

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ВЕРИФИЦИРОВАННЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ГРАВИТАЦИИ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И КРУЧЕНИЯ

*Е. С. Денцель**

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
105005, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 17 февраля 2026 г.,
после переработки 2 июня 2026 г.
Принята к публикации 2 июня 2026 г.

Рассмотрены космологические модели, основанные на гравитации с неминимальной связью скалярного поля и кручения. Выбран анзац для произвольной функции связи в виде степенной зависимости от параметра Хаббла. Построение основано на виде зависимости для функции неминимальной связи, позволяющей рассматривать эволюцию Вселенной в двух режимах. В рамках приближения медленного скатывания предложенный подход соответствует сценарию космологической инфляции с обобщенными точными решениями, а на постинфляционной стадии — телепараллельному эквиваленту общей теории относительности. Предложенный подход позволяет рассматривать физические потенциалы известных моделей космологической инфляции при определенном значении произвольных параметров модели. Данный метод обеспечивает корректную динамику инфляционных сценариев, включая стадию ускоренного расширения и выход из инфляции. Проведен анализ применимости приближения медленного скатывания на стадии космологической инфляции. На примере MLFI (Mixed Large Field Inflation) показано, что модель в рамках гравитации с неминимальной связью скалярного поля и кручения верифицируется с учетом современных наблюдательных ограничений ACT DR6 на параметры космологических возмущений. Получены значения произвольных параметров модели.

Ключевые слова: космологическая инфляция, модифицированные теории гравитации, неминимальная связь скалярного поля и кручения, телепараллельный эквивалент общей теории относительности, скаляр кручения, приближение медленного скатывания, параметры космологических возмущений, тензорно-скалярное отношение, спектральный индекс, MLFI

DOI: 10.31857/S0044451026070011

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели космологической инфляции, основанные на скалярном поле, позволяют успешно решать задачи теории Большого взрыва, а также описывать начальную стадию эволюции ранней Вселенной [1–3]. Источником является скалярное поле, или инфлатон, приводящее к ускоренному расширению на временах, близких к планковским. Особенность данной стадии эволюции Вселенной — уравнение состояния с отрицательным давлением, т. е. $p \simeq -\rho$ [1].

После исходного экспоненциального расширения инфлатон скатывается к минимуму потенциала скалярного поля и осциллирует около него, после чего уравнение состояния меняется, и происходит фазовый переход к фридмановской стадии.

Наличие инфлатона также позволяет последовательно объяснить механизм образования элементарных частиц [1, 3]. На поздних временах Вселенная повторно ускоренно расширяется за счет темной энергии [3, 4]. В космологической модели Λ CDM темная энергия отождествляется с космологической постоянной [3]. В качестве иного описания без Λ -члена в ряде космологических моделей вводят динамическое скалярное поле, или квинтэссенцию [3].

* E-mail: edentsel@yandex.ru

Подобные модели можно строить как в рамках теории гравитации Эйнштейна [1], ее телепараллельного эквивалента (TEGR), так и с точки зрения их различных расширений и модификаций [1, 5–11]. Тем не менее, необходимо учитывать, что в модифицированных теориях гравитации (МТГ) введение неминимальной связи скалярного поля и кручения нарушает локальную лоренц-ковариантность [12]. Это приводит к уравнениям фоновой динамики, отличным от гравитации Эйнштейна, в отличие от TEGR, эквивалентной ОТО. Существуют различные методы построения и анализа таких моделей, один из которых заключается в восстановлении произвольных параметров модели на основе заданной зависимости между параметрами космологических возмущений [7]. С другой стороны, возможен анализ физических эффектов, которые индуцируют теории гравитации [1, 3]. Следовательно, развитие данных подходов в рамках гравитации с неминимальной связью скалярного поля и кручения, а также разработка классификации моделей, устанавливающих связь между произвольными параметрами, является актуальной задачей для современной космологии.

