмущенного решения (при $\varepsilon = 0$). Нижние три панели демонстрируют временные ряды $A(t, \pi/4)\exp(-\gamma t)$, нормированные на максимальное значение, для трех выбранных частот $\Omega = 51.0$, 54.5 и 58.0 на финальном отрезке времени $t \in [59, 60]$. Умножение на $\exp(-\gamma t)$ и последующая нормировка позволяют устранить экспоненциальный рост и выделить осцилляторную структуру решения, что дает возможность визуально сравнить характер колебаний в зависимости от частоты возбуждения.

Для исследования пространственной структуры генерируемого магнитного поля в условиях параметрического резонанса был проведен расчет с учетом нелинейного подавления α-эффекта (рис. 3). В отличие от линейного случая, рассмотренного выше, здесь эффективное динамо-число уменьшалось согласно (5). Параметрическое возбуждение включалось вблизи момента $t = 10$, когда $\sin(\Omega t) = 0$, на частоте $\Omega = 54.5$ с амплитудой $\varepsilon = 0.3$; до этого момента система эволюционировала без модуляции. Динамо-число фиксировалось равным $D = 215$, остальные параметры совпадали с использованными ранее. В моменты $t = 5$ (до включения возбуждения) и $t = 60$ (конечное состояние) сохранялись полные пространственные профили $A(\theta)$ и $B(\theta)$. Затем по этим профилям восстанавливалось осесимметричное магнитное поле в меридиональной плоскости (r, θ): компоненты B_r и B_θ вычислялись через $A(\theta)$ и ее производную, после чего строились цветовые карты модуля поля и линии поля. На нижних панелях рис. 3 приведены соответствующие профили $A(\theta)$ (красные линии) и $B(\theta)$ (синие линии).

Как видно на рис. 3, включение параметрического возбуждения приводит к существенной перестройке пространственной структуры поля: начальное дипольное (квазидипольное) распределение трансформируется в состояние с выраженной квадрупольной составляющей, что согласуется с резонансным взаимодействием мод, обсуждавшимся в предыдущем разделе.

При исследовании временной эволюции симметрии решения в условиях нелинейного насыщения и параметрического резонанса были взяты параметры $D = 215$, $\Omega = 54.5$, $\varepsilon = 0.3$. Параметрическое возбуждение включалось мгновенно при $t \geq 10$; до этого момента система эволюционировала без модуляции.

На каждом временном шаге, помимо полей $\mathbf{A}^j$ и $\mathbf{B}^j$, вычислялись их четные относительно экватора $(\theta = \pi/2)$ составляющие:

$$A_{\mathrm{ch}}(\theta, t) = \big(A(\theta, t) + A(\pi - \theta, t)\big)/2,$$
$$B_{\mathrm{ch}}(\theta, t) = \big(B(\theta, t) + B(\pi - \theta, t)\big)/2.$$

Значения этих величин в точке $\theta = \pi/2$ записывались на всем интервале интегрирования. Таким образом были получены временные ряды $A_{\mathrm{ch}}(\pi/2, t)$ и $B_{\mathrm{ch}}(\pi/2, t)$, отражающие рост квадрупольной компоненты поля. Кроме того, сохранялся временной ряд $A(\pi/4, t)$.

На верхней панели рис. 4 показана зависимость $A(\pi/4, t)$, демонстрирующая осциллирующее поведение с экспоненциальным ростом. На нижней панели в логарифмическом масштабе приведены модули $|A_{\mathrm{ch}}(\pi/2, t)|$ (красная линия) и $|B_{\mathrm{ch}}(\pi/2, t)|$ (синяя линия). Логарифмический масштаб позволяет проследить рост четной составляющей на много порядков. Фоновыми областями отмечены три характерных этапа: до $t = 10$ — свободная эволюция без параметрического возбуждения (голубая область), от $t = 10$ до $t = 25$ — переходный режим, после $t = 25$ — установившийся резонансный режим (розовая область). Такой анализ дает наглядное представление о том, как параметрическое возбуждение перестраивает симметрию генерируемого магнитного поля.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе описан численный эксперимент, показывающий возможность возникновения параметрического резонанса в динамо-механизме планетарного типа, т. е. резонанса с монотонным решением. Продемонстрировано, что возможность такого резонанса обусловлена тем, что модели магнитного динамо могут описывать как монотонные, так и осциллирующие магнитные поля, а это значит, что при наблюдении стационарного поля планетарного типа резонанс может произойти с ненаблюдаемой из-за подавления осциллирующей гармоникой. Усиленная в процессе резонансного взаимодействия осциллирующая гармоника может развиться и подавить монотонную, т. е. при резонансе может произойти трансформация монотонного решения в осциллирующее со сменой структуры, например дипольной на квадрупольную. Как показывает численный эксперимент, такая трансформация может занимать существенное время, но при этом она оказывается вполне возможной.

