

ФУРЬЕ-АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ФРАКТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА НА ПРИМЕРЕ ВЕТВЕЙ ЕЛИ

О. Д. Шнырков ^{a,b*}, Е. Г. Яшина ^{a,b}, К. А. Пшеничный ^a, С. В. Григорьев ^{a,b}

^a Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»
188300, Гатчина, Ленинградская обл., Россия

^b Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 4 января 2026 г.,
после переработки 23 апреля 2026 г.
Принята к публикации 12 мая 2026 г.

Исследована фрактальная структура ветвей ели, покрытых хвоей, и без хвои с использованием метода численного фурье-анализа их изображений. Для проведения эксперимента были взяты пятнадцать веток с трех разных деревьев, произрастающих в лесном массиве. Получены результаты, характеризующие фрактальную структуру веток, и определена их фрактальная размерность. Усредненная по всему набору фрактальная размерность ветвей без иголок равна $D_f = 1.41 \pm 0.14$. Такая сеть ветвления, выполняющая транспортные функции, сама по себе имеет структуру массового фрактала с размерностью, типичной для механизма диффузионно-ограниченной агломерации. Обрамление еловой ветви хвоей приводит к увеличению средней фрактальной размерности до величины $D_f = 1.78 \pm 0.11$. Таким образом, продемонстрированы существенный рост фрактальной размерности при наличии хвои на ветке и тенденция к формированию логарифмического фрактала, для которого фрактальная размерность равна 2. Эта тенденция объясняется адаптивной оптимизацией таких факторов, как максимизация поверхности световосприимчивости (фотосинтез) при минимизации ресурсных затрат (транспортная система). Таким образом, показано различие во фрактальном строении ветви ели как транспортной системы (голая ветвь) и как площадки для фотосинтеза (ветвь, покрытая хвоей).

Ключевые слова: фурье-анализ, фрактальная размерность, скейлинг, двухкомпонентная система, иерархическое ветвление, логарифмический фрактал, массовый фрактал, диффузионно-ограниченная агрегация, хвойное дерево

DOI: 10.31857/S0044451026070099

1. ВВЕДЕНИЕ

Фрактальная геометрия, разработанная Мандельбротом [1], представляет собой мощный инструмент для количественного описания сложных пространственных структур, демонстрирующих масштабную инвариантность в широком диапазоне длин. Фундаментальные аспекты теории фракталов и ее многочисленные приложения в физике конденсированного состояния, материаловедении и биофизике подробно освещены в ряде авторитетных обзоров [2, 3].

С физической точки зрения особый интерес представляет изучение многокомпонентных фрактальных систем, где наблюдаемая скейлинговая картина формируется в результате суперпозиции вкладов от различных структурных уровней. Метод численного фурье-анализа двумерных проекций таких объектов позволяет не только определить эффективную фрактальную размерность, но и выявить конкуренцию различных механизмов структурообразования, проявляющуюся в изменении показателя степени Δ в законе Порода $I(q) \propto q^{-\Delta}$ на различных масштабах переданного импульса q . Такой подход, по сути моделирующий эксперимент по малоугловому рассеянию, успешно применяется для анализа мультифрактальных свойств широкого круга систем — от агрегатов коллоидных частиц [4] до мор-

* E-mail: oleg.shnyrkov@mail.ru

фологии биологических тканей [5]. В частности, в работе [5] было убедительно показано, что анализ фрактальной размерности АСМ-изображений клеток эпителия позволяет количественно охарактеризовать тонкие изменения морфологии, связанные с прогрессией патологических состояний, что подчеркивает чувствительность фурье-анализа к вариациям вклада отдельных структурных компонент в результирующую размерность объекта.

В этом контексте биологические макрообъекты, такие как ветвистые структуры древесных растений, представляют собой удобные модельные системы для изучения физических принципов формирования многокомпонентных фракталов. В частности, мультифрактальные объекты типа «хвойное дерево» (например, ветви *Picea abies*) характеризуются наличием двух выраженных подсистем: детерминированного транспортного каркаса (скелетные ветви) и стохастически распределенного функционального покрытия (хвоя) [6]. Формирование их структуры подчиняется вариационным принципам, связанным с конкуренцией двух фундаментальных физических механизмов: максимизации эффективной поверхности (для обеспечения фотосинтеза) и минимизации ресурсных затрат на построение и поддержание транспортной сети [7]. Традиционные методы измерения фрактальной размерности, включая box-counting [8], спектральный анализ [9] и метод Ричардсона [10], сталкиваются с известными ограничениями при работе с биологическими объектами, связанными с конечностью диапазона самоподобия и морфологической пластичностью [11]. Более того, сама структура скелетной ветви зачастую оказывается экранированной хвоей, что затрудняет разделение вкладов от различных иерархических уровней. Несмотря на определенный прогресс в изучении фрактальных свойств растительных структур, систематический анализ влияния отдельных структурных элементов (в частности, хвои) на результирующую фрактальную размерность до сих пор отсутствует. Это ограничивает понимание физических механизмов, определяющих формирование и функционирование таких систем. Отдельную значимость приобретают неинвазивные методы исследования, позволяющие проводить эксперименты, не причиняя вред живому объекту исследования.

Основной количественной характеристикой фрактальных объектов является фрактальная размерность D_f . Согласно работе [1], она описывает степень заполнения пространства структурой, отклоняющейся от евклидовой идеализации. В контексте биологических объектов это отклонение

отражает адаптивную оптимизацию, например, максимизацию поверхности газообмена при минимизации ресурсных затрат [12]. Для ветвей хвойных деревьев такая оптимизация проявляется в иерархическом ветвлении, обеспечивающем эффективное распределение питательных веществ и устойчивость к механическим нагрузкам. Часто биологические системы развиваются по принципу логарифмического фрактала [13, 14], характеризующегося целочисленной размерностью D и имеющего дополнительный параметр — логарифмическую подразмерность. Их структура подчиняется закону сохранения суммарной площади фрагментов на каждом уровне иерархии, что согласуется с эмпирическим правилом Леонардо да Винчи для ветвления деревьев [15]. Следует отметить различие: правило Леонардо применяется к площади сечения ветвей, а не к поверхности ветви, как показано в [13, 14].