Модифицированные теории гравитации успешно применяются для построения космологических моделей с корректной динамикой, предполагающей стадию ускоренного расширения в начале инфляции и на более поздних этапах [1–5]. Более того, такие сценарии удовлетворяют наблюдательным ограничениям на параметры космологических возмущений.

Гравитация с неминимальной связью скалярного поля и кручения с обобщенными точными решениями рассматривалась в [7]. В основе используется телепараллельная гравитация, которая формулируется в пространстве Вайценбека. Эта геометрия характеризуется нулевой кривизной и ненулевым кручением, а неметричность отсутствует. В работе показан метод восстановления функции неминимальной связи из зависимости тензорно-скалярного отношения r от спектрального индекса скалярных возмущений n_S . На основе линейной зависимости $r \sim (1 - n_S)$ получена связь между произвольной функцией скалярного поля $G(\phi)$ и потенциалом скалярного поля $V(\phi)$.

В отличие от подхода, предложенного в [7], в данной работе функция неминимальной связи $f(T, \phi)$ содержит дополнительное слагаемое, линейно зависящее от скаляра кручения, что позволяет рассматривать модель в двух режимах, в зависимости от того, какое слагаемое преобладает на рассматриваемой стадии: в рамках медленного скатывания с по-

следующим выходом из космологической инфляции и дальнейшей постинфляционной. Представлен новый метод, согласно которому на основе выбора $H(t)$ и $\phi(t)$ из решений восстанавливается потенциал в зависимости от скалярного поля $V(\phi)$. В качестве связи между параметром Хаббла и функцией скалярного поля рассмотрена зависимость $G = G_0 (H)^n$.

При определенных значениях произвольных констант полученное решение сводится к сценариям космологической инфляции типа MLFI (Mixed Large Field Inflation). Далее, из наблюдательных ограничений на параметры космологических возмущений [13, 14] получены значения произвольных параметров модели. Проведен анализ применимости приближения медленного скатывания, а также получены численные значения полей на пересечении радиуса Хаббла и в завершении стадии инфляции.

2. ГРАВИТАЦИЯ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И КРУЧЕНИЯ

Рассмотрим модифицированные теории гравитации на основе телепараллельного эквивалента общей теории относительности [11] со следующим действием в системе единиц $c = 8\pi G = M_P^{-2} = 1$:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x e T + S_m, \quad (1)$$

где

$$e = \det(e_\mu^a) = \sqrt{-g},$$

M_P^2 — редуцированная масса Планка, T — скаляр кручения, который в общем случае определяется как свертка тензора кручения и суперпотенциала [11]. В дальнейшем рассмотрим вакуум, поэтому часть действия, связанного с материальным сектором, $S_m = 0$. TEGR является калибровочной группой трансляций и частным случаем метрико-аффинной гравитации, для которой характерными тензорами являются кривизна $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$, неметричность $Q_{\mu\nu\rho}$ и кручение $T^\mu{}_{\nu\rho}$ [11]. Для телепараллельной гравитации справедливо

$$Q_{\mu\nu\rho} = 0, \quad R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0.$$

Модели на основе TEGR используют в качестве динамической переменной тетраду [15] (тетрадный формализм), т.е. тетрадное поле $e_a(x^\mu)$, которое связывает пространственно-временную метрику $g_{\mu\nu}$ с метрикой касательной пространства Минковского η_{ab} соотношением [16]

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad (2)$$

а тетрады также подчиняются условию ортогональности $e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu$ [11]. Второй фундаментальной величиной является связность Вайценбека ω_μ^b [17]. Тогда тензор кручения можно записать в виде [6]

$$T_{\mu\nu}^\rho = e_a^\rho [\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b - \omega_{b\nu}^a e_\mu^b]. \quad (3)$$

