ЖЭТФ/JETP, 2026, том 170, вып. 6 (12), стр. 571–594 © 2026

# НЕЛИНЕЙНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ МАССЫ И ЧАСТИЦ ВОЗМУЩЕНИЯМИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ПРОЦЕССЕ ОБРАЗОВАНИЯ СВЕРХМАССИВНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

***Ю. Г. Игнатьев*** [*]***, И. А. Кох*** [**]

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*
*420008, Казань, Россия*

Поступила в редакцию 15 июля 2026 г.
после переработки 25 сентября 2026 г.
Принята к публикации 26 сентября 2026 г.

Исследовано нелинейное влияние неустойчивых возмущений скалярного поля с хиггсовым потенциалом на эволюцию сверхмассивной черной дыры. Радиальные возмущения скалярного поля описываются асимптотическими решениями полной самосогласованной системы уравнений Эйнштейна и скалярного поля в среде идеальной скалярно заряженной жидкости. Квадратичные возмущения скалярного поля формируют гало вокруг образующейся черной дыры, масса которого может значительно превышать сингулярную массу черной дыры. Структура скалярного гало зависит от величины скалярного заряда жидкости. Для слабозаряженной жидкости масса гало может быть отрицательной, тогда может образовываться гало закрытого типа, радиус которого определяется равенством нулю полной массы черной дыры и гало. В этом случае за пределами гало черная дыра не проявляет себя как гравитирующий объект и не влияет на реликтовое излучение. Проведена оценка интенсивности рождения хиггсовых бозонов осцилляциями скалярного поля. В случае квазинейтральной жидкости интенсивность рождения частиц велика и бесконечно растет со временем, в случае скалярно заряженной жидкости интенсивность рождения частиц формирует мощный кратковременный всплеск излучения. При этом число рожденных частиц весьма велико, что позволяет рассматривать гало в качестве тела квазара.

**Ключевые слова:** сверхмассивные черные дыры, скалярно-гравитационная неустойчивость, нелинейная генерация массы, скалярное гало, рождение частиц

**DOI:** 10.31857/S0044451026120055

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В серии статей одного из авторов [1–8] и более ранних работах разрабатывалась теория образования сверхмассивных черных дыр в ранней Вселенной (см., например, [9–16]) на основе механизма скалярно-гравитационной неустойчивости, впервые обнаруженной в забытой уже работе 1985 г. Я. Б. Зельдовичем с соавторами [17], на существование которой любезно указал в 2023 г. М. Ю. Хлопов. Под сверхмассивными черными дырами (supermassive black holes, SMBH) в ранней Вселенной мы здесь понимаем черные дыры с массой $m_{\rm smbh} \gtrsim 10^9 M_\odot$ в центрах квазаров при возрасте Вселенной менее одного миллиарда лет, $z \gtrsim 6$, а под их зародышами (seeds of supermassive black holes, SSBH) [9, 10] — еще более молодые объекты с массой $m_{\rm ssbh} \sim 10^4 \div 10^6 M_\odot \approx 10^{42} \div 10^{44} m_{\rm pl}$.

Поскольку при наличии жизнеспособного зародыша к моменту космологического времени порядка 600 млн лет дальнейшее формирование SMBH обеспечивается стандартными механизмами газодинамической гравитационной неустойчивости (см., например, [16]), наше внимание будет сосредоточено на физических процессах формирования зародышей сверхмассивных черных дыр. В работах [5–7] исследовалась эволюция линейных возмущений Вселенной, заполненной скалярным полем и идеальной жидкостью, в особых точках космологической системы. В этом случае на основе точного решения задачи было показано, что скалярные возмущения экспоненциально быстро вырастают в состоя-

[*] E-mail: Yurii.Ignatev.21@gmail.com
[**] E-mail: kokh90@mail.ru

нии неустойчивой инфляции и затухают в состоянии устойчивой инфляции. При этом продольные гравитационные возмущения вырастают лишь по степенному закону. Таким образом, необходимая скорость роста массы черной дыры не обеспечивается. В связи с этим в [7] было указано два возможных механизма обеспечения необходимой скорости роста гравитационных возмущений.

Первый из предложенных механизмов роста массы на этапе перехода космологической модели из состояния неустойчивой инфляции[1)], т. е. из состояния с постоянным ненулевым значением потенциала скалярного поля, соответствующим нулевому значению потенциальной энергии скалярного поля, которое с точки зрения качественной теории динамических систем является неустойчивым, был исследован в работе [8] и дал положительный результат, обеспечивая экспоненциально быстрый рост массы черной дыры в $10^{25}$ раз за время перехода. Масса черной дыры вырастает за счет разности энергии скалярного поля в неустойчивом и устойчивом состояниях. Этот механизм вполне можно уподобить атомному переходу из высшего энергетического состояния в низшее.

В этой статье мы исследуем второй из предложенных в [7] механизмов генерации массы SMBH в состоянии неустойчивой инфляции — нелинейную генерацию массы квадратичным по возмущениям скалярного поля его тензором энергии-импульса (ТЭИ). Целью статьи является исследование влияния нелинейных эффектов в процессе образования SSBH механизмом скалярно-гравитационной неустойчивости на массу черной дыры и процессы рождения элементарных частиц. Далее в тензорных величинах латинские буквы пробегают значения $\overline{1,4}$, греческие — $\overline{1,3}$, всюду используется планковская система единиц $G = c = \hbar = 1$.

## 2. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СО СКАЛЯРНЫМ ХИГГСОВЫМ ПОЛЕМ

Кратко сформулируем основные положения и результаты работ [1–8], посвященных механизму скалярно-гравитационной неустойчивости.

[1)] В дальнейшем будем использовать этот термин, понимая под ним неустойчивость инфляционного расширения с бóльшим значением космологической постоянной и стремление динамической системы, соответствующей космологической модели, перейти в устойчивое состояние, соответствующее меньшему значению космологической постоянной, т. е. к устойчивой инфляции.

### 2.1. Самосогласованная система уравнений

Космологическая модель, основанная на классическом хиггсовом поле $\Phi$ и идеальной заряженной жидкости, предложенная в [5], основана на системе уравнений Эйнштейна с ТЭИ скалярного поля, $S_k^i$, и идеальной, вообще говоря, скалярно заряженной жидкости, $T_k^i$:

$$R_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i R = 8\pi(T_k^i + S_k^i) + \delta_k^i \Lambda_0, \tag{1}$$

где $\Lambda_0$ — затравочное значение космологической постоянной. При этом функция Лагранжа $L_s$ скалярного хиггсова поля $\Phi$ выбирается в виде

$$L_s = \frac{1}{16\pi}\big(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} - 2V(\Phi)\big), \tag{2}$$

где

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4}\left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2 \tag{3}$$

— потенциальная энергия скалярного поля, $\alpha$ — константа самодействия, $m$ — масса квантов. Компоненты ТЭИ скалярного поля относительно функции Лагранжа (2) равны

$$S_k^i = \frac{1}{8\pi}\left(\Phi^{,i}\Phi_{,k} - \frac{1}{2}\delta_k^i\Phi_{,j}\Phi^{,j} + V(\Phi)\delta_k^i\right).$$

ТЭИ идеальной жидкости равен

$$T_k^i = (\varepsilon + p)u^i u_k - \delta_k^i p,$$

где $u^i$ — единичный времениподобный вектор динамической скорости жидкости, $(u,u) = 1$. Уравнение скалярного поля относительно функции (2) имеет вид

$$\triangle\Phi + V'_\Phi = -8\pi\sigma \Rightarrow \triangle\Phi + \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) = -8\pi\sigma, \tag{4}$$

где $\sigma$ — плотность скалярного заряда [18]. Введем также значение космологической постоянной $\Lambda$, соответствующее нулевому значению потенциала скалярного поля и получающееся изъятием постоянного слагаемого в потенциальной энергии (3):

$$\Lambda = \Lambda_0 - \frac{m^4}{4\alpha}, \qquad \Lambda \leqslant \Lambda_0. \tag{5}$$

В [18] на основе микроскопической динамики скалярно заряженных частиц получены общие выражения для макроскопических скаляров $\sigma$, $p$ и $\varepsilon$, в частности, в явном алгебраическом виде для полностью вырожденной ферми-системы скалярно заряженных частиц. Выражения эти, однако, весьма громоздки и малопригодны для анализа модели [1].

В [5,6] на основе этих результатов построена простая модель скалярно заряженной жидкости, удовлетворяющая предельным соотношениям точной модели в случае достаточно малых скалярных эффективных зарядов $g$:

$$g^2\Phi^2 \ll 1 : \sigma \simeq g^2\Phi\varepsilon, \quad p \simeq \frac{1}{3}\varepsilon(1-g^2\Phi^2), \tag{6}$$

где

$$g^2 \equiv q^2\beta^2 \geqslant 0$$

— безразмерный параметр, пропорциональный квадрату скалярного заряда частиц $q$, а $\beta^2$ — параметр, определяемый функцией распределения частиц. Отметим общее предельное свойство макроскопических скаляров $\sigma$ и $p$, вытекающее из (6):

$$\sigma|_{\varepsilon\to 0} \to 0, \quad p|_{\varepsilon\to 0} \to 0.$$

Вследствие уравнений поля (4) и уравнений Эйнштейна (1) выполняются законы сохранения энергии-импульса системы:

$$\nabla_k T^{ik} - \sigma\nabla^i\Phi = 0. \tag{7}$$

### 2.2. Фоновое состояние

В качестве фоновой рассмотрим пространственно плоскую метрику Фридмана

$$\begin{aligned} ds_0^2 &= dt^2 - a^2(t)(dx^2+dy^2+dz^2) \equiv \\ &\equiv dt^2 - a^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)], \end{aligned} \tag{8}$$

а в качестве фонового решения — однородное изотропное распределение материи, в котором все гидродинамические функции и скалярное поле зависят только от космологического времени $t$:

$$\begin{aligned} &\Phi = \Phi(t), \quad \varepsilon = \varepsilon(t), \\ &p = p(t), \quad u^i = u^i(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Подстановка

$$u^i = \delta^i_4 \tag{10}$$

сводит (7) к одному уравнению

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + 3\frac{\dot a}{a}(\varepsilon + p) = \sigma\dot\Phi, \tag{11}$$

здесь и ниже приняты обозначения

$$\dot f = \partial f/\partial t, \quad f' = \partial f/\partial r.$$

ТЭИ скалярного поля в фоновом состоянии имеет структуру ТЭИ идеальной изотропной жидкости:

$$\begin{aligned} S^{(0)\beta}_{\beta} &= -\frac{1}{16\pi a^2}\dot\Phi^2 - \frac{\alpha}{32\pi}\left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2 \stackrel{\text{def}}{=} -p_s, \\ S^{(0)4}_{4} &= \frac{1}{16\pi a^2}\dot\Phi^2 - \frac{\alpha}{32\pi}\left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_s, \end{aligned} \tag{12}$$

а уравнение фонового скалярного поля (4) в метрике Фридмана принимает вид

$$\ddot\Phi + \frac{3}{a}\dot a\dot\Phi + m^2\Phi - \alpha\Phi^3 = -8\pi\sigma. \tag{13}$$

Таким образом, с учетом (6) получим нормальную автономную систему фоновых уравнений космологической модели на основе скалярного поля и идеальной жидкости — фоновую динамическую систему **S** (см. [5]):

$$\dot\xi = H, \tag{14}$$

$$\dot\Phi = Z, \tag{15}$$

$$\dot H = -\frac{Z^2}{2} - \frac{4\pi}{3}\varepsilon(4 - g^2\Phi^2), \tag{16}$$

$$\dot Z = -3HZ - \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) - 8\pi g^2\Phi\varepsilon, \tag{17}$$

$$\dot\varepsilon = -\varepsilon(4 - g^2\Phi^2)H, \tag{18}$$

где введен параметр Хаббла $H(t)$,

$$H = \frac{\dot a}{a} \equiv \dot\xi. \tag{19}$$

Пятимерная фоновая динамическая система **S** (14)–(18) содержит автономную четырехмерную подсистему (15)–(18). При этом уравнение Эйнштейна $^4_4$, являющееся первым интегралом этой подсистемы с нулевым значением константы, с другой стороны, является уравнением гиперповерхности Эйнштейна–Хиггса [19] в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_4 = \{H, \Phi, Z, \varepsilon\}$, на которой лежат все допустимые фазовые траектории космологической модели:

$$3H^2 - \frac{Z^2}{2} - 8\pi\varepsilon + \frac{\alpha}{4}\left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2 - \Lambda_0 = 0. \tag{20}$$

#### 2.2.1. Особые точки

Особые точки $M_s$ четырехмерной динамической подсистемы и их характеры определяют асимптотическое поведение космологической модели при $t \to \pm\infty$ и вместе с тем существенным образом определяют и поведение неоднородных возмущений космологической модели. Координаты особых точек автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяются равенством нулю их правых частей [20]. Таким образом, в особых точках выполняются условия

$$\begin{aligned} &Z_s = 0, \quad \Phi_s(m^2 - \alpha\Phi_s^2) = 0, \\ &\varepsilon_s = 0, \quad p_s = 0, \quad \sigma_s = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Фазовые траектории динамической системы стремятся к особым точкам в бесконечном будущем либо в бесконечном прошлом [20]. Поэтому соотношения (21) необходимо понимать как асимптотические при $t \to \pm\infty$. Подстановка решений алгебраических уравнений (21) в интеграл (20) дает значение $H = H_s$ в особых точках

$$\begin{aligned} &H_s = \pm\sqrt{\frac{\Lambda_s}{3}}, \\ &\Lambda_s \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_0 - \frac{\alpha}{4}\left(\Phi_s^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Координаты особых точек четырехмерной динамической подсистемы совпадают с координатами особых точек скалярно-вакуумной динамической системы [5, 21]

$$\begin{aligned} M_0^{\pm} &= \left[\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, 0, 0, 0\right], \\ M_{\pm}^{\pm} &= \left[\pm\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}}, \pm\frac{m}{\sqrt{\alpha}}, 0, 0\right], \end{aligned} \tag{23}$$

где космологические постоянные $\Lambda$ и $\Lambda_0$ связаны соотношением (5), причем всегда $\Lambda < \Lambda_0$.

Для обеспечения вещественности координат особых точек (23) необходима вещественность $H_s$, что дает условие

$$\Lambda_s = \Lambda_0 - \frac{\alpha}{4}\left(\Phi_s^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2 \geqslant 0. \tag{24}$$

Из (22) следует, что

$$\Lambda_s \leqslant \Lambda_0. \tag{25}$$

#### 2.2.2. Качественный анализ

Качественный анализ (см. [20]) динамической подсистемы приводит к следующему результату (см. [5]). Все особые точки $M_{\pm}^{\pm}$ являются седловыми, т. е. неустойчивыми. Единственная особая точка $M_0^+$ при условии

$$3\Lambda - 4m^2 < 0 \tag{26}$$

является притягивающим фокусом, т. е. условно устойчивой точкой по отношению к данной моде. При выполнении условий (21) фоновые уравнения гравитационного и скалярного поля сводятся к единственному нетривиальному уравнению Эйнштейна (20):

$$\begin{aligned} &\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} \quad (\Phi_s = 0), \\ &\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda_0}{3} \quad \left(\Phi_s = \pm\frac{m}{\sqrt{\alpha}}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Отсюда следуют известные инфляционные решения для масштабного фактора (см., например, [22]), уточненные значениями космологической постоянной:

$$a(t) = e^{\pm H_s t} : \Phi_s = 0 \Rightarrow H_s = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \tag{28}$$

$$\Phi_s = \pm\frac{m}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow H_s = \sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}}. \tag{29}$$

Особые точки динамической системы представляют собой ее точные решения. В случае притягивающей особой точки это решение является устойчивым, а в случае седловой или отталкивающей точное решение неустойчиво. Таким образом, инфляционное решение (28) устойчиво, а инфляционное решение (29) неустойчиво. Будем называть эти решения устойчивой и неустойчивой инфляцией соответственно. Неустойчивая инфляция соответствует более раннему этапу космологической эволюции. Если космологическая модель находится в состоянии неустойчивой инфляции, то через некоторое время

$$\Delta t_{\text{inf}} \simeq |\max(\operatorname{Re}\lambda_a)|^{-1}, \tag{30}$$

где $\lambda_a$ — собственное значение матрицы динамической системы для неустойчивой моды, она скатится в состояние устойчивой инфляции с меньшим значением постоянной Хаббла.