Для измерения фрактальной размерности нанобъектов хорошо разработаны и активно используются методы малоуглового рассеяния нейтронов и проникающего рентгеновского излучения (МУРН/МУРР) [16]. Применительно к двумерным изображениям метод численного фурье-анализа фактически моделирует эксперименты по малоугловому рассеянию света (непроникающего излучения), преобразуя пространственные характеристики в угловые распределения интенсивности [17, 18]. Ключевым параметром исследования является тангенс угла наклона линейной зависимости интенсивности рассеяния от переданного импульса в двойном логарифмическом масштабе, коррелирующий с фрактальной размерностью объекта [19]. Применение этой методики к ветвям хвойных деревьев требует учета специфики их морфологии: наличия иголок, создающих иллюзию структурных шумов, и иерархического ветвления, формирующего мультифрактальные свойства [20].

Отметим, что «случайное» расположение хвои на ветви подчиняется своей закономерности и описывается в рамках фрактальной концепции структурой логарифмического фрактала. Иголки как элементы, имеющие очень малые размеры, формируют, в дополнение к структуре голой ветки, еще один фрактальный слой, который можно рассматривать как логарифмическую поправку к размерности пространства [20]. Являясь «листьями» хвойных деревьев, иголки обеспечивают дерево энергией, так как служат площадкой для фотосинтеза. Поэтому хвоя на дереве располагается таким образом, чтобы обеспечить его максимальную эффективность. Те иголки, которые больше не могут участвовать в

фотосинтезе, опадают, а вместо них вырастают новые на молодых ветках, позволяя дереву как можно более эффективно использовать окружающее пространство для фотосинтеза. Структура ветвей дерева также играет важную роль, выступая в роли транспортной системы дерева [21]. Другими словами, фрактальная геометрия возникает как адаптивный, многоуровневый принцип проектирования, который координирует транспорт, фотосинтез и механическую стабильность в ветвях хвойных деревьев в процессе развития и в окружающей среде.

Методология определения фрактальной размерности с помощью малоуглового рассеяния базируется на изучении зависимости интенсивности малоуглового рассеяния от переданного импульса, полученной экспериментальным путем. В классическом малоугловом рассеянии проникающего излучения (МУРН и МУРР) интенсивность рассеянного излучения $I(q)$ подчиняется степенному закону:

$$I(q) \propto q^{-\Delta}, \quad (1)$$

где q — переданный импульс или координата обратного пространства [16]. Показатель степени Δ известным образом связан с фрактальной размерностью D_f , а в случае массового фрактала $\Delta = D_f$. В настоящей работе вместо физического эксперимента используется численное моделирование эксперимента по малоугловому рассеянию света: фотографии ветвей преобразуются в бинарные матрицы, после чего применяется двумерное преобразование Фурье для получения аналога $I(q)$. По наклону линейной зависимости $\ln I(q)$ от $\ln q$ можно оценить D_f . Преимуществами данного метода являются неинвазивность и возможность увидеть различные фрактальные законы на разных масштабах. Так было показано, что структура молодых веток лиственных деревьев описывается фрактальным законом, отличающимся от закона для взрослых ветвей [22]. Можно предположить, что это связано с наличием листьев на молодых ветках и их отсутствием на взрослой ветви. Однако, несмотря на всю очевидность этого предположения, вопрос о характере фрактальной зависимости молодых ветвей лиственных деревьев (с листьями и без листьев) остается открытым.

В работе [20] нами изучены изображения ветвей взрослой ели. Было показано, что спектральная интенсивность $I(q)$, описывающая крупные структуры ветви, подчиняется степенной зависимости $q^{-\nu}$, где $\nu = 2$. Сделан вывод, что этот степенной закон характеризует ветвящуюся структуру, описываемую логарифмическим фракталом в двумерном

пространстве. Обнаруженная структура описывает распределение хвои на еловой ветви и связана с ее функциями фотосинтеза. Основная гипотеза настоящей работы заключается в том, что наблюдаемый переход от массового фрактала ($D_f \approx 1.4$) к логарифмическому ($D_f \approx 2.0$) является прямым следствием конкуренции двух скейлинговых режимов, соответствующих транспортной сети и функциональному покрытию. Наличие хвои, как дополнительного иерархического уровня, приводит к существенному увеличению фрактальной размерности по сравнению с голой ветвью, что отражается в изменении индекса Δ в степенной зависимости (1) на кривых, моделирующих кривые малоуглового рассеяния, в некотором диапазоне переданных импульсов. Для проверки этой гипотезы проведен сравнительный анализ изображений 15 ветвей ели, покрытых хвоей, и этих же ветвей после осыпания хвои.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 описывается метод численного фурье-анализа, включая критерии, которым должны соответствовать изображения ветвей на фотографии, чтобы можно было получить корректные результаты при их исследовании методом численного фурье-анализа. В этом разделе описываются условия проведения эксперимента и метод обработки фотографий. В разд. 3 приводятся результаты анализа фрактальной размерности ветвей ели, обрамленных хвоей, и без хвои, а также результаты анализа соотношения площадей веток с иголками и без иголок. В разд. 4 представлено обсуждение полученных результатов. В заключении приведены выводы.

2. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Метод численного фурье-анализа позволяет моделировать эксперимент по малоугловому рассеянию света на двумерных объектах, используя черно-белые изображения в виде квадратной матрицы, где каждый элемент принимает значение 0 или 1. Затем, поскольку матричные элементы фурье-образа являются комплексными числами, модуль фурье-образа матрицы возводится в квадрат и формируется двумерная карта рассеяния. Азимутальное усреднение этой карты дает кривую зависимости квадрата амплитуды фурье-образа от переданного импульса (по аналогии с методиками малоуглового рассеяния нейтронов и статического светорассеяния), участок которой подчиняется закону Порода: $I(q) \propto q^{-\Delta}$, где показатель степени Δ (наклон

линейной зависимости в двойном логарифмическом масштабе) связан с фрактальной размерностью объекта. Если $\Delta = 3$, то исследуемый объект является нефрактальным и его размерность равна размерности двумерного пространства $D_f = 2$. Граничному фракталу, в котором фрагментированность сосредоточена на границах объекта, соответствуют значения $2 < \Delta < 3$, и в этом случае $D_f = 4 - \Delta$. Логарифмическому фракталу соответствует значение $\Delta = 2$. Такой фрактал характеризуется двумя параметрами: фрактальной размерностью, равной $D_f = 2$, как у нефрактального объекта, и логарифмической подразмерностью, которая и делает этот фрактал особенным объектом. Если $\Delta < 2$, то исследуемый объект — массовый фрактал, фрагментированность в котором распределена по всему объекту, в этом случае $D_f = \Delta$.

Для применения метода определения фрактальной размерности с помощью программы fractal [23] важны критерии пригодности входных данных: изображения должны быть черно-белыми с минимальным количеством оттенков, без посторонних предметов. Либо у изображения должен быть черный фон, либо форма и размеры изображения должны быть квадратом со стороной, кратной степени двойки в пикселях. В связи с этим сбор материала требует соблюдения специфических условий: съемка проводится при равномерном освещении, тем самым исключается зашумление изображения тенями.

Эксперимент был проведен с 15 ветвями елей, растущих в затененном участке леса. Ветви были отобраны с нижней части деревьев с трех разных деревьев, произрастающих в лесном массиве. Их фотографировали в двух проекциях — сверху и снизу, и в двух состояниях — до и после естественного опадания хвои, с фиксацией линейных масштабов (рис. 1). Все фотографии были обработаны в графическом редакторе для приведения к требуемым критериям (бинаризация, кадрирование). Обработанные изображения были исследованы методом численного фурье-анализа с использованием программы fractal [23]. Шкала переданных импульсов, формируемая программой fractal [23], может быть переведена в шкалу масштабов реального пространства с помощью соотношения $L = 2\sqrt{2}\pi/q$, где q — переданный импульс, L — линейный размер в реальном пространстве.

Для каждой фотографии строились две зависимости квадрата амплитуды фурье-образа: одна для изображения ветви с максимально возможным разрешением в реальном пространстве (рис. 2 а), дру-

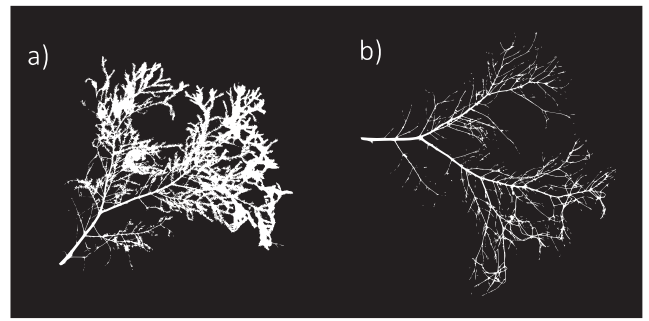


Рис. 1. Изображения ветви ели до (а) и после (б) естественного опадания хвои

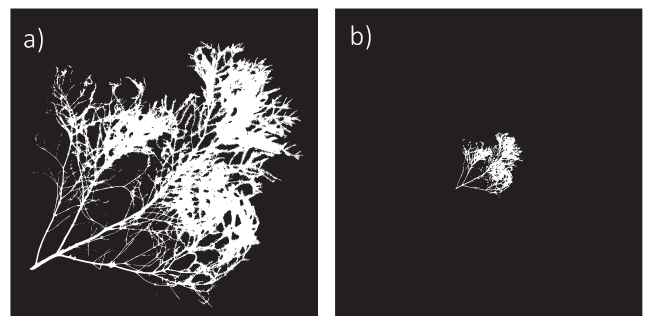


Рис. 2. Изображение одной и той же ветки с иголками: (а) когда линейный размер ветви приблизительно равен стороне квадрата, (б) когда линейный размер ветви в 4 раза меньше стороны квадрата. Разрешение обоих изображений одинаковое (4096 на 4096 пикселей)

гая — для изображения, сжатого в 4 раза (рис. 2 б), для того чтобы улучшить разрешение в обратном пространстве и лучше описать контуры ветви в целом. Две полученные кривые интенсивности совмещали с помощью нормировочного коэффициента так, чтобы в области перекрытия обе кривые совпадали. Эти две зависимости и комбинированная кривая показаны на рис. 3. Как видно на рис. 3, такая процедура позволяет лучше увидеть структуру кривой в области малых переданных импульсов (больших масштабов от 0.01 до 0.04 см⁻¹).

Характерные кривые, описывающие фотографии ветвей ели с иголками и без иголок, представлены на рис. 4 и 7 соответственно. Обе эти кривые содержат участок, который хорошо описывается суммой функций Гинье и Порода в области малых переданных импульсов при $q < q_c$. Кривая для ветвей с хвоей также демонстрирует участок при $q > q_c$, который описывается суммой функции Порода с другим наклоном и функцией Гаусса (рис. 4).