Также отметим связь между скаляром кручения и скаляром кривизны R : [6]

$$T = -R - \frac{\partial_\mu (T^{\nu\mu})}{e}. \quad (4)$$

Характерная особенность заключается в нарушении локальной лоренц-ковариантности из-за наличия ω_μ^b [11], поэтому рассматриваются такие системы отсчета, для которых связность равна нулю, т. е. $\omega_\mu^b = 0$. Это возможно при выборе «подходящей» тетрады, которая в пространственно-плоской метрике Фридмана – Робертсона – Уокера (ФРУ) [3]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (5)$$

имеет вид [6]

$$e_\mu^a = \text{diag}(1, a, a, a), \quad (6)$$

где $a = a(t)$ – масштабный фактор. Необходимо отметить, что метрике (5) соответствует скаляр кручения вида [6, 18]

$$T = 6H^2, \quad (7)$$

$H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ – параметр Хаббла [3]. Космологическая модель на основе неминимальной связи скалярного поля и кручения описывается действием [18, 19]

$$S = \int d^4x e [f(T, \phi) + \omega(\phi) X], \quad (8)$$

где

$$X = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi,$$

$f(T, \phi)$ – произвольная дифференцируемая функция скаляра кручения T и эволюции скалярного поля ϕ . Кинетическое слагаемое в метрике ФРУ (5) определим как

$$\omega(\phi) X = \frac{1}{2} \omega(\phi) \dot{\phi}^2.$$

Варьирование действия (8) позволяет получить космологические уравнения фоновой динамики [6, 7]:

$$f(T, \phi) - \frac{1}{2} \omega(\phi) \dot{\phi}^2 - 2T f_{,T} = 0, \quad (9)$$

$$f(T, \phi) + \frac{1}{2} \omega(\phi) \dot{\phi}^2 - 2T f_{,T} - 4 \frac{d}{dt} (H f_{,T}) = 0, \quad (10)$$

$$\omega(\phi) \ddot{\phi} + 3\omega(\phi) \sqrt{\frac{T}{6}} \dot{\phi} + \frac{1}{2} \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \dot{\phi}^2 - f_{,\phi} = 0, \quad (11)$$

$$H = \sqrt{\frac{T}{6}}, \quad f_{,T} = \frac{\partial f}{\partial T}, \quad f_{,\phi} = \frac{\partial f}{\partial \phi},$$

точка обозначает производную по космическому времени.

Рассмотрим функцию неминимальной связи скалярного поля и кручения в следующем виде [7]:

$$\begin{aligned} f(T, \phi) &= -\frac{\alpha_2}{2} T + \alpha_1 G(\phi) \sqrt{T} - \alpha_2 V(\phi) = \\ &= f(T, \phi)_{STG} - \frac{\alpha_2}{2} T - \alpha_2 V(\phi), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}, \quad \alpha_2 > 0,$$

$$f(T, \phi)_{STG} = \alpha_1 G(\phi) \sqrt{T},$$

$G = G(\phi)$ – произвольная функция скалярного поля. Функция (12) задает гравитацию в выбранной модели. Рассмотрим случай, когда

$$\left| -\frac{\alpha_2}{2} T \right| \ll \left| \alpha_1 G(\phi) \sqrt{T} \right|.$$

Тогда функция неминимальной связи примет вид

$$f(T, \phi) \approx \alpha_1 G(\phi) \sqrt{T} - \alpha_2 V(\phi) = f_1(T, \phi). \quad (13)$$

В таком случае решения для $\omega(\phi)$ и $\dot{\phi}$ совпадают с решениями в работе [7]

$$\omega(\phi) = \frac{\alpha_1^2}{3\alpha_2} \frac{G_{,\phi}^2}{V(\phi)}, \quad (14)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{6}\alpha_2}{\alpha_1} \frac{V(\phi)}{G_{,\phi}}, \quad (15)$$

где $G_{,\phi} = dG(\phi)/d\phi$. Корректность решений можно проверить, подставив (1)–(15) в уравнения динамики (9)–(11). Для выбранной функции (12) ($f \sim \sqrt{T}$) в уравнении (9) получим

$$f_{,T} = \frac{1}{2} \alpha_1 G(\phi) T^{1/2},$$

поэтому член

$$2T f_{,T} = \alpha_1 G(\phi) T^{1/2}$$

оказывается того же порядка, что и $f(T, \phi)$. Таким образом, противоречия между выбором решения вида (12) и уравнением (1) не возникает.