#### 2.2.3. Масштабные преобразования модели

Конкретная фоновая модель определяется, во-первых, фундаментальными физическими параметрами, которые будем задавать упорядоченным списком

$$\mathbf{P} = [\alpha, m, g, \Lambda_0], \tag{31}$$

и, во-вторых, начальными условиями в некоторый нулевой момент космологического времени $t_0 = 0$ в виде упорядоченного списка значений координат фазового пространства, который можно свести к списку трех величин (подробности см., например, в [1]):

$$\mathbf{I} = [\Phi_0, Z_0, \varepsilon_0, \varkappa], \tag{32}$$

где по умолчанию $\xi(0) = 0$, а $\varkappa = \pm 1$ — знак решения уравнения (20) относительно $H$ в момент $t = 0$. Таким образом, конкретная модель $\mathfrak{M}$ полностью определяется упорядоченным множеством $\mathfrak{M} = [\mathbf{P}, \mathbf{I}]$.

При анализе численных решений фоновой динамической системы важное значение имеет следующее ее свойство подобия, доказанное в работе [21].

Полная система фоновых уравнений пятимерной математической модели инвариантна по отношению к одновременным масштабным преобразованиям с коэффициентом подобия $\ell = \text{const} > 0$ фундаментальных параметров модели

$$\mathcal{S}_\ell(\mathbf{S}) : \alpha = \ell^2\tilde{\alpha}, \quad m = \ell\tilde{m}, \quad e = \sqrt{\ell}\,\tilde{e}, \quad \Lambda_0 = \ell^2\tilde{\Lambda}_0, \tag{33}$$

и ее фазовых координат

$$x^i = \ell^{-1}\tilde{x}^i, \quad \Phi = \tilde{\Phi}, \quad Z = \ell\tilde{Z}, \quad H = \ell\tilde{H}, \quad \varepsilon = \ell^2\tilde{\varepsilon}. \tag{34}$$

При масштабных преобразованиях (33), (34) координаты особых точек также преобразуются по законам (34), а собственные значения матрицы динамической системы — по закону $\lambda = \ell\tilde{\lambda}$ [21].

Свойство подобия позволяет сравнивать космологические модели на различных масштабах взаимодействий, в связи с чем мы здесь будем рассматривать в качестве базовой модель на планковских масштабах, $\mathbf{S}_{\text{Pl}}$, варьируя в ней лишь величину скалярного заряда $g$: $\mathbf{P}_0(g) = [1, 1, g, 0.2527]$. При этом параметры модели великого объединения, $\mathbf{P}_{SU(5)}$, и стандартной модели, $\mathbf{P}_{SM}$, получаются из $\mathbf{P}_0(g)$ с помощью преобразований (33), (34) при значениях коэффициента подобия $\ell = 10^{-4}$ и $\ell = 10^{-15}$ соответственно. Аналогично мы зафиксируем значения начальных данных (32), варьируя в них лишь величину начальной плотности энергии жидкости $\varepsilon_0$: $\mathbf{I}(\varepsilon_0) = [1, 0, \varepsilon_0, 1]$, вводя обозначение для соответствующей модели

$$\mathfrak{M}_{ge} : [[1, 1, 10^{-g}, 0.2527], [1, 0, 10^{-e}, 1]]. \tag{35}$$

Таким образом, в целях упрощения мы оставляем лишь два параметра модели — отрицательные значения логарифмов величины скалярного заряда $g \to -\lg g$ и начального значения плотности энергии жидкости $e = -\lg \varepsilon_0$.

Преобразование результатов к параметрам модели великого объединения, $\mathbf{P}_{SU(5)}$, и стандартной модели, $\mathbf{P}_{SM}$, мы выполним в конце статьи.

#### 2.2.4. Основные свойства фоновой модели

Результаты численного интегрирования [5–7] (см. рис. 1) показывают, что эволюция исследуемой фоновой модели содержит следующие этапы.

1. Начальная сингулярность в момент времени $t_s$, в которой $a(t_s) = 0 \Rightarrow \xi(t_s) = -\infty$, $H(t_s) = +\infty$. Единственный формальный случай, когда начальная сингулярность отсутствует, соответствует неустойчивой инфляции (29), в которой

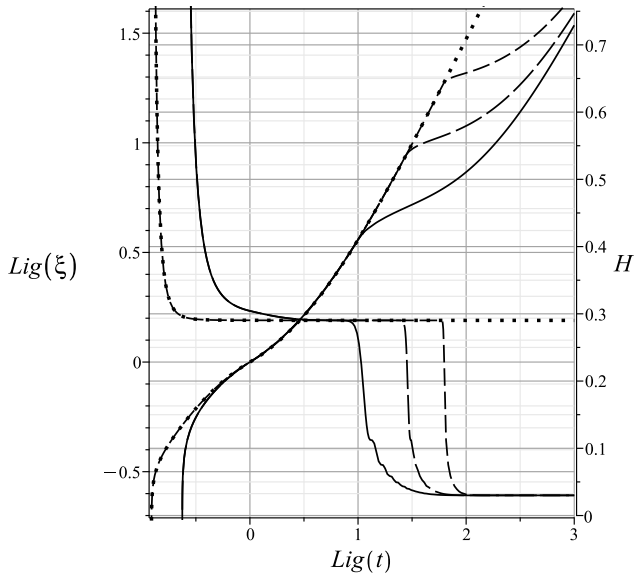



**Рис. 1.** Эволюция $\text{Lig}\,\xi(t)$ (из нижнего левого угла в верхний правый) и $H(t)$ (из верхнего левого угла в нижний правый). Сплошные линии — $\mathfrak{M}_{13}$, штриховые с длинными штрихами — $\mathfrak{M}_{53}$, штриховые — $\mathfrak{M}_{65}$, пунктирные — $\mathfrak{M}_{75}$

$\Phi = \pm m/\sqrt{\alpha}$ и $\varepsilon_s = 0$, но любые даже бесконечно малые отклонения потенциала от значения $\Phi_s$ либо плотности энергии жидкости от нулевого значения тут же восстанавливают начальную сингулярность фоновой космологической системы в конечный момент времени $t_\infty$ [23].

2. После выхода из сингулярного состояния с суммарным ультрарелятивистским уравнением состояния $p = \varepsilon/3$ (см. [24]) космологическая модель переходит в состояние неустойчивой инфляции с $\Phi = \Phi_s$, в котором в случае достаточно больших скалярных зарядов [7]

$$g \gtrsim g_c \approx 10^{-7} \tag{36}$$

находится в течение времени $\Delta t_{\text{inf}}$ (30), после чего скатывается в состояние устойчивой инфляции с $\Phi = 0$ и остается в устойчивом равновесии.

3. В случае малых скалярных зарядов $g < g_c$ модель остается бесконечно долго в состоянии неустойчивой инфляции. Такая модель ведет себя как модель со скалярно нейтральной жидкостью.

Численный пример (рис. 1) демонстрирует перечисленные выше свойства модели $\mathbf{S}_{\text{Pl}}$ на масштабах порядка планковских при значениях фундаментальных параметров $\mathbf{P}_0(g)$. Координаты особых точек в этом случае, согласно (22) и (23), равны

$$M_0^+ = [0.03, 0, 0, 0], M_+^+ = [0.29, 1, 0, 0].$$

Для адекватного отображения графиков с большим разбросом масштабов знакопеременных функций здесь и ниже используется масштабирующая взаимно-однозначная функция $\mathrm{Lig}(z)$ [25]

$$\mathrm{Lig}(z) = \mathrm{sgn}(z)\lg(1+|z|),$$
$$\mathrm{Lig}^{-1}(z) = \mathrm{sgn}(z)(10^{|z|}-1),$$
$$\mathrm{Lig}(z)|_{|z|\to 0} \simeq z,\ \mathrm{Lig}(z)|_{|z|\to\infty} \simeq \mathrm{sgn}(z)\lg|z|.$$

#### 2.2.5. Скалярно заряженная и квазинейтральная жидкость

Приведенные на рис. 1 графики показывают существенное влияние величины скалярного заряда на космологическую эволюцию. При малой величине скалярного заряда (36) космологические модели имеют одну инфляцию с высокой скоростью расширения, при больших значениях скалярного заряда космологические модели имеют две инфляции, причем поздняя имеет гораздо меньшую скорость. Как мы увидим ниже, указанный фактор будет существенно влиять на процесс образования SSBH. В первом случае мы будем говорить о квазинейтральной жидкости $g < g_c$, а во втором — о скалярно заряженной. Заметим, что само критическое значение скалярного заряда $g_c$, вообще говоря, зависит от остальных фундаментальных параметров модели.

Заметим, что масштабы шкалы времени на рис. 1 и 2 различаются в целях детализации области перехода с ранней инфляции на позднюю. Этот переход соответствует моменту времени

$$t_{\mathrm{tr}} \approx 60.8. \tag{37}$$

#### 2.2.6. Две базовые модели

Для простоты ниже мы ограничимся рассмотрением двух соответствующих моделей на планковских масштабах — $\mathfrak{M}_{75}$ с квазинейтральной жидкостью и $\mathfrak{M}_{57}$ со скалярно заряженной жидкостью, на которых ярко проявляются особенности поведения как фоновых моделей, так и их возмущений (см. рис. 2),

$$\mathfrak{M}_{75}:\ [[1,1,10^{-7},0.2527],[1,0,10^{-5},1]],$$
$$\mathfrak{M}_{57}:\ [[1,1,10^{-5},0.2527],[1,0,10^{-7},1]].$$

### 2.3. Сферические возмущения космологической модели

#### 2.3.1. Функции возмущений

Метрику с гравитационными возмущениями запишем в изотропных сферических координатах с

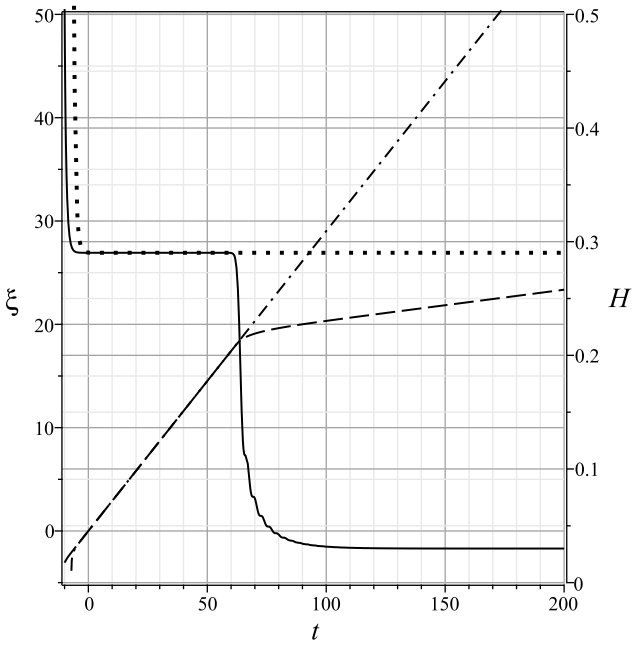



**Рис. 2.** Эволюция $\xi(t)$ и $H(t)$: штрихпунктирная и пунктирная линии — модель $\mathfrak{M}_{75}$, штриховая и сплошная — $\mathfrak{M}_{57}$

конформно-евклидовой метрикой трехмерного пространства (см., например, [26]), допускающей непрерывный переход к метрике Фридмана (8) [6]:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}dt^2 - a^2(t)e^{\lambda(r,t)}\times \\ \times\,[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{38}$$

где $\nu(r,t)$ и $\lambda(r,t)$ — малые продольные возмущения метрики Фридмана ($\nu \ll 1,\ \lambda \ll 1$). Полагая для возмущений скалярного поля, плотности энергии и вектора скорости жидкости

$$\begin{aligned} &\Phi(r,t) = \Phi(t) + \phi(r,t),\\ &\varepsilon(r,t) = \varepsilon(t) + \delta\varepsilon(r,t),\\ &p(r,t) = p(t) + \delta p(r,t),\\ &\sigma(r,t) = \sigma(t) + \delta\sigma(r,t),\\ &u^i = e^{-\nu(r,t)/2}\delta^i_4 + \frac{\upsilon(r,t)}{a^2}\delta^i_1, \end{aligned} \tag{39}$$

где $\Phi(t)$, $\varepsilon(t)$ и $p(t)$ — теперь уже невозмущенные (фоновые) значения этих величин, а $\phi(r,t)$, $\upsilon(r,t)$ и $\delta\varepsilon(r,t)$ — их малые возмущения, получим для модели **S** (6)

$$\begin{aligned} &\sigma = g^2\Phi_0\varepsilon,\\ &\delta p = \frac{1}{3}\big[\delta\varepsilon(1-g^2\Phi^2) - 2g^2\varepsilon\Phi\phi\big],\\ &p = \frac{1}{3}\varepsilon(1-g^2\Phi^2),\\ &\delta\sigma = g^2(\phi\varepsilon + \Phi\delta\varepsilon). \end{aligned} \tag{40}$$

Следуя логике задачи о генерации гравитационных возмущений квадратичными возмущениями скалярного поля, в этой статье мы будем пренебрегать квадратичными членами по гравитационным возмущениям $\lambda$ и $\nu$ и произведениями типа $\lambda\phi, \nu\phi$, но при этом будем удерживать квадратичные по возмущениям скалярного поля члены в уравнениях Эйнштейна. Также будем пренебрегать квадратичными по $\phi$ членами в уравнении скалярного поля, предполагая, согласно логике приближений, следующую иерархию величин возмущений:

$$|\lambda(r,t)|,\ |\nu(r,t)| \ll |\phi(r,t)| \ll 1 \Leftrightarrow \phi^2 \ll |\phi|. \quad (41)$$

#### 2.3.2. Возмущения суммарного ТЭИ

Отличные от нуля линейные возмущения компонент суммарного ТЭИ имеют вид

$$8\pi\delta(S^\beta_\beta + T^\beta_\beta) = \phi\Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) - \dot\phi\dot\Phi + \frac{1}{2}\nu\dot\Phi^2 - 8\pi\delta p, \quad \beta = \overline{1,3}, \quad (42)$$

$$8\pi\delta(S^4_4 + T^4_4) = \phi\Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) + \dot\phi\dot\Phi - \frac{1}{2}\nu\dot\Phi^2 + 8\pi\delta\varepsilon, \quad (43)$$

$$8\pi\delta(S^1_4 + T^1_4) = \dot\Phi\phi' - \upsilon(\varepsilon + p) \Rightarrow \Rightarrow -\frac{1}{a^2}\delta(S^4_1 + T^4_1) = \delta(S^1_4 + T^1_4), \quad (44)$$

а возмущения второго порядка ТЭИ скалярного поля есть

$$8\pi\delta^{(2)}S^1_1 = \frac{1}{2}\phi^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2) - \frac{1}{2}\dot\phi^2 - \frac{1}{2a^2}\phi'^2, \quad (45)$$

$$8\pi\delta^{(2)}S^2_2 = \frac{1}{2}\phi^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2) - \frac{1}{2}\dot\phi^2 + \frac{1}{2a^2}\phi'^2, \quad (46)$$

$$8\pi\delta^{(2)}S^4_4 = \frac{1}{2}\phi^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2) + \frac{1}{2}\dot\phi^2 + \frac{1}{2a^2}\phi'^2, \quad (47)$$

$$8\pi\delta^{(2)}S^1_4 = -\frac{1}{a^2}\phi'\dot\phi, \qquad \delta^{(2)}S^3_3 = \delta^{(2)}S^2_2. \quad (48)$$

Таким образом, отличные от нуля возмущения компонент суммарного ТЭИ принимают вид

$$8\pi\delta^{(2)}(S^1_1 + T^1_1) = \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2)\phi - Z\dot\phi + \frac{1}{2}Z^2\nu - 8\pi\delta p + \frac{1}{2}(m^2 - 3\alpha\Phi^2)\phi^2 - \frac{1}{2}\dot\phi^2 - \frac{1}{2}\phi'^2,$$

$$8\pi\delta^{(2)}(S^4_4 + T^4_4) = \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2)\phi + Z\dot\phi - \frac{1}{2}Z^2\nu + 8\pi\delta\varepsilon + \frac{1}{2}(m^2 - 3\alpha\Phi^2)\phi^2 + \frac{1}{2}\dot\phi^2 + \frac{1}{2a^2}\phi'^2,$$

$$8\pi\delta^{(2)}(S^1_4 + T^1_4) = -(\varepsilon + p)\upsilon + Z\phi' + \dot\phi\phi',$$

$$\delta^{(2)}(S^2_2 + T^2_2) = \delta(S^3_3 + T^3_3) = \delta(S^1_1 + T^1_1) + \frac{\phi'^2}{8\pi a^2}.$$

#### 2.3.3. Возмущенное уравнение скалярного поля

Из уравнения скалярного поля (4), пренебрегая, согласно (41), квадратичными по возмущениям скалярного поля членами, получим линейное уравнение относительно его возмущения $\phi(r,t)$:

$$\ddot\phi + 3H\dot\phi - \frac{1}{a^2}\Delta_r\phi + (m^2 - 3\alpha\Phi^2 + 8\pi g^2\varepsilon)\phi + \frac{Z}{2}(3\dot\lambda - \dot\nu) + \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2 + 8\pi g^2\varepsilon)\nu + 8\pi g^2\Phi\delta\varepsilon = 0, \quad (49)$$

где $\Delta_r$ — радиальная часть оператора Лапласа в сферических координатах трехмерного евклидова пространства,

$$\Delta_r\phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}.$$

Уравнение для возмущений скалярного поля полностью совпадает с соответствующим уравнением в статье [7].