Данное явление, конечно, является лишь гипотетически возможным: в настоящее время все наблюдаемые планетарные поля, формируемые механизмом динамо, считаются монотонными, а периодические циклы, подобные звездным, в них не наблюда-

ются. Подчеркнем, однако, что имеющиеся сведения о временном поведении магнитных полей планет пока очень ограничены. Несложно себе представить ситуацию, при которой периодическое воздействие на динамо-механизм может возникнуть, например, по ударно-релаксационным причинам [12] или по причине захвата планетой естественного спутника. Периодическое воздействие, опять же гипотетически, может привести к трансформации дипольного поля в квадрупольное и появлению колебаний. Конечно, для этого должны быть выполнены определенные условия на распределения гидродинамической спиральности и дифференциального вращения в конвективном слое, например те, о которых идет речь в работе. Все это является воображаемым явлением, но потенциально возможным.

Также можно было бы представить параметрический резонанс как гипотезу для объяснения геомагнитных инверсий [11, 29, 30]. В самом деле, как показали результаты моделирования, после превращения монотонного поля в осциллирующее след, связанный с исходным полем, затухает во времени, т. е. система теряет память об исходном поле. А это значит, что после прекращения резонансного воздействия и восстановления монотонной структуры поля полярность этого поля может быть иной, т. е. локальное во времени резонансное воздействие может привести к планетарной инверсии. Хотя следует признать, что сама трансформация монотонного поля в осциллирующее требует настолько существенного времени, что такой механизм инверсии кажется маловероятным.

Последнее следствие полученных результатов, которое хотелось бы отметить, состоит в том, что периодическое воздействие может вызывать осцилляции для изначально монотонной структуры. Поэтому можно предположить, что некоторые звездные магнитные циклы вызваны именно такими резонансами: без учета резонансов магнитная структура таких звезд была бы стационарной во времени [5, 7, 21]. Конечно, мы не утверждаем, что именно эта ситуация реализуется для Солнца, мы лишь показываем, что такая ситуация в целом возможна, хотя и маловероятна.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность руководству филиала МГУ им. М. В. Ломоносова в г. Баку (Азербайджан) за поддержку научной работы Ф. А. Азизова.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1976) [Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. I, *Механика*, Физматлит, Москва (2004)].

2. A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York (1979).

3. Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*, Gordon and Breach, New York (1983) [Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *Магнитные поля в астрофизике*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва (2006)].

4. H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1978) [Г. Моффат, *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде*, Мир, Москва (1980)].

5. F. Stefani, A. Giesecke, and T. Weier, Sol. Phys. **294**, 60 (2019).

6. D. Sokoloff, E. Nesme-Ribes, and M. Fioc, in *Physical Processes in Astrophysics*, Lect. Notes Phys., Vol. 458, Springer, Berlin (1995).

7. P. Charbonneau, Living Rev. Sol. Phys. **17**, 4 (2020).

8. C. A. Jones, Annu. Rev. Fluid Mech. **43**, 583 (2011).

9. B. A. Buffett, Science **288**, 2007 (2000).

10. J. Wicht and S. Sanchez, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **113**, 2 (2019).

11. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, Nature **377**, 203 (1995).