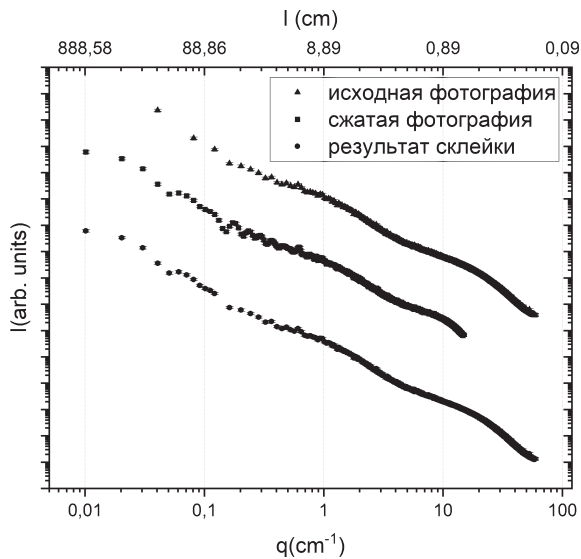


Рис. 3. Кривые зависимости квадрата амплитуды фурье-образа (по аналогии с малоугловым рассеянием), полученные фурье-преобразованием оригинальной фотографии ($|F(O(r))|^2$), фотографии, сжатой в 4 раза ($|F(O(4r))|^2$), и комбинация из двух предыдущих кривых ($|F(O(r))|^2 + |F(O(4r))|^2$)

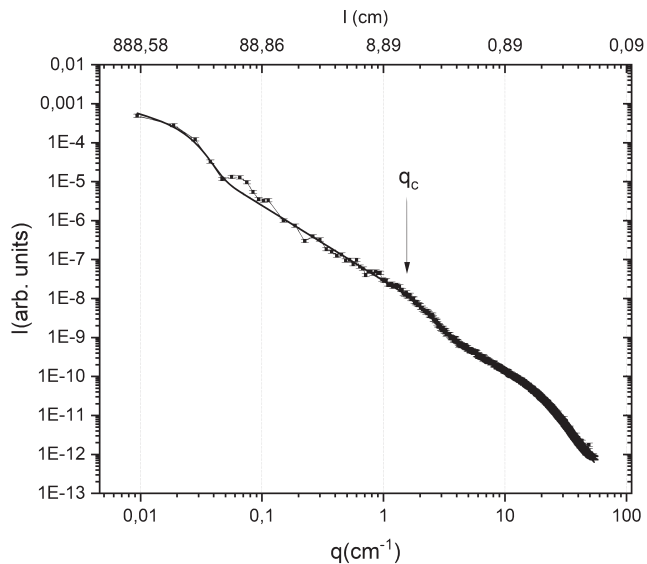


Рис. 4. Характерная кривая зависимости квадрата амплитуды фурье-образа, полученная преобразованием фотографии ветви ели, покрытой хвоей. Стрелкой показан импульс q_c , обозначающий нижнюю границу диапазона самоподобия во фрактальной зависимости $q^{-\Delta_1}$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ВЕТВЕЙ ЕЛИ

3.1. Исследование изображений ветвей ели с иголками

Для проверки гипотезы о роли хвои в формировании фрактальной структуры ветвей ели использовали 15 ветвей. Каждая ветвь была сфотографирована в двух проекциях (верх-низ), полученные изображения были исследованы методом численного фурье-анализа. Результаты для каждой ветви были усреднены по двум проекциям. После исследования веток в состоянии «с хвоей» они были пронумерованы и высушены до естественного опадания хвои.

Исследование полученных изображений методом численного фурье-анализа показало универсальный характер фрактальной структуры ветвей ели с иголками. Характерная кривая (аналогичная кривой, получаемой при малоугловом рассеянии) для веток с иголками показана на рис. 4. На кривой можно выделить несколько характерных участков, каждый из которых хорошо описывается определенными функциями. В области малых переданных импульсов q (менее 2 см^{-1}) интенсивность описывается суммой:

$$I(q) = A \exp\left(-\frac{(qR_g)^2}{3}\right) + Pq^{-\Delta_1}. \quad (2)$$

Первый член в этой сумме — функция Гинье, которая связана с размером ветки через радиус гирации R_g , а второй — функция Порода, показатель степени Δ_1 в которой связан с фрактальной размерностью. Исследования показали, что для фотографий веток с иголками радиус гирации принимает значения от 47 до 80 см с медианным значением $58 \pm 9 \text{ см}$ (рис. 5). Показатель степени Δ_1 в законе Порода принимает значения от 1.59 до 1.98 с медианным значением 1.78 ± 0.11 . Сам закон Порода хорошо описывает кривую в диапазоне переданных импульсов от 0.08 до 2 см^{-1} , что соответствует масштабам в реальном пространстве от 7 до 90 см.

Кривая в области больших переданных импульсов (более 2 см^{-1}) аппроксимировалась суммой степенной функции и функции Гаусса:

$$I(q) = Cq^{-\Delta_2} + D \exp\left(-2\frac{(q - q_c)^2}{\sigma_c^2}\right). \quad (3)$$

При этом гауссова зависимость описывает фактор иголки в обратном пространстве и фурье-образ корреляции между иголками, а степенная функция по существу является фоном, рассеянием на минимальном элементе фрактальной зависимости. Параметр σ_c описывает характерный масштаб корреляций между иголками. Для исследованных фотографий этот показатель принимает усредненные по двум проекциям веток значения от 21.6 до