#### 2.3.4. Возмущенные уравнения Эйнштейна

Имеем

$$\ddot\lambda + H(3\dot\lambda - \dot\nu) - \frac{(\lambda+\nu)'}{a^2r} + Z\dot\phi - \left[3H^2 - \frac{Z^2}{2} - \frac{8\pi}{3}\varepsilon(4 - g^2\Phi^2)\right]\nu - \Phi\left(m^2 - \alpha\Phi^2 + \frac{16\pi}{3}g^2\varepsilon\right)\phi + \frac{8\pi}{3}\delta\varepsilon(1 - g^2\Phi^2) - \frac{m^2 - 3\alpha\Phi^2}{2}\phi^2 + \frac{\dot\phi^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2a^2} = 0, \quad (50)$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda+\nu)\right) = -2\phi'^2, \quad (51)$$

$$-\frac{1}{a^2}\Delta_r\lambda + 3H\dot\lambda - Z\dot\phi - \left(3H^2 - \frac{Z^2}{2}\right)\nu - \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2)\phi - \frac{1}{2}(m^2 - 3\alpha\Phi^2)\phi^2 - \frac{\dot\phi^2}{2} - \frac{\phi'^2}{2a^2} = 8\pi\delta\varepsilon, \quad (52)$$

$$\frac{8\pi}{3}\varepsilon(4 - g^2\Phi^2)\upsilon - (Z\phi - H\nu + \dot\lambda)' = 0. \quad (53)$$

Обратимся сначала к уравнению (51), которое получается в результате разности диагональных уравнений Эйнштейна. Если пренебречь квадратом возмущения скалярного поля $\phi'^2$ в правой части этого уравнения, мы получим линейное уравнение относительно суммы $\lambda + \nu$:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda+\nu)\right) = 0,$$

имеющее решение

$$\lambda+\nu=\frac{1}{2}C_1r^2+C_2.$$

Вследствие условий перехода решений линейной системы в фоновое решение на пространственной бесконечности должны выполняться нулевые граничные условия:

$$\begin{aligned}&\lambda(r,t)|_{r\to\infty}=\nu(r,t)|_{r\to\infty}=\phi(r,t)|_{r\to\infty}=0,\\&\lambda'(r,t)|_{r\to\infty}=\nu'(r,t)|_{r\to\infty}=\phi'(r,t)|_{r\to\infty}=0.\end{aligned}\tag{54}$$

Отсюда следует, что в решении (51) должно быть $C_1=C_2=0$. Таким образом, в линейном приближении

$$\nu(r,t)=-\lambda(r,t).\tag{55}$$

Интегрируя (51) с учетом предыдущего результата, получим

$$\nu=-\lambda-2\int\limits_{r_0}^{r}r\,dr\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\phi'^2}{r}dr\quad(=-\lambda+O^2(\phi)).\tag{56}$$

Таким образом, согласно принятому приближению (41), в уравнении для возмущений скалярного поля (49) можно использовать линейное соотношение (55), с помощью которого приведем это уравнение к виду

$$\begin{aligned}&\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}-\frac{1}{a^2}\Delta_r\phi+\phi(m^2-3\alpha\Phi^2+8\pi g^2\varepsilon)+\\&+2Z\dot{\lambda}-(m^2\Phi-\alpha\Phi^3+8\pi g^2\varepsilon)\lambda+8\pi g^2\Phi\delta\varepsilon=0.\end{aligned}\tag{57}$$

#### 2.3.5. Уравнения для возмущений с исключенными материальными функциями

Итак, полагая $\varepsilon\not\equiv 0$, получим из (53) определение радиальной скорости:

$$\upsilon=\frac{3}{8\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{Z\phi+\dot{\lambda}-H\nu}{\varepsilon(4-g^2\Phi^2)}.$$

Исключая $\delta\varepsilon$ с помощью (52) в уравнениях (50) и (57) и вводя новую функцию

$$\gamma(r,t)\equiv\lambda(r,t)+\nu(r,t)\quad(=O^2(\phi)),\tag{58}$$

получим систему трех независимых дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех неизвестных функций $\lambda(r,t)$, $\gamma(r,t)$ и $\phi(r,t)$:

$$\begin{aligned}&\ddot{\lambda}+H(5-g^2\Phi^2)\dot{\lambda}-\frac{1-g^2\Phi^2}{3a^2}\Delta_r\lambda+\frac{Z}{3}(2+g^2\Phi^2)\dot{\phi}+\\&+\frac{4-g^2\Phi^2}{3}\left(3H^2-\frac{Z^2}{2}-8\pi\varepsilon\right)\lambda-\\&-\frac{4-g^2\Phi^2}{3}\Phi(m^2-\alpha\Phi^2)\phi-\frac{16\pi}{3}g^2\varepsilon\Phi\phi=\\&=H\dot{\gamma}+\frac{\gamma'}{a^2r}+\frac{4-g^2\Phi^2}{3}\left(3H^2-\frac{Z^2}{2}-8\pi\varepsilon\right)\gamma+\\&+\frac{4-g^2\Phi^2}{6}(m^2-3\alpha\Phi^2)\phi^2-\frac{2+g^2\Phi^2}{6}\left(\dot{\phi}^2+\frac{\phi'^2}{a^2}\right),\end{aligned}\tag{59}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{\phi}-\frac{1}{a^2}\Delta_r\phi+\left(3H-g^2\Phi Z\right)\dot{\phi}-\\&-\frac{g^2\Phi}{a^2}\Delta_r\lambda+(2Z+3g^2\Phi H)\dot{\lambda}-\\&-\Phi\left(m^2-\alpha\Phi^2+8\pi g^2\varepsilon+\frac{1}{2}g^2Z^2-3g^2H^2\right)\lambda+\\&+[m^2-3\alpha\Phi^2-g^2\Phi^2(m^2-\alpha\Phi^2)+8\pi g^2\varepsilon]\phi=0,\end{aligned}\tag{60}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\gamma'}{r}\right)=-\frac{2}{r}\phi'^2.\tag{61}$$

## 3. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Пренебрегая пока квадратичными по возмущениям членами в уравнениях (59)–(61), рассмотрим линейную модель возмущений. При этом, согласно (55), в линейном приближении $\gamma(r,t)=0\Rightarrow\lambda(r,t)=-\nu(r,t)$, в результате чего получаем следующую линейную систему двух уравнений относительно функций $\nu(r,t)$ и $\phi(r,t)$:

$$\begin{aligned}&\ddot{\nu}+H(5-g^2\Phi^2)\dot{\nu}-\frac{1-g^2\Phi^2}{3a^2}\Delta_r\nu-\frac{Z}{3}(2+g^2\Phi^2)\dot{\phi}+\\&+\frac{4-g^2\Phi^2}{3}\left(3H^2-\frac{Z^2}{2}-8\pi\varepsilon\right)\nu+\\&+\frac{4-g^2\Phi^2}{3}\Phi(m^2-\alpha\Phi^2)\phi+\frac{16\pi}{3}g^2\varepsilon\Phi\phi=0,\end{aligned}\tag{62}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{\phi}-\frac{1}{a^2}\Delta_r\phi+\left(3H-g^2\Phi Z\right)\dot{\phi}+\\&+\frac{g^2\Phi}{a^2}\Delta_r\nu-(2Z+3g^2\Phi H)\dot{\nu}+\\&+\Phi\left(m^2-\alpha\Phi^2+8\pi g^2\varepsilon+\frac{1}{2}g^2Z^2-3g^2H^2\right)\nu+\\&+[m^2-3\alpha\Phi^2-g^2\Phi^2(m^2-\alpha\Phi^2)+8\pi g^2\varepsilon]\phi=0.\end{aligned}\tag{63}$$

### 3.1. Линейная модель черной дыры

Линейность уравнений (62), (63) и наличие оператора Лапласа $\Delta_r$ позволяют выделить в решени-

ях $\nu(r,t)$ и $\phi(r,t)$ этих уравнений сингулярные при $r=0$ части [1,7]:

$$\nu(r,t)=2\frac{\rho(r,t)-M(t)}{ar}\equiv-\frac{2\mu(r,t)}{a(t)r},$$
$$\phi(r,t)=2\frac{\varphi(r,t)-Q(t)}{ar}\equiv-\frac{2\psi(r,t)}{a(t)r}, \tag{64}$$

где амплитуды $\rho(r,t)$ и $\varphi(r,t)$ соответствуют несингулярным частям возмущений.

Заметим (см. [1]), что при подстановке (64) в возмущенную метрику (38) последняя принимает форму метрики, конформной сферически-симметричной метрике внутри гравитирующего вещества с полной массой $\mu(r,t)$ шара радиусом $r$ [27], а потенциал возмущенного скалярного поля — вид кулоновского потенциала с зарядом $\psi(r,t)$ внутри этой же сферы (см. [7]):

$$ds^2=\left[1-\frac{2\mu(r,t)}{a(t)r}\right]dt^2-\frac{dr^2+r^2(d\Omega^2+\sin^2\Omega\,d\varphi^2)}{1-2\mu(r,t)/a(t)r}. \tag{65}$$

При $r\to 0$ она переходит в метрику Шварцшильда с метрическими коэффициентами

$$g_{44}|_{r\to0}=1-\frac{2M(t)}{R(t)},$$
$$g_{11}|_{r\to0}=-\frac{a(t)^2}{1-2M(t)/R(t)}, \tag{66}$$

где

$$R=\int ds_0(t,\theta,\varphi=\mathrm{const})=a(t)r \tag{67}$$

— физический радиус. Таким образом, с помощью преобразований (64) мы получаем линейную модель черной дыры с сингулярными массой $M(t)$ и скалярным зарядом $Q(t)$. В рамках этой модели удобно интерпретировать результаты исследований.

### 3.2. Выделение сингулярных частей решений

В результате преобразования (64) система уравнений (62), (63) распадается на две подсистемы, из которых первая, независимая, является системой обыкновенных линейных однородных уравнений относительно полной массы $M(t)$ и скалярного заряда $Q(t)$ черной дыры:

$$\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{O}(t)\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{P}(t)\mathbf{X}=\mathbf{0}, \tag{68}$$

где введены матрицы

$$\mathbf{X}=\begin{Vmatrix} M \\ Q \end{Vmatrix},\qquad \mathbf{P}(t)=\begin{Vmatrix} p^m_m p^q_m \\ p^m_q p^q_q \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{O}(t)=\begin{Vmatrix} (3-g^2\Phi^2)H-\dfrac{2+g^2\Phi^2}{3}Z \\ -(2Z+3g^2\Phi H)H-g^2\Phi Z \end{Vmatrix}$$

и матричные коэффициенты $p^\alpha_\beta$:

$$p^m_m=-\frac{1}{3}\left[(1-g^2\Phi^2)\frac{Z^2}{2}+4\pi\varepsilon(4-g^2\Phi^2)\right],$$
$$p^q_m=\frac{1}{3}[(2+g^2\Phi^2)ZH+$$
$$+(4-g^2\Phi^2)\Phi(m^2-\alpha\Phi^2)+16\pi\varepsilon g^2\Phi],$$
$$p^q_q=\left[\frac{Z^2}{2}-2H^2+g^2\Phi ZH+m^2-3\alpha\Phi^2-\right.$$
$$\left.-g^2\Phi^2(m^2-\alpha\Phi^2)+\frac{4\pi\varepsilon}{3}(4-g^2\Phi^2+6g^2)\right],$$
$$p^m_q=\left[2ZH+\frac{Z^2}{2}g^2\Phi+\Phi(m^2-\alpha\Phi^2)+8\pi g^2\Phi\varepsilon\right].$$

Вторая независимая система линейных однородных уравнений в частных производных относительно несингулярных функций $\rho(r,t)$ и $\chi(r,t)$ имеет вид

$$\ddot{\mathbf{Y}}-\mathbf{L}(t)\mathbf{Y}''+\mathbf{O}(t)\dot{\mathbf{Y}}+\mathbf{P}(t)\mathbf{Y}=\mathbf{0}, \tag{69}$$

где введены матрицы

$$\mathbf{Y}=\begin{Vmatrix} \rho \\ \varphi \end{Vmatrix},\quad \mathbf{L}(t)=\frac{1}{a^2}\begin{Vmatrix} \frac{1}{3}(1-g^2\Phi^2) & 0 \\ -g^2\Phi & 1 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, во-первых, что все коэффициенты системы (69), кроме коэффициентов при вторых частных производных по радиальной переменной, совпадают с соответствующими коэффициентами системы (68). Во-вторых, система уравнений (69) при $g^2<1$ является гиперболической, поскольку положителен определитель матрицы $\mathbf{L}(t)$, как и ее собственные числа. В-третьих, как показано, например, в [8], независимость подсистемы (69) является формальной — при наложении начальных граничных условий на системы (68), (69) решения этой подсистемы определяются через начальные условия подсистемы (68).

### 3.3. Методы численного интегрирования задачи

В работах [1, 5–8, 28, 29] система уравнений для возмущений (68) и (69) интегрировалась совместно с динамической системой фоновых уравнений (14)–(18). При этом исследование столкнулось с достаточно сложными проблемами численного интегрирования, существенно ограничивающими возможности исследования. Несмотря на внешне простой вид системы линейных однородных уравнений (68) и (69), их интегрирование представляет

достаточно сложную задачу в силу двух обстоятельств. Первое — коэффициенты уравнений, определяющие матрицы $\mathbf{O}(t)$, $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{L}(t)$, в свою очередь, сами определяются численными решениями существенно нелинейной фоновой динамической системы (14)–(18). При этом, как мы видели на примерах рис. 1, 2, фоновая динамическая система может иметь скачкообразный переход из состояния неустойчивой инфляции в состояние устойчивой. Такие переходы сопровождаются высокочастотными колебаниями возмущенных величин. Все это вместе взятое порождает второе обстоятельство — существенную жесткость системы уравнений для возмущений, приводящую к неустойчивости численных решений и требующую привлечения специальных средств численного интегрирования. В данной работе указанные обстоятельства играют важную роль, в связи с чем мы кратко опишем основные методы численного интегрирования задачи.