Решения (1)–(15) справедливы для произвольных функций $G(\phi)$, $V(\phi)$ и $\omega(\phi)$, удовлетворяющих указанным соотношениям. При подстановке в исходные уравнения они удовлетворяются тождественно без каких-либо дополнительных предположений [7]. Необходимо отметить, выбор явного вида зависимостей $H(t)$ и $\phi(t)$ подразумевает рассмотрение возможного сценария космологической инфляции, как и выбор потенциала скалярного поля.

Запишем потенциал скалярного поля как функцию космического времени. Для этого можно переписать уравнение (15), используя соотношение

$$\frac{dG}{d\phi} = \frac{dG}{d\phi} \frac{dt}{dt} = \frac{\dot{G}}{\dot{\phi}}, \quad (16)$$

в результате получим выражение для $V(t)$

$$V(t) = \frac{\alpha_1 \dot{G}}{\sqrt{6\alpha_2}}. \quad (17)$$

Так как решения (1)–(15) справедливы для произвольной космологической динамики, то зависимость эволюции скалярного поля и параметра Хаббла от времени может быть произвольной. Таким образом, при определенном значении констант в соотношении (17) и выборе $\phi(t)$ можно получить потенциалы известных моделей космологической инфляции $V(\phi)$ в зависимости от скалярного поля [20]. Преимущество данного метода состоит в том, что за счет выбора свободных параметров системы реализуется выбранный инфляционный сценарий, характеризующийся как определенным механизмом реализации, так и гарантирующий ускоренное расширение Вселенной и выход из инфляционной стадии. Зависимость функции неминимальной связи $G(\phi)$ от потенциала $V(\phi)$ в данном случае восстанавливается из решений, в отличие от метода реконструкции $G(\phi)$ из вида зависимости $r(n_S)$ [7].

Предложенный метод требует существования обратной зависимости $t(\phi)$ для получения потенциала $V(\phi)$ по заданной зависимости $\phi(t)$ и $H(t)$. В общем случае это может быть выполнено только численно, если обратная функция не выражается через элементарные функции. Тем не менее, для широкого класса функций $\phi(t)$ (степенные, экспоненциальные и др.) $t(\phi)$ выражается явно. В данной работе рассматривается именно такой случай, что позволяет получить аналитические выражения для $V(\phi)$.

Также необходимо подчеркнуть, что частный случай выбора функций

$$f_1(T, \phi) = -\frac{1}{2}T - V(\phi), \quad \omega(\phi) = 1, \quad (18)$$

полностью соответствует TEGR и уравнениям фоновой динамики гравитации Эйнштейна в связи с эквивалентностью данных моделей [6, 7]:

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (19)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad (20)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (21)$$

где

$$V_{,\phi} = \frac{dV}{d\phi}.$$

В модифицированных теориях гравитации скаляр кручения на основе тензора (3) содержит первые производные по тетраде, в отличие от скаляра кривизны R со вторыми производными по метрике. Исходя из зависимости для скаляра кручения (7),

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

решений (1)–(15), и метрики (5), уравнения (9)–(11) второго порядка, что решает проблему неустойчивости Остроградского, или отсутствие духовых степеней свободы, связанных с производными высших порядков. Следовательно, нет поправок, индуцируемых членами более высокого порядка, в отличие от гравитации Эйнштейна – Гаусса – Бонне (ЭГБ) [21].