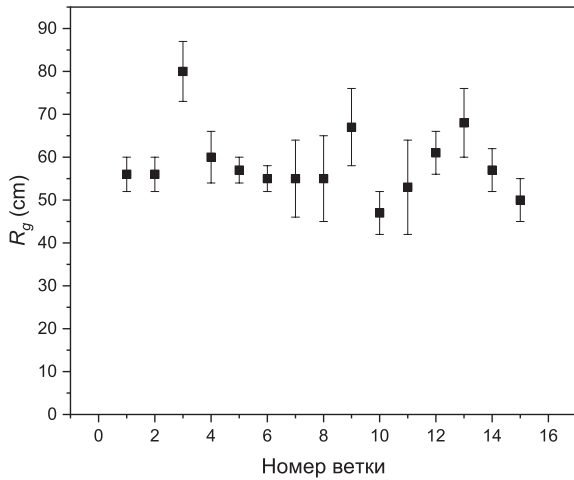


Рис. 5. Радиус гирации R_g для изображений веток с иголками

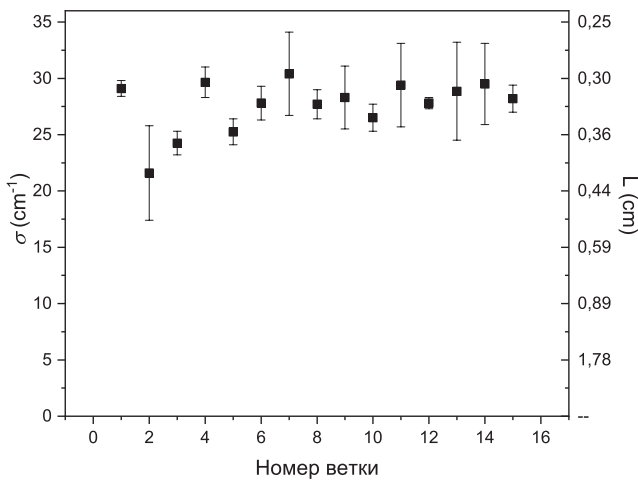


Рис. 6. Параметр σ_c для исследованных изображений веток с иголками

30.4 cm^{-1} с медианным значением $28 \pm 3 \text{ cm}^{-1}$, что соответствует масштабу $0.32 \pm 0.04 \text{ cm}$ в реальном пространстве (рис. 6).

3.2. Исследование изображений ветвей ели без иголок

После естественного опадения хвои ветви были снова сфотографированы, и их изображения были исследованы методом численного фурье-анализа. Результаты для каждой ветви были усреднены по двум проекциям. Исследование полученных изображений показало универсальный характер фрактальной структуры ветвей ели без иголок. Характерная кривая интенсивности для ветвей без иголок показана на рис. 7.

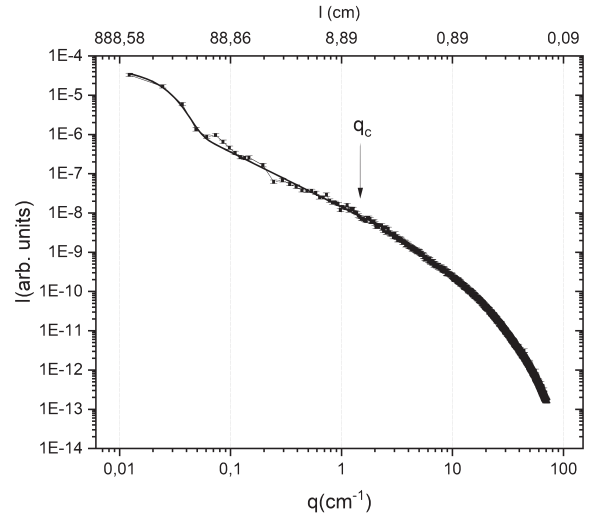


Рис. 7. Характерная кривая зависимости квадрата амплитуды фурье-образа, полученная при исследовании веток без иголок. Стрелкой показан импульс q_c , обозначающий нижнюю границу диапазона самоподобия во фрактальной зависимости $q^{-\Delta}$

Кривая в области малых переданных импульсов q (менее 2 cm^{-1}) так же хорошо описывается суммой функций Гинье и Порода (2).

Для изображений голых веток показатель степени в законе Порода (и фрактальная размерность) становится меньше и принимает значения от 1.16 до 1.65 с медианным значением $\Delta_1 = 1.42 \pm 0.14$ (рис. 8), что соответствует массовому фракталу с фрактальной размерностью, равной показателю степени D_f , закон Порода хорошо описывает полученную кривую в диапазоне переданных импульсов от 0.08 до 2 cm^{-1} , что соответствует масштабам в реальном пространстве от 7 до 90 см. По всей видимости, структура массового фрактала помогает дереву оптимизировать транспортные функции ветки. Радиусы гирации, полученные при исследовании фотографий ветвей ели без иголок, принимают значения от 45.5 до 73 см с медианным значением $61 \pm 8 \text{ cm}$ (рис. 9), что в пределах ошибки совпадает с R_g для ветвей с иголками.

В области больших переданных импульсов ($q > q_c$) кривые интенсивности $I(q)$ для голых ветвей характеризуются быстрым убыванием, отражающим отсутствие рассеивающих элементов этого масштаба на изображении ветви. Эта часть кривой отличается от кривых для ветвей с иголками, что обусловлено значительным вкладом от хвои на этих масштабах.

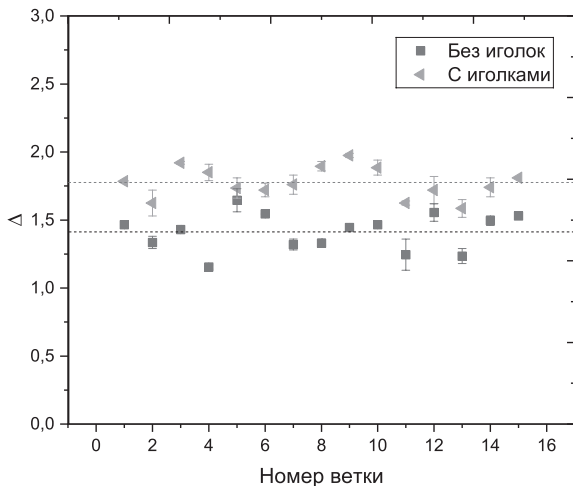


Рис. 8. Значения показателя степени в законе Порода для веток без иголок Δ_1^- и с иголками Δ_1^+