Вследствие линейности и однородности системы уравнений (68) ее решения обладают следующим свойством. Пусть $S = [M(t), Q(t)]$ — решение задачи Коши для этой системы с начальными условиями $\mathbf{I}_{MQ}(M_0, Q_0) = [M(0) = M_0,\ Q(0) = Q_0,\ \dot{M}(0) = 0,\ \dot{Q}(0) = 0]$. Тогда решение задачи Коши для этой же системы с начальными условиями $\mathbf{I}_{MQ}(kM_0, kQ_0)$ есть $[kM(t), kQ(t)]$. Это свойство полностью подтверждается и численным интегрированием.

Используя это свойство, мы можем решать задачу Коши с небольшими значениями начальных условий $M_0, Q_0$ и затем простым умножением получать решения для физически значимых начальных условий. Это особенно полезно с учетом неустойчивости численных методов интегрирования при больших значениях начальных условий. Таким образом, можно сгенерировать численные решения задачи Коши для базисных начальных условий

$$\begin{aligned} &\mathbf{I}_{MQ}(1,0) = [M(0) = 1, Q(0) = 0],\\ &\mathbf{I}_{MQ}(0,1) = [M(0) = 0, Q(0) = -1],\\ &\mathbf{I}_{MQ}(1,1) = [M(0) = 1, Q(0) = -1]. \end{aligned} \tag{70}$$

Сгенерированные на заданном временном интервале в списочном формате численные решения конвертируются в сплайны, а затем — в кусочно-непрерывные функции. Это дает возможность применения численно-аналитических методов, на порядок уменьшающих время численного интегрирования.

Последующее численное интегрирование уравнений (68) и (69) с уже аналитически заданными коэффициентами проводилось численными методами Розенброка и Гира, приспособленными для решения жестких систем. Сравнение результатов, полученных этими методами, показало достаточно хорошее совпадение при не слишком высокой заданной абсолютной погрешности ($\Delta M \sim 10^{-10}$), но при этом метод Гира дает более высокую скорость вычислений.

### 3.4. Эволюция сингулярной массы $M(t)$

В процессе образования сверхмассивной черной дыры ее сингулярная масса играет ключевую роль. Эволюция массы $M(t)$ и скалярного заряда $Q(t)$, определяемая системой линейных уравнений (68), в различных моделях жидкости и при различных параметрах исследовалась в предыдущих работах [1, 7, 8, 28]. В этих работах показано, что с течением космологического времени сингулярная масса черной дыры в модели $\mathfrak{M}_{57}$ стремится к некоторому постоянному пределу $M(t)_{t\to\infty} \to M_\infty = \text{const}$.

На рис. 3, 4 показаны графики эволюции сингулярной массы $M(t)$ в моделях $\mathfrak{M}_{57}$ и $\mathfrak{M}_{75}$ в зависимости от начальной массы $M_0$ при $Q_0 = 0$.

На рис. 5 показано влияние начального скалярного заряда $Q_0$ на эволюцию сингулярной массы $M(t)$. Наличие в начальном состоянии скалярного заряда на 16 порядков повышает значение конечной сингулярной массы. К анализу этих результатов мы

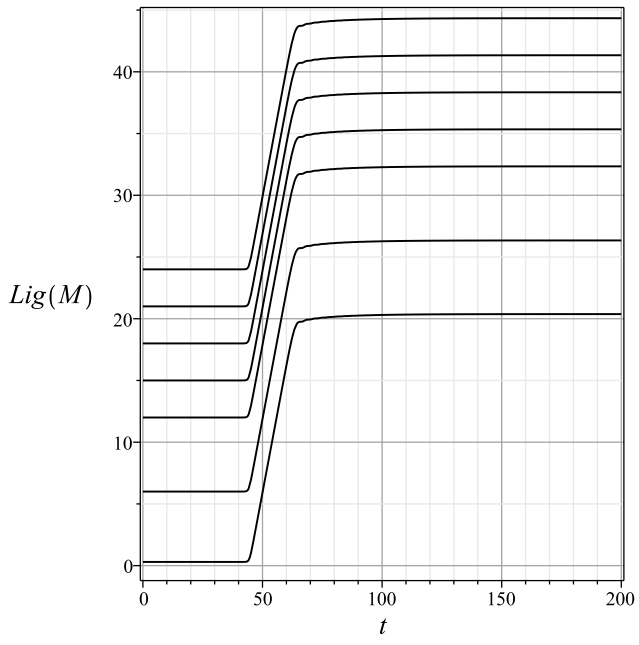



**Рис. 3.** Эволюция $M(t)$ в модели со скалярно заряженной жидкостью $\mathfrak{M}_{57}$ при $Q_0 = 0$. Кривые (снизу вверх): $M_0 = 1,\ 10^6,\ 10^{12},\ 10^{15},\ 10^{18},\ 10^{21},\ 10^{24}$

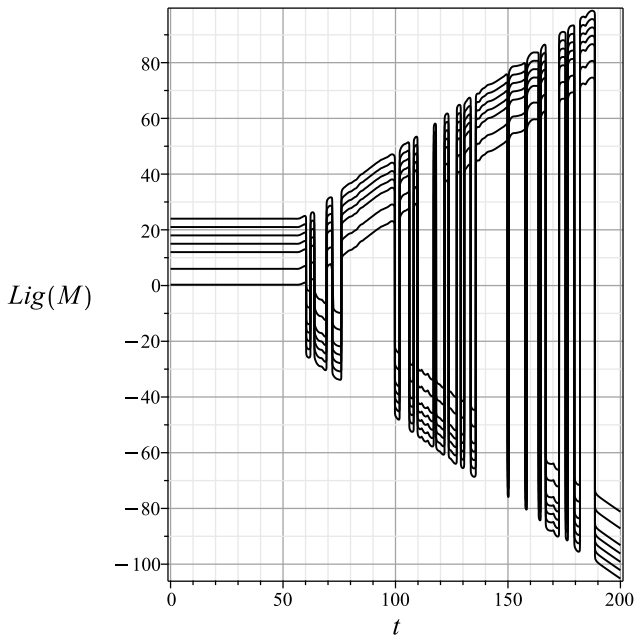



**Рис. 4.** Эволюция $M(t)$ в модели с квазинейтральной жидкостью $\mathfrak{M}_{75}$ при $Q_0 = 0$. Кривые (снизу вверх): $M_0 = 1,\ 10^6,\ 10^{12},\ 10^{15},\ 10^{18},\ 10^{21},\ 10^{24}$

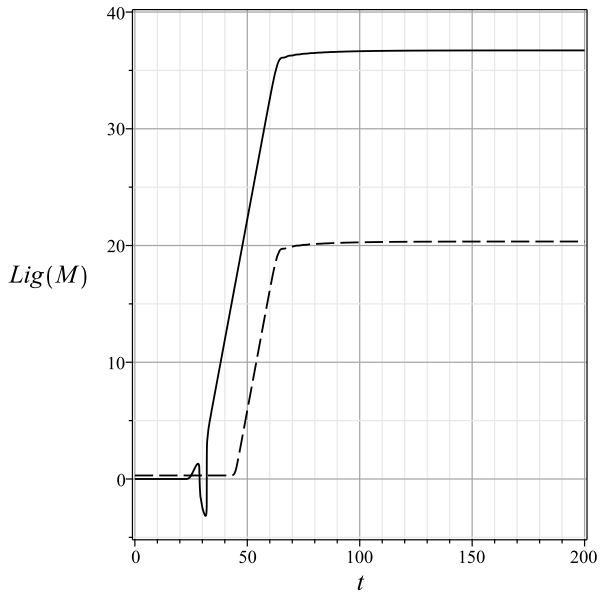



**Рис. 5.** Эволюция $M(t)$ в модели со скалярно заряженной жидкостью $\mathfrak{M}_{57}$: штриховая линия — $M_0 = 1$, $Q_0 = 0$, сплошная линия — $M_0 = 0$, $Q_0 = -1$

вернемся в разд. 7. Согласно рис. 3 и 5, для модели $\mathfrak{M}_{57}$ справедлива оценка конечного значения массы:

$$\begin{aligned} &[M_0,\ Q_0 = 0]: \quad M_\infty \simeq 2.4 \cdot 10^{20} M_0, \\ &[M_0 = 0,\ Q_0]: \quad M_\infty \simeq 5 \cdot 10^{36} Q_0. \end{aligned} \tag{71}$$

## 4. ПРИБЛИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

### 4.1. Уравнение для возмущений свободного скалярного поля

В особых точках космологической системы уравнения (68) и (69) имеют точные решения, выражающиеся через функции Бесселя первого рода [5, 6]. В дальнейшем нам понадобятся аналитические выражения амплитуд возмущения $\phi(r,t)$ вне особых точек. Для описания эволюции таких возмущений скалярного поля используем приближение свободного скалярного поля, получающееся при условии малости возмущений гравитационного поля по сравнению с возмущениями скалярного поля, $|\lambda(r,t)|,\ |\nu(r,t)| \ll |\phi(r,t)|$, по крайней мере вблизи особых точек (детали см. в [28]). При этом мы сохраним связь возмущений скалярного поля со скалярными зарядами, т. е. свобода скалярного поля понимается как независимость от возмущений метрики, но не плотности энергии. В этом случае уравнение для возмущений скалярного поля (60) примет вид

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2}\Delta_r \phi + (3H - g^2\Phi Z)\dot{\phi} + \\ +[m^2 - 3\alpha\Phi^2 - g^2\Phi^2(m^2 - \alpha\Phi^2) + 8\pi g^2 \varepsilon]\phi = 0. \tag{72}$$

Отсюда при $g = 0$ получаем вид точного уравнения в особых точках фоновой динамической системы (см. [7]) с тем лишь отличием, что коэффициенты уравнения (72) $a = \exp(\xi(t))$, $H(t)$ и $\Phi(t)$ не определяются координатами особой точки, а являются решениями фоновой динамической системы. В соответствии с (64) будем искать решение уравнения (72) в виде

$$\phi(r,t) = \frac{e^{inr}}{r}\vartheta_n(t). \tag{73}$$

Подставляя (73) в (72), получим каноническое обыкновенное дифференциальное уравнение колебаний с трением относительно функции $\vartheta_n(t)$:

$$\ddot{\vartheta}_n + p(t)\dot{\vartheta}_n + q(t)\vartheta_n = 0, \tag{74}$$

где

$$p(t) = 3H - g^2\Phi Z,$$
$$q(t) = m^2 - 3\alpha\Phi^2 + n^2 e^{-2\xi} - g^2\Phi^2(m^2 - \alpha\Phi^2) + 8\pi g^2\varepsilon.$$

Проводя, согласно [30], преобразование Лапласа

$$\vartheta_n(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t p(\tau)d\tau\right\}u(t), \tag{75}$$

получим линейное уравнение колебаний с частотой $\omega_n(t)$ относительно амплитуды $u(t)$:

$$\ddot{u} + \omega_n^2(t)u = 0, \tag{76}$$

где

$$\omega_n^2(t) = q(t) - p^2/4 - \dot{p}/2 = m^2 - 3\alpha\Phi^2 + \frac{n^2}{a^2} - \\ -\frac{3}{4}(3H^2 - Z^2) - \frac{3}{2}g^2\Phi^2(m^2 - \alpha\Phi^2) + \\ +\frac{1}{4}g^2Z^2(2 - g^2\Phi^2) + 8\pi\varepsilon(1 + g^2) - 2\pi g^2\Phi^2\varepsilon(1 + 2g^2).$$

Вычисляя интеграл в (75) с учетом (32), найдем

$$\frac{1}{2}\int_0^t p(\tau)d\tau = \frac{3}{2}\xi(t) + \frac{1}{2}(\Phi^2(t) - \Phi^2(0)).$$

### 4.2. Асимптотическое решение

Найдем асимптотическое решение уравнения (76) для больших значений $\omega_n^2$ и тем самым и для возмущений скалярного поля (72), верное во всем фазовом пространстве [28]:

$$\phi(r,t) = \frac{e^{inr}}{r}\frac{\exp\left(-\frac{3}{2}\xi(t) - \frac{1}{2}(\Phi^2(t) - \Phi^2(0))\right)}{|\omega_n(t)|^{1/2}} \times \\ \times \sum_{\pm} C_n^{\pm} e^{\pm iS_n(t_0,t)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{inr}}{r}\theta_n(t), \tag{77}$$

где

$$\theta_n(t) = \sum_{\pm} C_n^{\pm}\theta_n^{\pm}(t)$$

и введена функция эйконала $S_n(t_0,t)$ (см. [26]):

$$S_n(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} \omega_n(t)dt. \tag{78}$$

В [5] и [7] использовались асимптотические решения уравнения, аналогичного (76), для плоских и сферических скалярных возмущений соответственно. Эти решения соответствовали достаточно грубым оценкам. В этой статье мы используем более точные асимптотические оценки на основе асимптотической теории дифференциальных уравнений (см., например, [30]). На рис. 6, 7 показаны графики эволюции функции эйконала, полученные комбинированным применением численного интегрирования и сплайновой интерполяции.