12. S. M. Tarbeeva, V. B. Semikoz, and D. D. Sokoloff, Astron. Rep. **55**, 456 (2011).

13. F. A. Azizov, E. V. Yushkov, and D. D. Sokoloff, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **168** (2025) [Ф. А. Азизов, Е. В. Юшков, Д. Д. Соколов, ЖЭТФ **168**, 61 (2025)].

14. A. Yu. Serenkova, D. D. Sokoloff, and E. V. Yushkov, J. Exp. Theor. Phys. **136**, 456 (2023) [А. Ю. Серенкова, Д. Д. Соколов, Е. В. Юшков, ЖЭТФ **163**, 514 (2023).

15. D. D. Sokoloff, A. Yu. Serenkova, and E. V. Yushkov, Commun. Byurakan Astrophys. Obs. **69**, 231 (2022).

16. E. N. Parker, Astrophys. J. **122**, 293 (1955).

17. P. H. Roberts, Philos. Trans. R. Soc. London A **272**, 663 (1972).

18. M. Steenbeck, F. Krause, and K.-H. Rädler, Z. fur Naturforsch. A **21**, 369 (1966).

19. S. I. Vainshtein and Ya. B. Zel'dovich, Sov. Phys. Usp. **15**, 159 (1972) [С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, УФН **106**, 431 (1972)].

20. F. Krause and K.-H. Rädler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, Elsevier, Oxford (2016) [Ф. Краузе, К.-Х. Рэдлер, *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо*, Мир, Москва (1984)].

21. A. Brandenburg and K. Subramanian, Phys. Rep. **417**, 1 (2005).

22. D. Schmitt and G. Rüdiger, Astron. Astrophys. **264**, 319 (1992).

23. G. Rüdiger and R. Hollerbach, *The Magnetic Universe: Geophysical and Astrophysical Dynamo Theory*, Wiley-VCH, Weinheim (2004).

24. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*, Marcel Dekker, New York (2001) [А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, Москва (1989)].

25. N. N. Kalitkin, *Numerical Methods*, Nauka, Moscow (1978) (in Russian) [Н. Н. Калиткин, *Численные методы*, Наука, Москва (1978)].

26. R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia (2007).

27. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007).

28. The SciPy Community, *SciPy Documentation*, https://docs.scipy.org/doc/scipy/ (2024).

29. R. T. Merrill, M. W. McElhinny, and P. L. McFadden, *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, Acad. Press, San Diego (1996).

30. M. Kono and P. H. Roberts, Rev. Geophys. **40**, 1013 (2002).

Resonance in the Planetary Dynamo Mechanism

F. A. Azizov [a], ***E. V. Yushkov*** [b,c*], ***D. D. Sokoloff*** [b,d]

[a] Baku Branch of Lomonosov Moscow State University
AZ1143, Baku, Azerbaijan

[b] Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
119991, Moscow, Russia

[c] Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences
117997, Moscow, Russia

[d] Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation of the Russian Academy of Sciences
108840, Troitsk, Moscow, Russia

[*] E-mail: yushkov.msu@mail.ru

Received September 6, 2026
Revised September 6, 2026
Accepted October 5, 2026

Abstract

The possibility of parametric resonance with a steady-state planetary magnetic field within the framework of Parker's spherical dynamo is studied. Numerical simulations demonstrate that a monotonous magnetic field can be transformed into an oscillating one under periodic excitation of the parameters of differential rotation and mirror asymmetry. A resonant transition from a dipole-type structure to a quadrupole-type structure is demonstrated, and the frequency range within which such a transition is possible is estimated. Based on a model example, the potential occurrence of similar phenomena are discussed for dynamo mechanisms forming the steady-state magnetospheres of planets and stars.

Keywords: parametric resonance, Parker dynamo system, magnetohydrodynamics, numerical simulation, eigenmode interaction, beat phenomena, parametric excitation, transition region

Acknowledgements. The authors would like to express their sincere gratitude to the administration of the Baku Branch of Lomonosov Moscow State University (Azerbaijan) for supporting the research of F. A. Azizov.

Conflict of interest. The authors declare that they have no conflict of interest.

Authors' contributions. The contributions of the authors are equal.