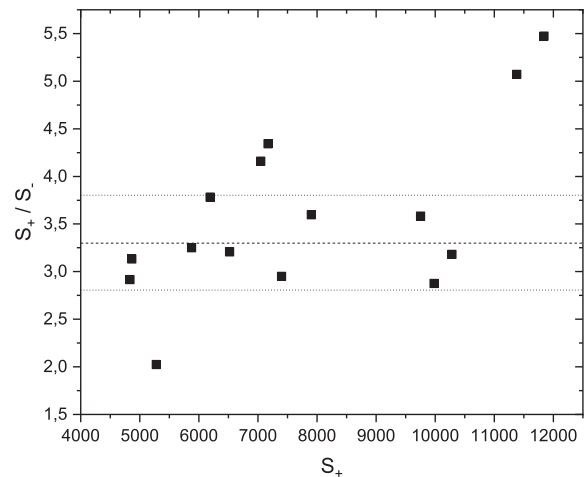


Рис. 10. Зависимость отношения S_+/S_- от площади ветки с иголками S_+

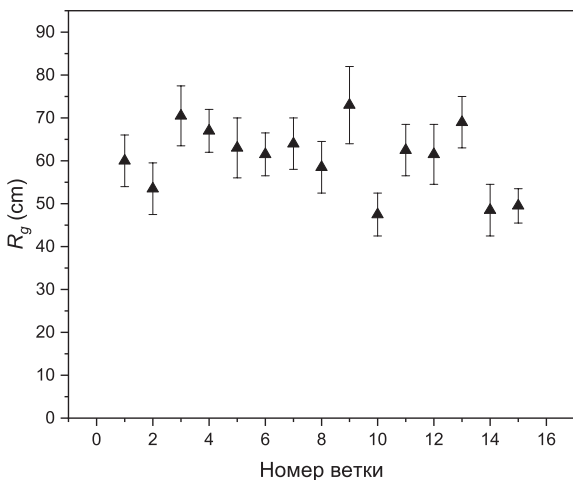


Рис. 9. Радиус гирации R_g для изображений веток без иголок

3.3. Анализ покрытия хвоей

Для лучшего понимания роли хвои во фрактальной структуре ветки и в жизни дерева видится полезным определить отношение площади, которую занимает ветка с иголками, к площади, которую занимает ветка без иголок. Алгоритм определения такого отношения для одной ветки следующий: определяем площадь одного пикселя на фотографиях ветки; определяем количество пикселей, которое занимает ветка на фотографиях с иголками в двух проекциях; умножаем это число на площадь одного пикселя; получившиеся результаты усредняем. Повторяем эту процедуру для фотографий той же ветки без иголок. Таким образом, для каждой фотографии будет получено два числа: усредненная по

двум проекциям площадь ветки с иголками (S_+) и усредненная по двум проекциям площадь ветки без иголок (S_-).

Как видно на рис. 10, отношение S_+/S_- для 10 веток из 15 попадает в диапазон 3.3 ± 0.5 . При этом больше всего от медианного значения 3.3 отличаются ветки, которые имеют наибольшую площадь S_+ .

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Все результирующие кривые для каждого типа веток (с иголками и без иголок) имеют схожую структуру. Кривые, полученные при исследовании фотографий веток с иголками в области малых переданных импульсов (менее 2 см^{-1} , что соответствует масштабам 7 см и более в реальном пространстве), хорошо описываются суммой функций Гинье и Порода, показатель в которой меньше 2, что соответствует массовому фракталу, при этом фрактальная размерность равна этому показателю, а в области больших переданных импульсов (более 2 см^{-1} , что соответствует масштабам менее 7 см в реальном пространстве) — суммой функции Порода с другим показателем наклона и функции Гаусса. Кривые, полученные при исследовании фотографий веток без иголок, так же хорошо описываются суммой функций Гинье и Порода в области малых переданных импульсов (больших масштабов), но в области больших переданных импульсов (малых масштабов) имеют структуру, отличную от той, которая была у кривых, полученных при исследовании веток с иголками, что естественным образом объясняется отсутствием хвои на малых масштабах. Кроме того,

так как хвоя, присутствуя в виде крупномасштабных агломераций, дает вклад в интенсивность на крупных масштабах, ее отсутствие приводит к изменению кривой и в области малых переданных импульсов: показатель наклона в законе Порода становится меньше.

Данные, полученные в результате эксперимента, демонстрируют, что наличие иголок существенно влияет на параметры фурье-спектра. Для веток с иголками наблюдается увеличение фрактальной размерности в области крупных масштабов (от 10 до 80 см) до 1.78 ± 0.11 по сравнению с образцами без иголок с фрактальной размерностью, равной 1.41 ± 0.14 . Этот эффект объясняется тем, что на больших масштабах (порядка десятков сантиметров) иголки образуют крупные агломерации, дающие вклад в соответствующую область кривой интенсивности как единые элементы. Поскольку количество ветвлений и их местоположение на ветвях не изменилось, следует отметить тенденцию к формированию логарифмического фрактала, при котором в идеальном случае фрактальная размерность достигает величины $\Delta = 2.0$. В области больших переданных импульсов (малых масштабов) в случае изображения веток с иголками наблюдается увеличение интенсивности, что связано с тем, что иголки — элементы с характерным размером ~ 1 мм (в ширину), вносят дополнительный вклад в спектр на масштабах, соответствующих их среднему расстоянию друг от друга (~ 0.5 – 1 см).

В работе [20] были исследованы фотографии ветвей ели, взятых у взрослой упавшей ели. Фрактальная размерность изображений ветвей на этих фотографиях получилась равной 2.0, за исключением небольшого числа веток, произраставших близко к вершине. Сравнивая ветки в текущем исследовании и ветки в исследовании [20], можно заметить, что те ветки гораздо более плотно покрыты хвоей, а ветки из настоящего исследования изначально были частично лишены хвойного покрова. Это наблюдение подтверждает гипотезу о главной роли хвои и хвойных агломераций в формировании структуры логарифмического фрактала. Являясь частью «живого» слоя вечнозеленого дерева, хвоя обеспечивает его энергией, потому что именно она участвует в фотосинтезе, поэтому для дерева жизненно необходимо использовать этот хвойный покров максимально эффективно. Те иголки, которые не участвуют в фотосинтезе, опадают, при этом вырастают новые ветки, которые покрываются новыми иголками, участвующими в фотосинтезе. При этом ветки также выполняют важную функцию в жизни дере-

ва, обеспечивая транспорт воды и других веществ.