Таким образом, в модели $\mathfrak{M}_{75}$ с момента времени $t = t_0 = 0$ имеют место соотношения $\mathrm{Re}(S(t)) = 0$ и $\mathrm{Im}(S(t)) \approx 3t/2$. Полная фаза колебаний равна

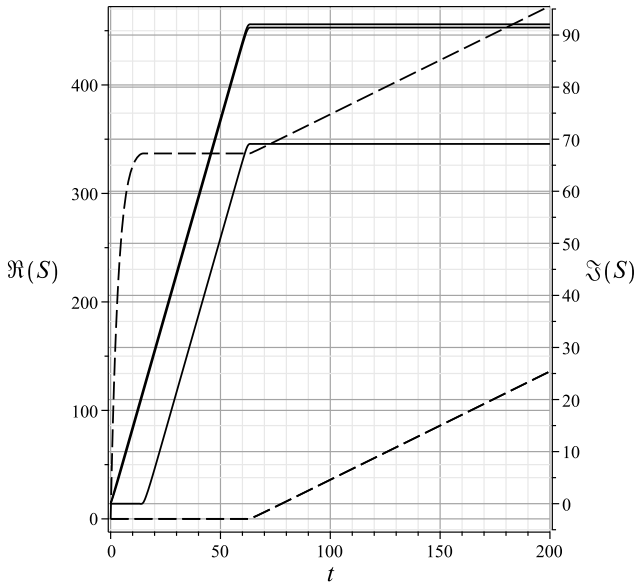



**Рис. 6.** Функция эйконала $S_n(t)$ (78) в космологической модели $\mathfrak{M}_{57}$ при $n = 1$: сплошная линия — $\mathrm{Im}(S_n)$, штриховая — $\mathrm{Re}(S_n)$

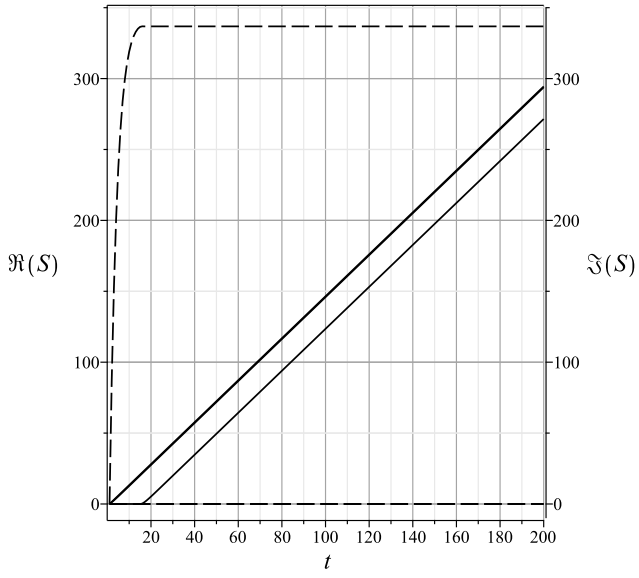



**Рис. 7.** Функция эйконала $S_n(t)$ (78) в космологической модели $\mathfrak{M}_{75}$ при $n = 1$: сплошная линия — $\mathrm{Im}(S_n)$, штриховая — $\mathrm{Re}(S_n)$

$f = inr \mp 3t/2$, т. е. возмущения скалярного поля представляют собой пару стоячих волн, из которых одна затухает, другая экспоненциально быстро возрастает. В модели $\mathfrak{M}_{57}$ при $t \in [0, t_1 \approx 63.13]$ $\mathrm{Re}(S(t)) = 0$, $\mathrm{Im}(S(t)) \approx \gamma_{57}t \approx 5t/4$, при $t > t_1$ $\mathrm{Re}(S(t)) = \omega_{57}t \approx t$, $\mathrm{Im}(S(t)) = \chi_{57} = \mathrm{const} \approx 91$. Таким образом, в модели $\mathfrak{M}_{57}$ до момента времени $t_1$ возмущения скалярного поля представляют собой

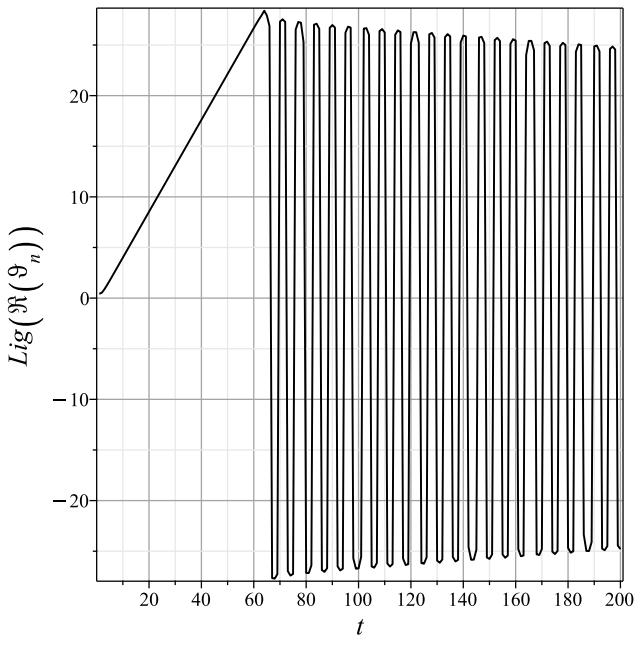



**Рис. 8.** Действительная часть возмущений скалярного поля, согласно (77), для модели $\mathfrak{M}_{57}$ при $n = 0.01$ и $C_n^{\pm} = 1$

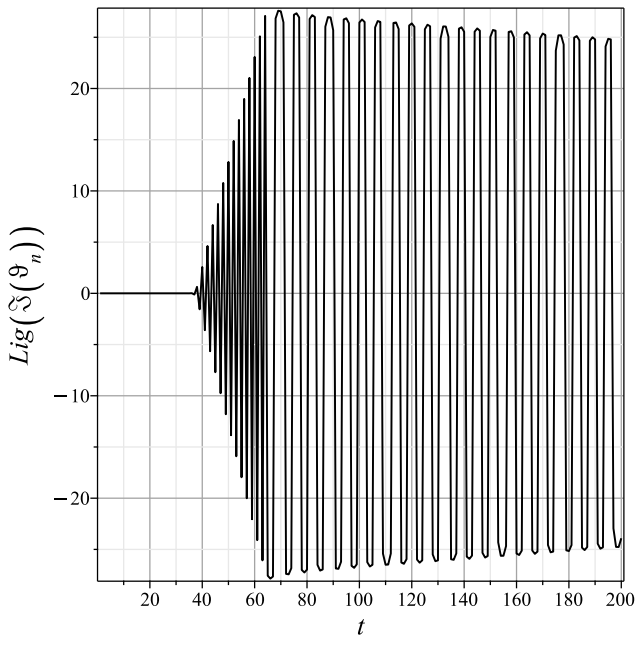



**Рис. 9.** Мнимая часть возмущений скалярного поля, согласно (77), для модели $\mathfrak{M}_{57}$ при $n = 0.01$ и $C_n^{\pm} = 1$

стоячие волны, одна из которых экспоненциально растет, а вторая затухает, при этом амплитуда вырастает/убывает в $\exp(\chi_{57}) \approx 3.3 \cdot 10^{39}$ раз. С момента времени $t_1$ и далее рост амплитуды прекращается, а колебания трансформируются в две волны, запаздывающую и опережающую, распространяющиеся вдоль радиуса со световой скоростью. При этом фазы этих волн равны $inr \pm \omega_{57} t \mp \chi_{57}$, откуда следует, что именно опережающая волна, соответствующая нижнему знаку этого выражения, имеет бóльшую амплитуду $\exp(\chi_{57})$.

На рис. 8 и 9 представлены результаты численного моделирования эволюции амплитуд возмущений скалярного поля по асимптотическим формулам (77) для модели с параметрами $\mathfrak{M}_{57}$, показанной на рис. 2. Функция $\omega_n(t)$ вычислялась численным интегрированием фоновой динамической системы $\mathbf{S}_5$ (14)–(18). При этом произвольные константы $C_n^{\pm}$ в асимптотическом решении (77) полагались равными 1. Для реальных начальных значений возмущений необходимо положить $C_n^{\pm} \sim 10^{-20} \div 10^{-6}$ в зависимости от особенностей исследуемого этапа космологической эволюции. При этом соответствующие величины $\vartheta_n(t)$ достаточно умножить на величину $C_n^{\pm}$.

На графиках рис. 8, 9 видно, что поведение возмущений амплитуды скалярного потенциала $\vartheta_n(t)$ в модели $\mathfrak{M}_{57}$ резко меняется как раз в точке ее перехода на режим поздней инфляции (см. рис. 2).

Далее, из графика возмущения амплитуды скалярного потенциала $\vartheta_n(t)$ для скалярно заряженной жидкости, $\mathfrak{M}_{57}$, можно заметить, что затухающие после фазы начального роста колебания имеют период $2\pi$. Исследования показывают, что для произвольных значений массы бозонов $m$ и произвольных значений волновых чисел период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{m},$$

т. е. это микроскопические осцилляции с комптоновским периодом, как и в случае статических осцилляций скалярного поля в гало скалярно заряженной черной дыры [31].

Экспоненциально быстрый рост возмущений скалярного поля, обнаруживаемый как в асимптотических решениях (77), так и в точных решениях линейных уравнений для возмущений скалярного поля в особых точках (см., например, [5, 7]), приводит к быстрому росту амплитуд возмущений до больших по абсолютной величине значений, что формально быстро нарушает применимость линейной модели для описания скалярно-гравитационных возмущений. Однако некоторые обстоятельства позволяют надеяться на применимость линейной модели для качественного описания поведения и больших по амплитуде возмущений скалярного поля с хиггсовым потенциалом. Действительно, известны основные эффекты влияния нелинейности на пове-

дение возмущений в газодинамической среде. В основном они сводятся к искажению и демпфированию гармонических колебаний и образованию ударных волн, трансформирующих энергию колебаний, а также к разогреву газовой среды. Эти эффекты опосредуются через давление газовой среды, большие градиенты которого создают силы, противодействующие сжатию газа. Однако в случае скалярного поля с кубической нелинейностью это не так. Давление скалярного поля может быть отрицательным, в результате чего противодействие сжатию может смениться на пособничество ему. Другими словами, нелинейная модель возмущений скалярного поля только усилит развитие неустойчивости линейных возмущений. На этот факт указывают и конкретные численные расчеты развития нелинейных возмущений, выполненные на основе модельной задачи. Как оказывается, точки роста возмущений в нелинейной и линейной моделях совпадают, но при этом нелинейная модель дает значительно более быстрый рост возмущений на нелинейной стадии, что является проявлением уникальной особенности скалярного поля. Этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

## 5. ГЕНЕРАЦИЯ МАССЫ В ГАЛО ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

### 5.1. Нахождение функции $\gamma(r,t)$ в квадратичном приближении

Как отмечено выше, в особых точках фоновой системы гравитационные возмущения в линейной модели практически не растут. С другой стороны, в этих точках наблюдается экспоненциально быстрый рост возмущений скалярного поля. Исследуем вопрос о генерации массы квадратичными возмущениями скалярного поля в гало черной дыры. С помощью (77) получим решение уравнения (61)

$$\gamma(r,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\Big(n^2\ln r-\frac{1}{4r^2}\Big)|\vartheta_n(t)|^2dn.$$

Как видно из этого выражения, при $r\to\infty$ $\gamma(r,t)\sim\ln r$, т. е. в нелинейной модели нарушаются условия на бесконечности (54). На первый взгляд, это выглядит как противоречивый результат, однако данный результат правилен и даже почти очевиден. Действительно, логарифмическая расходимость на бесконечности свидетельствует о том, что с ростом $r$ растет абсолютная величина массы, соответствующей скалярным возмущениям, что соответствует плотности энергии скалярного поля, пропорциональной обратному квадрату радиуса. Но именно к такому закону и приводит выражение для плотности энергии скалярного поля, соответствующее квадратичным поправкам ТЭИ скалярного поля (45)–(48).

### 5.2. Прямое вычисление массы гало

Проведем прямое вычисление массы возмущений скалярного поля по формуле

$$m_h(r,t)=\int\sqrt{-g}\,\delta^{(2)}S_4^4\,d^3\mathbf{r}=a^3\int^r r^2dr\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty dn\Big(\phi_n\phi_n^*(m^2-3\alpha\Phi_s^2)+\dot\phi_n\dot\phi_n^*+\frac{\phi'_n\phi'^*_n}{a^2}\Big).\quad(79)$$

Таким образом, с учетом (77) получим

$$m_h(r,t)=\rho_s^1(t)\;r-\rho_s^2(t)\frac{1}{r},$$
$$\rho_s^1(t)=a^3\int\limits_0^\infty dn\left[\left(m^2-3\alpha\Phi_s^2+\frac{n^2}{a^2}\right)|\vartheta_n|^2+|\dot\vartheta_n|^2\right],$$
$$\rho_s^2(t)=a\int\limits_0^\infty dn\,|\dot\vartheta_n|^2.$$

Второе слагаемое в правой части этого выражения стремится к нулю при больших значениях $r$, для которых найдем

$$m_h(r,t)|_{r\to\infty}=$$
$$=r\big[(m^2-3\alpha\Phi_s^2)\Psi_1(t)+\Psi_2(t)+\Psi_3(t)\big],\quad(80)$$

где

$$\Psi_1=a^3\int\limits_0^\infty|\vartheta_n|^2dn,\quad\Psi_2=a\int\limits_0^\infty|\vartheta_n|^2n^2dn,$$
$$\Psi_3=a^3\int\limits_0^\infty|\dot\vartheta_n|^2dn.$$

Итак, $|m_h(r,t)|_{r\to\infty}\to\infty$, и остановить этот рост массы может только изначальная ограниченность области локализации возмущений (см. [1]). Заметим, что аналогичная ситуация возникает и в случае статических скалярно заряженных черных дыр [31, 32]. Микроскопические осцилляции скалярного поля создают сферическое гало вокруг черной дыры, масса которого растет пропорционально радиусу $r$, — точно так же, как и масса скалярного га-

ло скалярно заряженной статической черной дыры с массой $M$ [31, 32]:

$$M_S(r) \simeq -\frac{\Lambda M^2 m^2 |\phi_0|^2}{6\pi} r. \tag{81}$$

Масса статического скалярного гало $m_h$ отрицательна и компенсирует положительную массу черной дыры точно так же, как и в случае статической скалярно заряженной черной дыры (81). Как видно из (80), в неустойчивой особой точке фоновой системы ($\Phi_s = \pm m/\sqrt{\alpha}$) при небольших значениях волнового числа $n \sim 1$ энергия возмущений скалярного поля также становится отрицательной. С другой стороны, это же значение $\Phi_s$ соответствует устойчивому состоянию статической конфигурации скалярно заряженной черной дыры. Таким образом, устанавливается тесная связь между динамическим объектом, образуемым в результате развития неустойчивости возмущений скалярного хиггсова поля, и статической скалярно заряженной черной дырой с хиггсовым скалярным полем как конечной стадией формирования черной дыры.

Полученный результат обеспечивает нелинейную генерацию массы черной дыры квадратичными возмущениями скалярного хиггсова поля и иллюстрирует физику этого процесса.

Выражение для массы гало (80) может быть как положительным, так и отрицательным. Знак линейной плотности гало

$$\varrho_h(t) \equiv \frac{m_h(r,t)|_{r\to\infty}}{r} = \\ = (m^2 - 3\alpha\Phi^2)\Psi_1(t) + \Psi_2(t) + \Psi_3(t) \tag{82}$$

зависит от волнового числа $n$, времени $t$ и других факторов. В частности, при малых временах и больших значениях волнового числа $n$ величина $\varrho_h > 0$, а при малых временах и малых значениях волнового числа $\varrho_h < 0$. Плотность вещества гало $\rho(R,t)$ определяется через линейную плотность $\varrho_h(t)$ следующим образом:

$$\rho(R,t) = \frac{\varrho_h(t)}{4\pi R^2}. \tag{83}$$

На рис. 10 показана эволюция линейной плотности гало для двух моделей. Для $n = 0.01$ штриховая линия — модель $\mathfrak{M}_{57}$, пунктирная — модель $\mathfrak{M}_{75}$, для $n = 1, 100$ (снизу вверх): сплошные линии — модель $\mathfrak{M}_{57}$, штрихпунктирные — модель $\mathfrak{M}_{75}$. Резкий рост линейной плотности $\varrho_h$ происходит именно в момент $t = t_{\rm tr}$ (37) перехода фоновой модели $\mathfrak{M}_{57}$ в режим поздней инфляции (см. рис. 2).

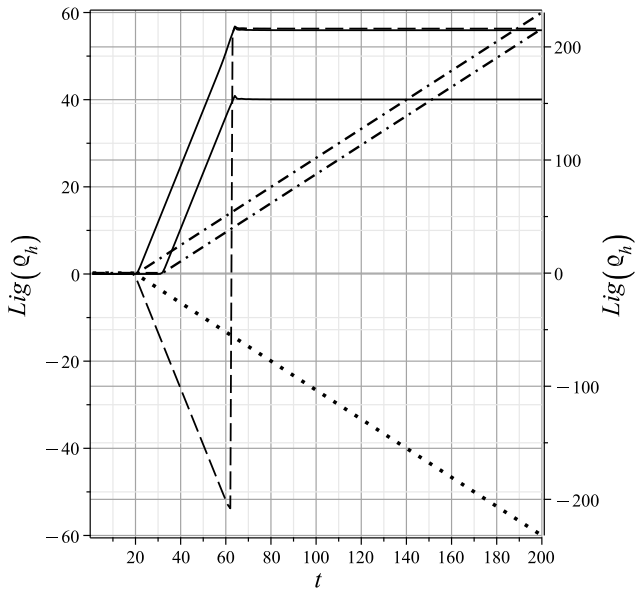



**Рис. 10.** Эволюция линейной плотности возмущений $\varrho_h(t)$ в скалярном гало при $C_n^{\pm} = 10^{-6}$. Левая шкала — модель $\mathfrak{M}_{57}$, правая — модель $\mathfrak{M}_{75}$

Особенно сильно знак $\varrho_h$ зависит от фактора заряда жидкости: для квазинейтральной жидкости этот знак всегда отрицателен, а для скалярно заряженной жидкости — отрицателен при малых временах и положителен при больших, причем момент резкой смены знака совпадает с моментом перехода модели $\mathfrak{M}_{57}$ из режима экспоненциального роста возмущений скалярного поля в режим затухающих колебаний (см. рис. 8, 9), в свою очередь совпадающим с моментом перехода $t_{\rm tr}$ (37) модели с ранней инфляции на позднюю (рис. 2). При уменьшении начальной амплитуды $\vartheta_n(0)$ на 14 порядков рост абсолютного значения $\varrho_h$ начинается значительно позже и достигает значений, меньших на 28 порядков. В общем случае величина линейной плотности растет по закону $\varrho_h \sim |C_n^{\pm}|^{-2}$.

В дальнейшем для краткости будем называть объект, состоящий из скалярно заряженной черной дыры и ее скалярного гало, нерасторжимо связанного с ней, конфигурацией черной дыры. Полная масса конфигурации черной дыры $M_F(R,t)$ в сфере радиусом $R(t)$ определится формулой

$$M_F(R,t) = M(t) + R(t)\varrho_h(t). \tag{84}$$

В случае малых времен для длинноволновых возмущений в неустойчивом состоянии $\varrho_h \leqslant 0$ можно определить радиус гало $r_h(t)$, при котором полная масса конфигурации обращается в нуль:

$$M_F(t,r) \equiv \varrho_h(t)r + M(t) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r_h(t) \simeq \frac{M(t)}{(3\alpha\Phi^2 - m^2)\Psi_1(t) - \Psi_3(t)},$$

где $M(t)$ — масса черной дыры. Относительно физического радиуса гало $R_h$ (67) эта формула примет вид

$$R_h(t) \simeq \frac{a(t)M(t)}{(3\alpha\Phi^2 - m^2)\Psi_1(t) - \Psi_3(t)}. \qquad (85)$$

Поскольку при $R = R_h(t)$ полная масса возмущений обращается в нуль, радиус $R_h(t)$ можно считать радиусом локализации возмущений [1]. Вне сферы локализации черная дыра не проявляет себя ни гравитационным, ни скалярным полем. В случае локализации возмущений существование черной дыры не будет оказывать никакого влияния на флуктуации реликтового излучения вне области локализации. Под полной массой мы понимаем массу возмущений космологической модели без учета «фридмановской массы» фона, заключенной в этой сфере, — $E_h(t) = 4\pi H_s^2 a^3(t) r_h^3(t)$ (см. рис. 7).

На рис. 11, 12 показаны графики эволюции полной массы черной дыры и ее гало $M_F(t,R)$ в сфере радиусом $R$. На этих графиках пунктирные линии — $t = 10$, штрихпунктирные — $t = 20$, штриховые — $t = 40$, редкие пунктирные — $t = 65$, сплошные — $t = 100$. Последние пары линий совпадают. Учитывая малость времени полного цикла образования гало, можно говорить о взрывном характере этого процесса. На рис. 13 показана эволюция полной массы черной дыры в сфере радиусом $R$ в зависимости от величины волнового числа $n$.

Итак, существуют два типа скалярного гало. Первый тип — локализованное (закрытое) гало, возникающее в случае скалярно заряженной жидкости на ранних этапах развития неустойчивости, а в случае квазинейтральной жидкости продолжающееся и до поздних времен. Характерным признаком этого гало является отсутствие его гравитационного и скалярного поля за пределами радиуса локализации $R_h(t)$. В этом случае черная дыра за пределами гало проявляет себя как квазизвездный объект с полной нулевой массой.

Второй тип — открытое гало — возникает на поздних стадиях формирования черной дыры в среде скалярно заряженной жидкости ($g_c > 10^{-7}$) и проявляет себя как объект с растущей полной массой гало. В случае первоначально локализованных внутри «радиуса» $r_0 = r(t_0)$ сферических возмущений физический радиус гало расширяется по закону (67) (см. [1]).

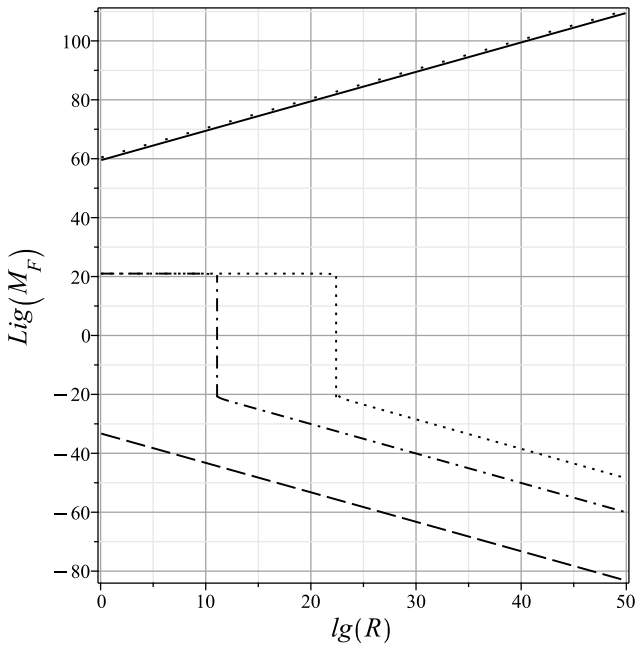



**Рис. 11.** Эволюция полной массы конфигурации черной дыры $M_F(R,t)$ внутри сферы радиусом $R$ в модели $\mathfrak{M}_{57}$, $C_n^{\pm} = 10^{-6}$, $n = 0.01$ при $M(0) = 10^{21}$, $Q(0) = 0$

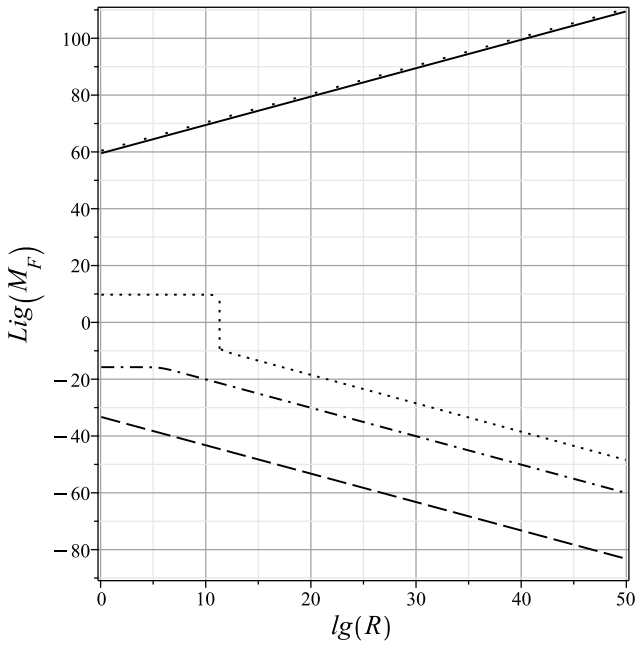



**Рис. 12.** Эволюция полной массы конфигурации черной дыры $M_F(R,t)$ внутри сферы радиусом $R$ в модели $\mathfrak{M}_{57}$, $C_n^{\pm} = 10^{-6}$, $n = 0.01$ при $M(0) = 0$, $Q(0) = -10^{21}$

Радиальный поток энергии возмущений скалярного поля определяется тензором энергии-импульса второго порядка $\delta^{(2)}S_4^1$ (48). С учетом (64) и (77) получим из (48)

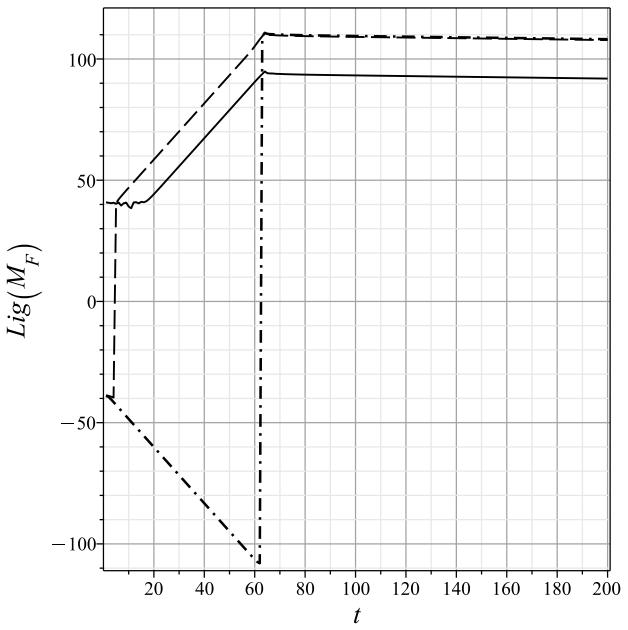



**Рис. 13.** Эволюция полной массы конфигурации черной дыры $M_F(R,t)$ внутри сферы радиусом $R=10^{50}$ в модели $\mathfrak{M}_{57}$ при $M(0)=0$, $Q(0)=-10^{21}$, $C_n^{\pm}=10^{-6}$: штрихпунктирная линия — $n=0.01$, штриховая — $n=1$, сплошная — $n=100$

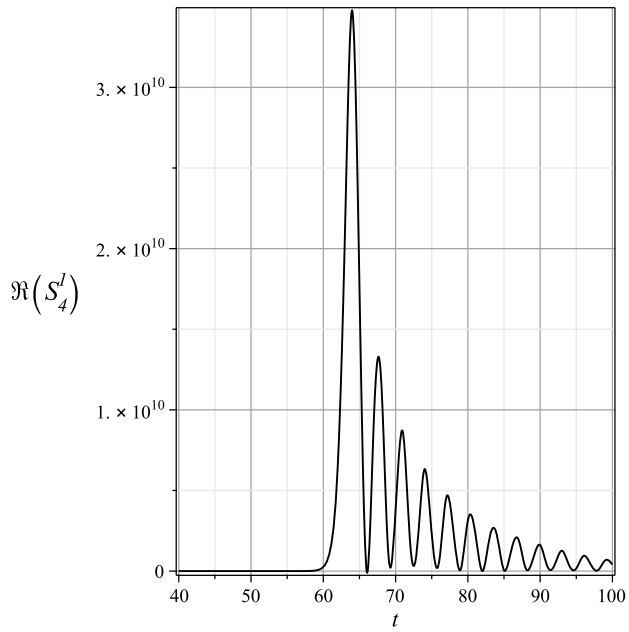



**Рис. 14.** Эволюция плотности потока энергии-импульса $\delta^{(2)}S_4^1$ для модели $\mathfrak{M}_{57}$ при $n=1$, $C_n^{\pm}=10^{-6}$, начальных условиях (70) $\mathbf{I}_{MQ}(0,-1)$ и $R=10^{12}$

$$8\pi\delta^{(2)}S_4^1=-\frac{1}{a^2r^3}\left(e^{inr}\dot{\vartheta}_n-\frac{\dot{Q}}{a}+\frac{Q}{a}H\right)\times\left[e^{inr}\vartheta_n(inr-1)+\frac{Q}{a}\right].$$

На рис. 14 показан график эволюции плотности потока энергии-импульса $\delta^{(2)}S_4^1$ скалярного поля в радиальном направлении для модели $\mathfrak{M}_{57}$. Из этого графика следует, что поток энергии в радиальном направлении ($\mathrm{Re}\,\delta^{(2)}S_4^1>0$) возникает в момент перехода модели из состояния неустойчивой инфляции в состояние устойчивой и экспоненциально быстро затухает.

## 6. РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ В ГАЛО SSBH

### 6.1. Оценка скорости рождения H-бозонов

В гравитационных полях черных дыр, как известно, рождаются частицы (см., например, [33,34]). Для эффективного рождения частиц гравитационным механизмом необходима сильная поверхностная гравитация, которая мала у сверхмассивных черных дыр. Действительно, интенсивность излучения рождаемых в гравитационном поле частиц обратно пропорциональна квадрату массы черной дыры,

$$\frac{dE}{dt}=\frac{9}{5120\pi M^2},$$

и поэтому ничтожно мала (см. [2], где исследовано влияние процесса рождения частиц гравитационным полем черной дыры на ее формирование механизмом скалярно-гравитационной неустойчивости).

Однако сильное неоднородное или нестационарное скалярное хиггсово поле способно рождать скалярные хиггсовы бозоны, $H_b$, причем, поскольку скалярные бозоны необходимы для компенсации расходимостей теоретико-полевых моделей на любом масштабе энергии, соответствующие хиггсовы бозоны должны появляться на всех уровнях. При этом если в стандартной модели электрослабого взаимодействия $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ необходим один хиггсов бозон, $H$, то в модели $\mathrm{SU}(5)$ необходимо уже 24 скалярных бозона ($\nu_H=24$) [35], а в моделях планковского уровня их может быть и больше.

Оценим сначала скорость рождения хиггсовых бозонов в классическом скалярном поле с временной производной $\dot{\phi}$, используя аналогию с формулой скорости рождения электрон-позитронной пары в электрическом поле напряженностью $E$ (см., например, [36]):

$$\dot{n}_{ee_+}=\frac{e^2E^2}{4\pi^3\hbar^2c}\,e^{-E_c/E}, \tag{86}$$

где $\dot{n}_{ee_+}$ — скорость рождения электрон-позитронной пары в единице объема, $m_e$ — масса электрона, $e$ — его заряд, $E_c$ — критическое значение напряженности электрического поля,

$$E_c = \frac{\pi m_e^2 c^3}{\hbar e}.$$

Формулу (86) нетрудно получить и качественным путем, исходя из следующих соображений. Для того чтобы реализовать из вакуума виртуальную пару $ee_+$ в электрическом поле напряженностью $E_0$, необходимо на масштабе комптоновского размера электрона $\lambda_e = \hbar/m_e c$ создать разность потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$, бóльшую $2m_e c^2$:

$$\Delta_0\mathcal{E} = eE_0\lambda_e \Rightarrow E_0 \gtrsim 2m_e^2 c^2/\hbar e.$$

Стандартное гауссово распределение по энергиям приводит к статистическому множителю

$$\exp(-eE_0\lambda_e/eE\lambda_e) = \exp(-E_0/E).$$

Далее, умножая частное плотности энергии электрического поля $W_e = E^2/8\pi$ и постоянной Планка на постоянную тонкой структуры $\alpha_e = e^2/\hbar c$, с учетом найденного статистического фактора получим качественно правильный ответ.