Можно также заметить, что фрактальная размерность 1.42 соответствует процессу агрегации, ограниченной диффузией (ОДА, или DLA, diffusion limited aggregation). Алгоритм ограниченной диффузионной агрегации (ОДА/DLA) описывает процесс, в котором частицы случайным образом перемещаются и объединяются, образуя более крупные структуры. Этот процесс характеризуется тем, что более крупные скопления имеют более высокую вероятность притягивать новые частицы, в результате чего образуются дендритные, древовидные структуры. Естественно, необходимо учитывать детерминированные структуры ветвления, которые различаются, например, для ели и для сосны, тем не менее стохастический характер роста и физические ограничения (например, связанность объекта) приводят к фрактальной размерности ветви, соответствующей алгоритму DLA.

Отметим, что разница фрактальной размерности ветвей взрослой развившейся ели и нижних ветвей молодых елей, росших в чаще леса, отражает влияние внешних условий на рост и в конечном итоге на строение ветви ели. Известно, что нижние ветви елей в лесной чаще сохнут и со временем опадают, очевидно, из-за недостатка света для процесса фотосинтеза. То есть наличие или отсутствие хвои определяет жизнеспособность ветви. Можно предположить, что по фрактальной размерности изображения ветви ели легко определить степень комфорта для роста дерева в определенной местности, с определенным климатом и окружением, т. е. конкуренцией с другими деревьями. Здоровые, развитые экземпляры хвойных деревьев, по-видимому, характеризуются строением ветвей со структурой логарифмического фрактала. Зависимость квадрата фурье-образа изображения такой ветви от переданного импульса будет описываться степенным законом $q^{-\Delta}$, где $\Delta = 2.0$. Отклонение от этой закономерности ($\Delta < 2.0$) свидетельствует о неблагоприятных условиях для жизни дерева (недостаток ресурсов в почве, недостаток воды, недостаток света для фотосинтеза, вредители и т. д.).

Исследования фрактальных характеристик хвойных деревьев способны превратиться из элегантного способа физической характеристики дерева и его ветвей в метод, который окажется полезным и важным для таких отделов науки, как физиология растений, экология, эволюционные теории, лесоводство и т. д. Для этого мы попытались перевести фрактальную размерность D_f на язык функциональных характеристик деревьев,

предполагая, что фрактальная размерность D_f является результатом компромисса между площадью хвои (определяющей фотосинтез), размерами гидравлического тракта (длиной и сечением) и распределением механической нагрузки (веса ветви и ее сопротивления внешним воздействиям — ветру, снегу и т. п.).

В своей работе мы показываем, что фрактальная размерность D_f растет с появлением хвойного покрова от $D_f = 1.4$ для голой ветви до $D_f = 1.8$ или даже $D_f = 2.0$ [20] для ветви с хвоей. Предполагается, что величина $D_f = 2.0$ является предельной или оптимальной величиной, характеризующей идеальный компромисс факторов, формирующих ветвь ели в процессе роста. Случай $D_f > 2.0$ теория [19] относит к классу граничных фракталов, что для ветви означает значительное число пересечений, настолько большое, что часть веток будет закрыта соседними ветками, тем самым затеняя их и уменьшая светопоток, а значит, и ограничивая фотосинтез. При этом очевидно, что масса и гидравлический тракт ветви избыточно и неоправданно увеличиваются. Таким образом, величина $D_f = 2.0$ показывает «идеальное» физиологическое состояние ветви, обрамленной хвоей, при этом хвойный покров оптимально распределен по ветви для приема светопотока и фотосинтеза.

Фрактальная размерность $D_f = 1.4$ для голой ветви свидетельствует о ее строении как результате компромисса между количеством поставляемого фотосинтезом углерода, количеством воды, поставляемым по гидравлическому тракту, и распределением механической нагрузки. Этот параметр D_f для голой ветви может гипотетически меняться от 1.0 до 3.0. При этом $D_f = 1.0$ означало бы, что голая ветвь имеет форму одного прута, а $D_f = 3.0$ означало бы ветвь в форме однородного листа с гладкими краями. Тот факт, что $D_f = 1.4$, свидетельствует о ветвлении прутками, заполняющими пространство по принципу ОДА/DLA, как уже отмечалось выше.

Промежуточное значение D_f в диапазоне 1.4–2.0 для ветви, обрамленной хвоей, характеризует хвойный покров, как недостаточный для оптимального роста и развития ветви ели. Скорее всего, это состояние предваряет ее полное засыхание, а затем и отторжение.

Таким образом, фрактальная геометрия может быть переосмыслена как результат адаптивных компромиссов, которые занимают центральное место в эволюционной биологии.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом численного фурье-анализа исследованы фрактальные свойства изображений ветвей ели с иголками и без иголок. Для каждой ветки были взяты по две проекции в каждом из двух состояний. Во всех случаях на полученной кривой зависимости квадрата амплитуды фурье-образа наблюдается участок, хорошо описываемый законом Породы $I(q) = Aq^{-\Delta}$ в диапазоне переданных импульсов от 0.08 до 2 см^{-1} , что соответствует масштабам в реальном пространстве от 7 до 80 см. Показатель степени Δ оказывается меньше 2, что соответствует массовому фракталу. Показатель степени Δ для веток без иголок оказался существенно меньше, что объясняется отсутствием вклада от крупномасштабных агломераций хвои. Медианный показатель веток с иголками равен 1.78, а без иголок — 1.42, при этом поскольку на изначальных фотографиях часть ветви оказалась без хвои, можно сделать предположение, что полностью покрытая хвоей ветвь ели описывается структурой логарифмического фрактала, это предположение подтверждается сравнением с предыдущими результатами. Анализ полученных кривых позволил выявить зависимости между фрактальной размерностью веток и наличием хвои, подтвердив гипотезу о влиянии хвои на величину фрактальной размерности ветви ели и ее приближенности к структуре логарифмического фрактала.