Заменим в этих формулах постоянную тонкой структуры $\alpha_e$ на безразмерную постоянную электрослабого взаимодействия

$$G_\mu^{(0)} = \frac{m^2 c}{\hbar^3} G_\mu,$$

где $G_\mu \simeq 1.44 \cdot 10^{-49}$ эрг·см$^3$ (см. [35]), а также $e^2 \to G_\mu^{(0)}\hbar c$ и $E \to |\dot{\phi}|$. Учитывая, что масса хиггсова бозона равна $m \approx 125$ ГэВ, получим $G_\mu^{(0)} \simeq 0.23$. Далее, согласно (47), плотность энергии осцилляций скалярного поля в планковских единицах порядка $\varepsilon_s \simeq \dot{\phi}^2/16\pi$, что в обычных единицах дает

$$\varepsilon_s \simeq \dot{\phi}^2 c^7/16\pi G^2\hbar,$$

где $G$ — гравитационная постоянная. Таким образом, получим оценку скорости рождения хиггсовых бозонов в адиабатическом приближении:

$$\dot{n}_H = \frac{\nu_H G_\mu^{(0)} c^7 |\dot{\phi}|^2}{16\pi G^2\hbar^2} \exp\left(-\frac{2m^2c^{5/2}}{\sqrt{G_\mu^{(0)}}\hbar^{3/2}G^{1/2}|\dot{\phi}|}\right),$$

где $\nu_H$ — число типов Н-бозонов в теоретико-полевой модели. В планковских единицах, используемых в нашей статье, отсюда получим

$$\dot{n}_H(t) \simeq \frac{\nu_H G_\mu^{(0)}|\dot{\phi}|^2}{16\pi} \exp\left(-\frac{2m^2}{\sqrt{G_\mu^{(0)}}|\dot{\phi}|}\right).$$

Подставляя сюда $\phi_n$ из (77), найдем явное выражение для плотности скорости рождения Н-бозонов:

$$\dot{n}_H(t) \simeq \frac{\nu_H G_\mu^{(0)}|\dot{\vartheta}_n(t)|^2}{16\pi r^2} \exp\left(-\frac{2m^2 r}{\sqrt{G_\mu^{(0)}}|\dot{\vartheta}_n(t)|}\right). \quad (87)$$

В терминах физического радиуса $R$ (67) эта формула приобретает вид

$$\dot{n}_H(t) \simeq \frac{\nu_H G_\mu^{(0)}|a(t)\dot{\vartheta}_n(t)|^2}{16\pi R^2} \times \exp\left(-\frac{2m^2 R}{\sqrt{G_\mu^{(0)}}|a(t)\dot{\vartheta}_n(t)|}\right). \quad (88)$$

На рис. 15 показано моментальное радиальное распределение плотности скорости рождения хиггсовых бозонов в гало в зависимости от волнового числа.

### 6.2. Полная скорость рождения частиц в гало SSBH

Для скорости рождения Н-бозонов $\dot{N}_H(t)$ осцилляциями скалярного поля в гало SSBH получим из (87)

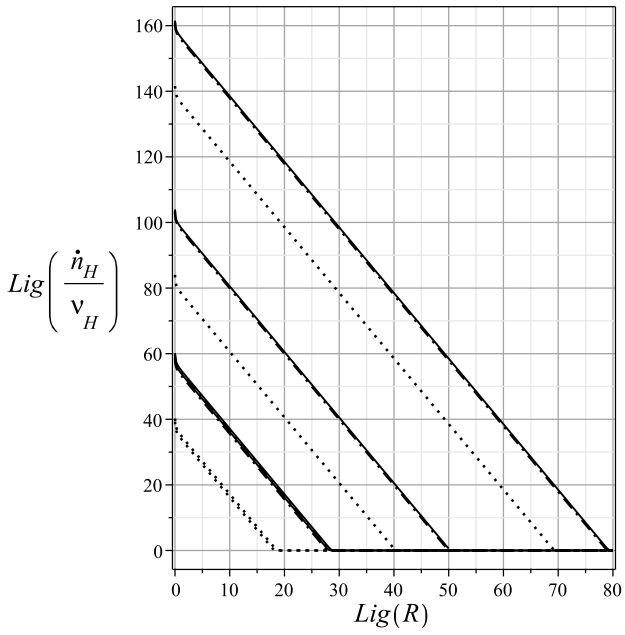



**Рис. 15.** Удельная плотность скорости рождения хиггсовых бозонов $\dot{n}_H/\nu_H$ в скалярном гало при $t = 80$ и $t = 150$ в зависимости от физического радиуса $R$ в моделях $\mathfrak{M}_{57}$ (линии слева) и $\mathfrak{M}_{75}$ (линии справа). Графики для $t = 80$ и $t = 150$ для модели $\mathfrak{M}_{57}$ практически сливаются. Пунктирные линии — $n = 100$, штрихпунктирные — $n = 1$, сплошные — $n = 0.01$

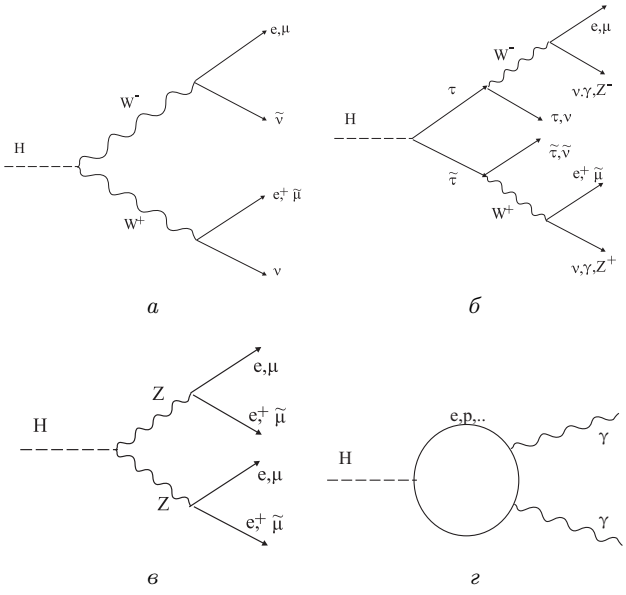



**Рис. 16.** Диаграммы возможных схем распада H-бозона в модели $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$

$$\dot N_H(t)\simeq\frac{\left(\nu_H(G_\mu^{(0)})^{1/2}a(t)|\dot\vartheta_n|\right)^2}{4}\times \\ \times\int\limits_{R_0}^{\infty}\exp\left(-\frac{2m^2R}{\sqrt{G_\mu^{(0)}}|a\dot\vartheta_n|}\right)dR.$$

Подставляя в качестве нижнего предела гравитационный радиус черной дыры $R_g=2M(t)$ (см. [8]), получим окончательно

$$\dot N_H(t)\simeq\frac{\nu_H}{8m^2}e^{-\Upsilon}\left(\sqrt{G_\mu^{(0)}}a(t)|\dot\vartheta_n(t)|\right)^3, \qquad (89)$$

где $\Upsilon$ — статистический фактор:

$$\Upsilon=\frac{4m^2M(t)}{\sqrt{G_\mu^{(0)}}a(t)|\dot\vartheta_n(t)|}. \qquad (90)$$

Рожденные таким образом свободные H-бозоны распадаются затем на стабильные частицы по различным каналам распада. Возможные диаграммы распада в стандартной модели электрослабого взаимодействия представлены на рис. 16 (см., например, [35]). Рождение фотонов на диаграмме рис. 16 *г* происходит в петлях электрически заряженных частиц, аналогично возможно рождение глюонов $g$ в кварковых $q$-петлях.

Поскольку практически во всех каналах распада H-бозонов в конечном итоге рождаются пары массивных частиц и античастиц, их последующая аннигиляция приведет к рождению пар фотонов и нейтрино различных типов. Поэтому мощность излучения гало SSBH как в спектре фотонов, так и в спектре нейтрино можно оценить как

$$\dot E_{\gamma,\nu}\simeq\frac{\nu_H\left|(G_\mu^{(0)})^{1/2}a(t)\dot\vartheta_n(t)\right|^3}{8m}\times \\ \times\exp\left(-\frac{4m^2M(t)}{(G_\mu^{(0)})^{1/2}a(t)|\dot\vartheta_n(t)|}\right). \qquad (91)$$

При этом максимумы спектра излучения, согласно диаграммам распада H-бозона (рис. 16), будут лежать в областях аннигиляции:

$$E_\gamma\simeq m/2,\quad E_\gamma\simeq m/4,\quad E_\gamma\simeq m/8.$$

Согласно (89) и (91), условием эффективного рождения частиц является

$$\Upsilon\lesssim1\Rightarrow\frac{|a(t)\dot\vartheta_n(t)|}{M(t)}\gtrsim\frac{4m^2}{\sqrt{G_\mu^{(0)}}}. \qquad (92)$$

С учетом (90) перепишем (89) в виде

$$\dot N_H(t)\simeq32\nu_Hm^4M^3(t)\Upsilon^{-3}(t)\,e^{-\Upsilon(t)}.$$

Функция

$$f(\Upsilon)=\Upsilon^{-3}(t)e^{-\Upsilon(t)}$$

является монотонно убывающей в области определения $\Upsilon\in[0,\infty)$, на которой принимает значения на интервале $(\infty,0]$. Поэтому с увеличением статистического фактора $\Upsilon$ интенсивность рождения частиц быстро убывает. При развитии неустойчивости с ростом космологического времени $M(t)\to\mathrm{const}$, амплитуда возмущений скалярного поля в модели $\mathfrak{M}_{75}$ растет, а в модели $\mathfrak{M}_{57}$ после фазы роста затухает до нуля. Поэтому интенсивность рождения частиц в модели $\mathfrak{M}_{57}$ после достижения максимума быстро уменьшается, тогда как в модели $\mathfrak{M}_{75}$ продолжает расти.

На рис. 17 показаны графики эволюции статистического фактора $\Upsilon(t)$ для модели $\mathfrak{M}_{57}$. Здесь и на рис. 18, 19 пунктирные линии — $n=100$, штриховые — $n=1$, сплошные — $n=0.01$, $C_n^{\pm}=10^{-6}$, $\mathbf{I}_{MQ}=[0,-10^6]$.

Аналогичные графики для модели $\mathfrak{M}_{75}$ мы не приводим, поскольку они представляют хаотические колебания, вызванные физически неприемлемым ростом сингулярной массы в область отрицательных значений (рис. 4).

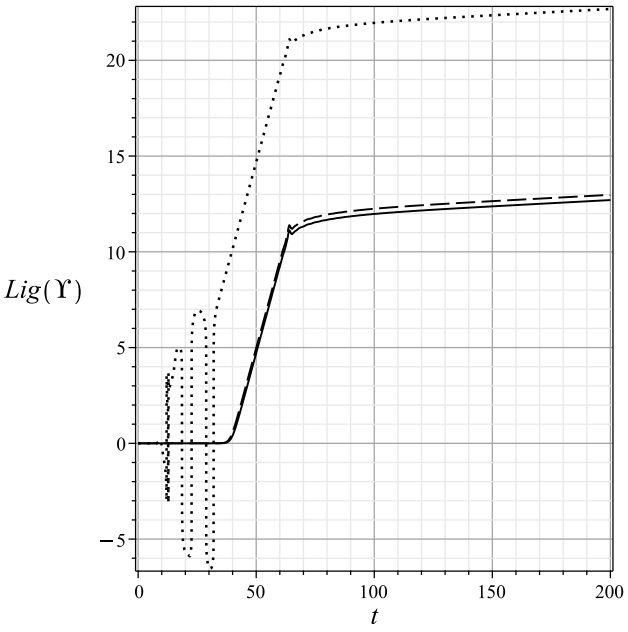



**Рис. 17.** Зависимость статистического фактора $\Upsilon(t)$ от волнового числа $n$ в модели $\mathfrak{M}_{57}$

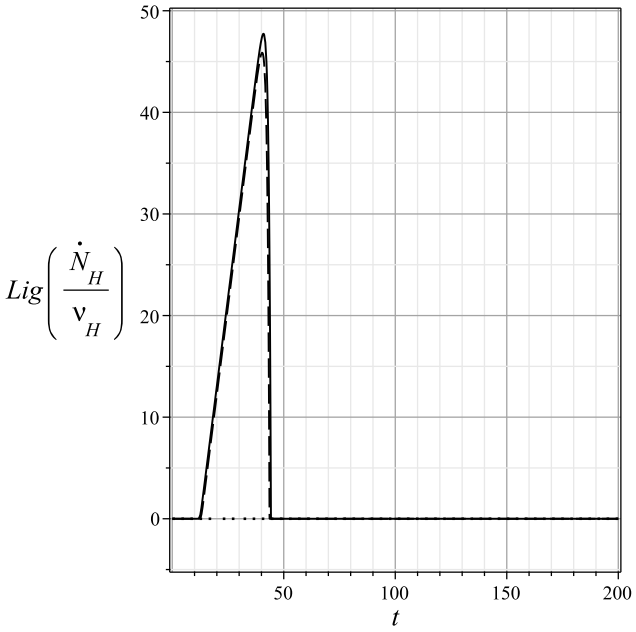



**Рис. 18.** Зависимость удельной скорости рождения хиггсовых бозонов $\dot{N}_H/\nu_H$ в скалярном гало от волнового числа $n$ в модели $\mathfrak{M}_{57}$

### 6.3. Численное моделирование скорости рождения частиц

Ниже рассмотрим следующие конкретные модели рождения бозонов на основе космологической модели $\mathfrak{M}_{57}$ при $n = 0.01$: $M_1 - C_n^{\pm} = 10^{-6}$, $Q_0 = -10^4$; $M_2 - C_n^{\pm} = 10^{-6}$, $Q_0 = -10^6$; $M_3 - C_n^{\pm} = 10^{-10}$, $Q_0 = -10^3$; $M_4 - C_n^{\pm} = 10^{-6}$, $Q_0 = -10^{10}$.

На рис. 18 и 19 показаны графики зависимости от $n$ скорости рождения хиггсовых бозонов в скалярном гало образующейся SMBH для моделей $\mathfrak{M}_{57}$ и $\mathfrak{M}_{75}$.

Полное число рожденных бозонов равно

$$N_H(t) = \int_0^t \dot{N}_H\, dt.$$

В таблице представлены результаты вычислений интегрального количества бозонов $N_H$, рожденных в процессе формирования SMBH, и их интегральной массы $M_H$ (в единицах солнечной массы $M_\odot$) в сравнении с массой SMBH.

Из таблицы, как и из рис. 18–20, можно заметить, во-первых, что процесс рождения H-бозонов завершается к моменту времени $t = 50$, когда сингулярная масса $M_{50}$ еще очень мала не только по сравнению с конечной сингулярной массой $M_\infty$, но даже и по сравнению с интегральной массой рожденных H-бозонов (исключение составляет лишь случай $M_1$). Согласно (90), это становится возможным как раз

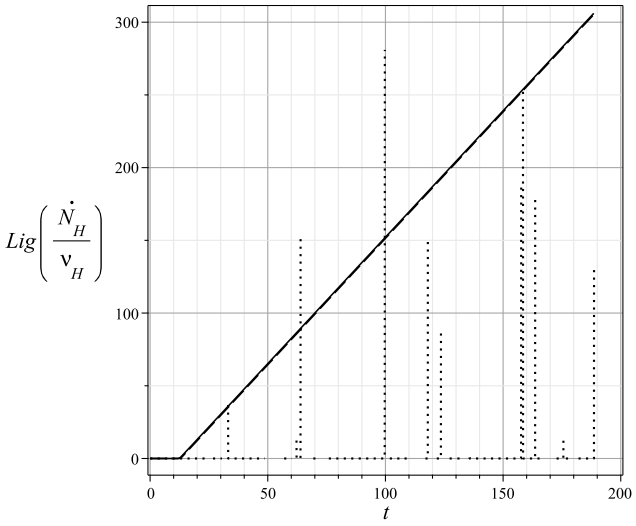



**Рис. 19.** Зависимость удельной скорости рождения хиггсовых бозонов $\dot{N}_H/\nu_H$ в скалярном гало от волнового числа $n$ в модели $\mathfrak{M}_{75}$. Вертикальные линии соответствуют значениям $\Upsilon = 0$, вызванным колебательным характером сингулярной массы (см. рис. 4)

благодаря малым значениям сингулярной массы в процессе рождения бозонов, несмотря на малые же значения $|\dot{\vartheta}_n|$.

Во-вторых, в случаях моделей $M_2$ и $M_4$ масса рожденных в гало бозонов на несколько порядков превышает конечную сингулярную массу SMBH —

**Таблица.** Интегральные параметры производства H-бозонов

| M/V | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $N_H$ | $2 \cdot 10^{24}$ | $1 \cdot 10^{40}$ | $7 \cdot 10^{47}$ | $4 \cdot 10^{52}$<br>$9 \cdot 10^{177}$ |
| $M_H$ | $2 \cdot 10^{-14}$ | 155 | $8 \cdot 10^{9}$ | $4 \cdot 10^{14}$<br>$1 \cdot 10^{140}$ |
| $M_{50}$ | $2 \cdot 10^{-13}$ | $2 \cdot 10^{-10}$ | $2 \cdot 10^{-12}$ | $2 \cdot 10^{-6}$ |
| $M_\infty$ | 56 | $5.6 \cdot 10^{4}$ | 563 | $5.6 \cdot 10^{8}$ |

*Примечание.* $M_H$ — полная интегральная масса рожденных бозонов, $M_{50}$ — сингулярная масса на момент $t = 50$, $M_\infty$ — конечная сингулярная масса. В колонке $M_4$ двухстрочные данные соответствуют первому и второму всплеску.