С физической точки зрения полученные результаты демонстрируют, что исследуемая биологическая система ведет себя как классическая двухкомпонентная фрактальная среда, где результирующая скейлинговая картина определяется конкуренцией двух структурных уровней. Значение $D_f \approx 1.41$ для скелета ветви соответствует универсальному классу DLA-подобного роста, широко распространенному в физике неравновесных процессов. Увеличение размерности до $D_f \approx 1.78$ при добавлении хвои отражает переход к режиму частичного заполнения пространства, а предельное значение $D_f = 2.0$ для оптимально развитой ветви соответствует критической точке, разделяющей режимы массового и граничного фракталов. Таким образом, методы фурье-анализа 2D-проекций, развитые в физике конденсированного состояния для исследования наноструктур, демонстрируют свою эффективность при масштабировании на макроскопические биологические объекты, что открывает возможности для количественной характеристики степени адаптации живых систем к условиям окружающей среды.

Благодарности. Авторы благодарны Н. А. Григорьевой за помощь в сборе данных.

Финансирование. Работа поддержана Российским научным фондом (грант № 20-12-00188).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York (1983).
2. R. Lopes and N. Betrouni, *Med. Image Anal.* **13**, 634 (2009).
3. P. Abry, H. Wendt, S. Jaffard et al., *C. R. Phys.* **20**, 489 (2019).
4. P. Meakin, *Progr. Solid State Chem.* **20**, 135 (1990).
5. N. V. Guz, M. E. Dokukin, C. D. Woodworth et al., *Nanomedicine* **11**, 1667 (2015).
6. C. L. Alados, J. Escos, J. M. Emlen et al., *Int. J. Plant Sci.* **160**, 147 (1999).
7. D. D. Smith, J. S. Sperry, B. J. Enquist et al., *New Phytologist* **201**, 217 (2014).
8. D. Seidel, *Ecol. Evol.* **8**, 128 (2018).
9. I. M. Sokolov and R. Metzler, *Phys. Rev. E* **67**, 016110 (2003).
10. J. Tatsumi, A. Yamauchi, and Y. Kono, *Ann. Bot.* **64**, 499 (1989).
11. G. M. Berntson, *Ann. Bot.* **73**, 281 (1994).
12. E. R. Weibel, *Amer. J. Physiol.* **261**, 361 (1991).
13. S. V. Grigoriev, O. D. Shnyrkov, P. M. Pustovoit et al., *Phys. Rev. E* **105**, 044412 (2022).
14. S. V. Grigoriev, O. D. Shnyrkov, K. A. Pshenichnyi et al., *JETP* **136**, 378 (2023) [С. В. Григорьев, О. Д. Шнырков, К. А. Пшеничный и др., *ЖЭТФ* **163**, 428 (2023)].
15. J. O. Indekeu and G. Fleerackers, *Physica A* **261**, 294 (1998).
16. J. Teixeira, *J. Appl. Crystallogr.* **21**, 781 (1988).
17. R. Zwiggelaar and C. R. Bull, *Opt. Eng.* **34**, 1325 (1995).
18. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York (1968).
19. P. M. Pustovoit, E. G. Yashina, K. A. Pshenichnyi et al., *J. Surf. Invest.: X-ray, Synchrotron Neutron Tech.* **14**, 1232 (2020) [П. М. Пустовойт, Е. Г. Яшина, К. А. Пшеничный и др., *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования* **12**, 3 (2020)].
20. S. V. Grigoriev, O. D. Shnyrkov, K. A. Pshenichnyi et al., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **166** (2024) [С. В. Григорьев, О. Д. Шнырков, К. А. Пшеничный и др., *ЖЭТФ* **166**, 888 (2024)].
21. G. B. West, J. H. Brown, and B. J. Enquist, *Nature* **400**, 664 (1999).
22. S. V. Grigoriev, O. D. Shnyrkov, K. A. Pshenichnyi et al., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **165** (2024) [С. В. Григорьев, О. Д. Шнырков, К. А. Пшеничный и др., *ЖЭТФ* **165**, 438 (2024)].
23. K. A. Pshenichnyi, fractal: Fourier analysis of two-dimensional binary images. GitHub repository; <https://github.com/tre3k/fractal>.

Fourier Analysis of Images of a Two-Component Fractal Object: A Case Study of Spruce Branches

O. D. Shnyrkov^{a,b}, E. G. Iashina^{a,b}, K. A. Pshenichnyi^a, S. V. Grigoriev^{a,b}*

^a B. P. Konstantinov Petersburg Nuclear Physics Institute of National Research Center «Kurchatov Institute»
188300, Gatchina, Leningrad region, Russia

^b Saint Petersburg State University
198504, Saint Petersburg, Russia

*E-mail: oleg.shnyrkov@mail.ru

Received January 4, 2026

Revised April 23, 2026

Accepted May 12, 2026

Abstract

The fractal structure of spruce branches, both needle-covered and bare, has been studied using numerical Fourier analysis of their images. Fifteen branches were collected from three different trees growing in a natural forest area. The fractal dimensions of the branches were determined, and the results characterizing their fractal structure are presented. The average fractal dimension of the bare branches (without needles) over the whole sample is $D_f = 1.41 \pm 0.14$. This branching network, which performs transport functions, possesses a mass-fractal structure with a dimension typical of the diffusion-limited aggregation mechanism. The presence of needles on a branch increases the average fractal dimension to $D_f = 1.78 \pm 0.11$. Thus, a substantial increase in the fractal dimension is observed in the presence of needles, together with a tendency toward the formation of a logarithmic fractal, for which the fractal dimension equals 2. This tendency is explained by the adaptive optimization of such factors as the maximization of the photosynthetic surface (photosynthesis) while minimizing the resource costs (transport system). Hence, the difference between the fractal structure of a spruce branch as a transport system (bare branch) and as a platform for photosynthesis (branch covered with needles) is clearly demonstrated.

Keywords: Fourier analysis, fractal dimension, scaling, two-component system, hierarchical branching, logarithmic fractal, mass fractal, diffusion-limited aggregation, coniferous tree

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 20-12-00188).

Conflict of interest. The authors declare that they have no conflicts of interest.

Authors' contributions. The contributions of the authors are equal.