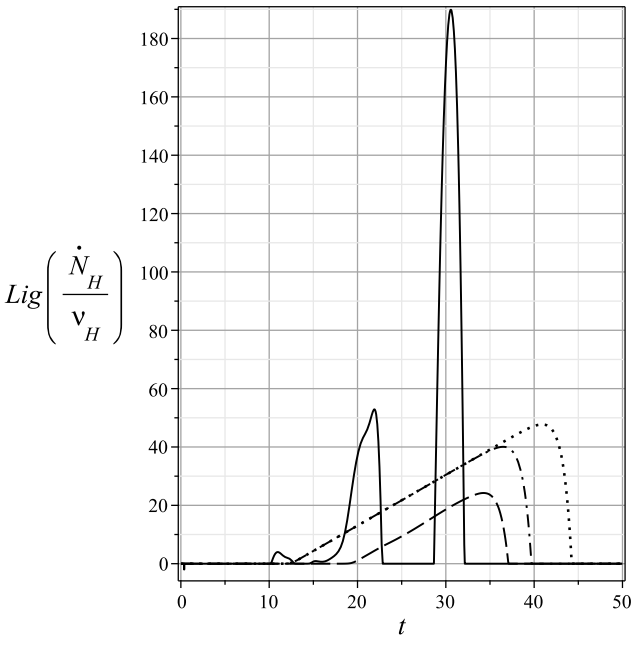



**Рис. 20.** Удельная скорость рождения хиггсовых бозонов в скалярном гало в модели $\mathfrak{M}_{57}$ при $n = 0.01$: пунктирная линия — модель $M_1$, штрихпунктирная линия — $M_2$, штриховая линия — $M_3$, сплошная линия — $M_4$

в первом случае на 3 порядка, во втором — на 131.

В-третьих, рождение бозонов в случае $M_4$ происходит в два этапа и имеет вид узких высоких всплесков, и даже в случае первого, относительно невысокого всплеска суммарная масса рожденных бозонов $(4 \cdot 10^{14})$ на 6 порядков больше конечной сингулярной массы черной дыры. Учитывая, что длительность этих импульсов не превышает десятка планковских времен, можно сделать вывод о том, что эти импульсы представляют собой короткие сверхмощные взрывы, в результате которых может рождаться масса, превышающая массу галактики Млечный Путь.

В-четвертых, в коротковолновой области спектра интенсивность рождения частиц в обеих моделях резко убывает, и при увеличении волнового числа $n$ на 2 порядка ($n = 1 \to 100$) уменьшается практически до нуля.

В-пятых, аномально интенсивное рождение бозонов в модели $\mathfrak{M}_{75}$ вызвано аномальным поведением самой этой модели — генерацией отрицательной сингулярной массы (рис. 4), и следствием этого — аномальным поведением статистического фактора $\Upsilon$. Генерация отрицательной сингулярной массы противоречит фундаментальным физическим принципам, поэтому модели типа $\mathfrak{M}_{75}$ скалярно квазинейтральной жидкости вряд ли являются физически приемлемыми. Заметим, что модель 1985 г. Я. Б. Зельдовича с соавторами [17] основана на скалярно нейтральной жидкости.

## 7. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Подводя итоги, заметим, во-первых, что статья совместно с предыдущей [8] дает решение проблемы, сформулированной в работе [7] и указанной во Введении: исследование возможности образования сверхмассивных черных дыр (SMBH) и их зародышей (SSBH) в ранней Вселенной механизмом скалярно-гравитационной неустойчивости. В предыдущей статье [8] был исследован процесс образования этих объектов на этапе перехода космологической модели из неустойчивого состояния в устойчивое и показано, что данный механизм обеспечивает образование объекта с параметрами SSBH.

Настоящее исследование показало, что экспоненциально растущие в особых точках возмущения скалярного поля способны сгенерировать сильные возмущения гравитационного поля, приводящие в неустойчивом состоянии к появлению скалярного гало с относительной (за вычетом космологического фона) массой, которая может значительно превышать массу формирующейся сверхмассивной черной дыры. В частности, эта масса может оказаться и отрицательной при малых скалярных зарядах жидкой компоненты. В этом случае радиус гало определяется равной нулю полной относительной массой системы «черная дыра + скалярное гало», так что внешнее гравитационное поле системы за пределами гало отсутствует и не влияет, в частности, на реликтовый фон.

Интегральная масса возмущений скалярного поля в скалярном гало $M_F$ может на много порядков превышать сингулярную массу черной дыры

(рис. 13). Таким образом, скалярное гало SMBH может являться телом квазара. Некоторые наблюдательные факты, в частности большое отношение массы SMBH к массе квазара $m_{\rm smbh}/m_{\rm qz} \sim 0.7 \div 1$, которое наблюдается у некоторых ранних квазаров [16], а также уменьшение в среднем масс SMBH с течением времени [37], позволяют идентифицировать скалярное гало SMBH с квазаром. При этом, естественно, меняются некоторые стандартные приоритеты, в частности устоявшееся понятие о квазарехозяине SMBH. Результаты нашего исследования скорее говорят о черной дыре как хозяйке квазара. Если черную дыру связывать с квазаром, то можно полагать, что ее скалярное гало и будет являться областью существования квазара, по крайней мере, не будет выходить за пределы квазара. Кроме того, исследование показало, что в скалярном гало происходит интенсивное рождение хиггсовых бозонов (рис. 20), суммарная масса которых опять-таки может на многие порядки превосходить сингулярную массу черной дыры. Последующий распад H-бозонов по схемам рис. 16 может заполнить тело скалярного гало частицами (лептонами и барионами), которые в дальнейшем будут служить строительным материалом для трансформации SSBH в SMBH. При этом никаких внешних по отношению к SMBH процессов — газовой аккреции, поглощения звезд, слияния черных дыр и т. п. — для эволюции сверхмассивной черной дыры не требуется. Более того, строительного материала гало с избытком хватает для рождения звездных объектов квазара.

С помощью преобразований подобия [21] (33), (34) и с учетом инвариантности $\phi$ нетрудно показать, что амплитуды возмущений $\vartheta_n$ (77) преобразуются по закону $\vartheta_n = \ell^{-1}\tilde{\vartheta}_n$. Отсюда найдем, что $\dot{\vartheta}_n = \mathrm{Inv}$ — инвариант преобразования подобия. Из инвариантности по отношению к масштабным преобразованиям метрических функций следует, что полная масса черной дыры $M(t)$, как и ее скалярный заряд $Q(t)$, преобразуется по закону

$$M(t) = \ell^{-1}\tilde{M}(\ell^{-1}t),$$
$$Q(t) = \ell^{-1}\tilde{Q}(\ell^{-1}t)$$

при соответствующем преобразовании начальных условий. Поэтому значения конечной массы $M_\infty$ базовой модели в моделях SU(5) и SM необходимо увеличить в $10^4$ и $10^{15}$ раз соответственно. Таким образом, получим оценки согласно (71)

$$\mathrm{SU}(5) : M_\infty \sim 10^{-14} M_0 \div 10^2 Q_0,$$

$$\mathrm{SM} : M_\infty \sim 10^{-3} M_0 \div 10^{13} Q_0.$$

При этом длительности этапа роста массы также увеличиваются в соответствующее число раз: $10^6 t_{\rm pl}$ и $10^{19} t_{\rm pl}$, оставаясь при этом очень короткими.

С помощью преобразований подобия найдем закон преобразования статистического фактора $\Upsilon$ (90)

$$\Upsilon(t) = \frac{\ell}{\ln \ell}\,\tilde{\Upsilon}(\ell^{-1}t),$$

где мы учли также логарифмическую зависимость от энергии константы взаимодействия (см., например, [35]). Таким образом, при переходе к низкоэнергетическим взаимодействиям моделей SU(5) и SM статистический фактор уменьшается, что увеличивает вероятность рождения частиц. Из формул (88), (89) и (91) найдем законы преобразования соответствующих величин:

$$\dot{n}_H \propto \mathrm{const}\ \ell^{-2} \ln \ell \exp\Bigl(-\mathrm{const}\frac{\ell}{\ln \ell}\Bigr),$$
$$\dot{N}_H \propto \mathrm{const}\ \ell^{-2} \ln^{3/2} \ell \exp\Bigl(-\mathrm{const}\frac{\ell}{\ln \ell}\Bigr),$$
$$\dot{E}_{\gamma,\nu} \propto \mathrm{const}\ \ell^{-1} \ln^{3/2} \ell \exp\Bigl(-\mathrm{const}\frac{\ell}{\ln \ell}\Bigr).$$

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов.** Вклад авторов равноценен.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Yu. G. Ignat'ev, Theor. Math. Phys. **215**, 862 (2023) [Ю. Г. Игнатьев, ТМФ **215**, 465 (2023)].
2. Yu. G. Ignat'ev, Gravit. Cosmol. **29**, 327 (2023).
3. Yu. G. Ignat'ev, Gravit. Cosmol. **30**, 40 (2024).
4. Yu. G. Ignat'ev, Gravit. Cosmol. **30**, 141 (2024).
5. Yu. G. Ignat'ev, Theor. Math. Phys. **222**, 285 (2025) [Ю. Г. Игнатьев, ТМФ **222**, 335 (2025)].
6. Yu. G. Ignat'ev, Theor. Math. Phys. **223**, 636 (2025) [Ю. Г. Игнатьев, ТМФ **223**, 127 (2025)].
7. Yu. G. Ignat'ev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **168** (2025) [Ю. Г. Игнатьев, ЖЭТФ **168**, 631 (2025)].
8. Yu. G. Ignat'ev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **169** (2026) [Ю. Г. Игнатьев, ЖЭТФ **169**, 43 (2026)].
9. Q. Zhu, Y. Li, Y. Li, M. Maji, H. Yajima, R. Schneider, and L. Hernquist, Mon. Not. R. Astron. Soc. **514**, 5583 (2022).

**10**. L. A. Ureña-López and A. R. Liddle, Phys. Rev. D **66**, 083005 (2002).

**11**. B. Trakhtenbrot, Proc. Int. Astron. Union **15**, 261 (2019).

**12**. S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, and T. Ott, Astrophys. J. **692**, 1075 (2009).

**13**. S. Doeleman, J. Weintroub, A. E. E. Rogers et al., Nature **455**, 78 (2008).

**14**. X. Fan, A. Barth, E. Bañados et al., Bull. Am. Astron. Soc. **51**, 121 (2019).

**15**. C. Wolf, S. Lai, C. A. Onken, N. Amrutha, F. Bian, W. J. Hon, P. Tisserand, and R. L. Webster, Nat. Astron. **8**, 520 (2024).

**16**. O. K. Sil'chenko, Phys. Usp. **68**, 177 (2025) [О. К. Сильченко, УФН **195**, 188 (2025)].

**17**. M. Yu. Khlopov, B. A. Malomed, and Ya. B. Zeldovich, Mon. Not. R. Astron. Soc. **215**, 575 (1985).

**18**. Yu. G. Ignat'ev and D. Yu. Ignat'ev, Theor. Math. Phys. **209**, 1437 (2021) [Ю. Г. Игнатьев, Д. Ю. Игнатьев, ТМФ **209**, 142 (2021)].

**19**. Yu. G. Ignat'ev and D. Yu. Ignatyev, Gravit. Cosmol. **26**, 29 (2020).

**20**. O. I. Bogoyavlensky, *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics*, Springer, Berlin (1985) [О. И. Богоявленский, *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике*, Наука, Москва (1980)].

**21**. Yu. G. Ignat'ev, Theor. Math. Phys. **219**, 688 (2024) [Ю. Г. Игнатьев, ТМФ **219**, 181 (2024)].

**22**. S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford Univ. Press, Oxford (2008).

**23**. Yu. Ignat'ev, arXiv:1508.05375.

**24**. Yu. G. Ignat'ev, A. A. Agathonov, and D. Yu. Ignatyev, Gravit. Cosmol. **27**, 338 (2021).

**25**. Yu. Ignat'ev, A. Agathonov, M. Mikhailov, and D. Ignatyev, Astrophys. Space Sci. **357**, 61 (2015).

**26**. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford (1975) [Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973)].

**27**. J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam (1960) [Дж. Л. Синг, *Общая теория относительности*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963)].

**28**. Yu. G. Ignat'ev, Theor. Math. Phys. **226**, 338 (2026) [Ю. Г. Игнатьев, ТМФ **226**, 391 (2026)].

**29**. Yu. G. Ignat'ev, Theor. Math. Phys. **228**, 1261 (2026) [Ю. Г. Игнатьев, ТМФ **228**, 197 (2026)].

**30**. M. V. Fedoryuk, *Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin (1993) [М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, URSS, Москва (2009)].

**31**. Yu. G. Ignat'ev, Theor. Math. Phys. **219**, 792 (2024) [Ю. Г. Игнатьев, ТМФ **219**, 299 (2024)].

**32**. Yu. G. Ignat'ev, Theor. Math. Phys. **221**, 1711 (2024) [Ю. Г. Игнатьев, ТМФ **221**, 138 (2024)].

**33**. R. M. Wald, *General Relativity*, Univ. of Chicago Press, Chicago (1984).

**34**. B. S. DeWitt, Phys. Rep. **19**, 295 (1975).

**35**. L. B. Okun, *Leptons and Quarks*, North-Holland, Amsterdam (1982) [Л. Б. Окунь, *Лептоны и кварки*, Наука, Москва (1981)].

**36**. J. Schwinger, Phys. Rev. **75**, 651 (1949).

**37**. M. Bischetti, C. Feruglio, V. D'Odorico et al., Nature **605**, 244 (2022).

# Nonlinear Generation of Mass and Particles by Scalar Field Perturbations during the Formation of Supermassive Black Holes

***Yu. G. Ignat'ev***, I. A. Kokh*******

Kazan (Volga Region) Federal University
420008, Kazan, Russia

*E-mail: Yurii.Ignatev.21@gmail.com
**E-mail: kokh90@mail.ru

Received July 15, 2026
Revised September 25, 2026
Accepted September 26, 2026

**Abstract**

The nonlinear influence of unstable perturbations of a scalar field with a Higgs potential on the evolution of a supermassive black hole is investigated. Radial perturbations of the scalar field are described by asymptotic solutions of the complete self-consistent system of Einstein and scalar field equations in an ideal scalar-charged fluid. Quadratic perturbations of the scalar field form a halo around the nascent black hole, the mass of which can significantly exceed the singular mass of the black hole. The structure of the scalar halo depends on the magnitude of the scalar charge of the fluid. For a weakly charged fluid, the halo mass can be negative, resulting in a closed halo whose radius is determined by the zero total mass of the black hole and the halo. In this case, the black hole does not manifest itself as a gravitating object outside the halo and does not influence the cosmic microwave background radiation. The rate of Higgs boson production by scalar field oscillations is estimated. In the case of a quasi-neutral fluid, the particle production rate is high and increases infinitely with time. In the case of a scalar-charged fluid, particle production takes the form of a powerful, short-lived burst of radiation. Moreover, the number of particles produced is very large, allowing the halo to be considered a quasar body.

**Keywords**: supermassive black holes, scalar-gravitational instability, nonlinear mass generation, scalar halo, particle production

**Funding.** The study was not sponsored.

**Conflict of interest.** The authors declare that they have no conflict of interest.

**Authors' contributions.** The contributions of the authors are equal.