Отсутствию духовых степеней свободы для кинетического члена в действии (8) соответствует следующее условие [6]

$$\frac{1}{\omega(\phi)} \frac{d^2 f(\phi, T)}{d\phi^2} < 0, \quad (22)$$

поэтому в дальнейшем рассматриваются канонические скалярные поля с $\omega(\phi) > 0$ и $\frac{d^2 f(\phi, T)}{d\phi^2} < 0$, для которых также возможно переопределить поле в виде

$$\varphi = \int \sqrt{\omega(\phi)} d\phi, \quad C = \text{const}. \quad (23)$$

Перечислим основные ограничения функции $f_1(T, \phi)$: она должна быть гладкой и как минимум дважды дифференцируема по скалярному полю и кручению, $f_{,T} < 0$ для отсутствия духовых степеней свободы [6], а также удовлетворять соотношению (22) и в частном случае (18) приводить к TEGR.

Дальнейший анализ космологических сценариев проведем на основе режима медленного скатывания, параметры которого задаются в следующем виде [3]:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \delta = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}}. \quad (24)$$

Чтобы предложенная модель с решениями (1)–(15), удовлетворяла приближению медленного скатывания, необходимо выполнение условия

$$\frac{\omega(\phi)X}{V} \ll 1 \quad (25)$$

до пересечения радиуса Хаббла, а также ограничений на параметры медленного скатывания

$$\epsilon \ll 1, \quad \delta \ll 1 \quad (26)$$

на пересечении радиуса Хаббла $k = aH$. Оценим отношение (25):

$$\frac{\omega X}{V} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1^2}{3\alpha_2} \frac{G_{,\phi}^2}{V} \frac{6\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \frac{V^2}{G_{,\phi}} = \alpha_2. \quad (27)$$

следовательно, отношение кинетического слагаемого к потенциалу постоянно.

Определим разность числа е-фолдов ΔN [3]

$$\Delta N = \int_{t_H}^{t_e} H dt, \quad (28)$$

где t_H — время пересечения радиуса Хаббла и t_e — время завершения стадии инфляции.

Представленный подход (1)–(15) справедлив для произвольной космологической динамики и позволяет анализировать фоновую динамику моделей независимо от произвольной эволюции скалярного поля, его потенциала и масштабного фактора. Зависимость для произвольной функции G представлена в следующем виде:

$$G = G_0 H^n, \quad G_0 = \text{const}. \quad (29)$$

3. ПАРАМЕТРЫ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Параметры космологических возмущений определим следующим образом [6]. Спектр мощности скалярных возмущений \mathcal{P}_S :

$$\mathcal{P}_S \Big|_{k=aH} = \left(\frac{H^2}{8\pi^2 Q_S} \right), \quad Q_S = \frac{\omega X}{H^2}. \quad (30)$$

На пересечении радиуса Хаббла, подставив (14) и (15) в (30), получим

$$(\mathcal{P}_S)_{k=aH} = \left(\frac{H^4}{8\pi^2 \alpha_2 V} \right). \quad (31)$$

Тензорно-скалярное отношение [6, 7]

$$r = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_S} = 16\delta_{\omega X} = 16\alpha_1 \frac{\dot{G}}{HG}, \quad (32)$$

где

$$\delta_{\omega X} = -\frac{\omega X}{2H^2 f_{,T}},$$

а спектральный индекс скалярных возмущений определяется как [6]

$$n_S - 1 = -2\epsilon - \eta + 3\eta_R, \quad \eta = \frac{\dot{Q}_S}{HQ_S}, \quad (33)$$

$$\eta_R = \delta_{f,T} \left[1 + \frac{\delta_{f,T}}{\delta_{f\dot{H}}} \left(\frac{\delta_{fX}}{\delta_{\omega X}} \right) \right], \quad (34)$$

где

$$\delta_{f,T} = \frac{f_{,T}}{Hf_{,T}}, \quad \delta_{f\dot{H}} = \frac{f_{,TT}\dot{T}}{Hf_{,T}}, \quad \delta_{fX} = \frac{f_{,T\phi}\dot{\phi}}{Hf_{,T}}.$$

Необходимо отметить, что формулы (31), (32) и (33) справедливы, когда выполняются условия

$$\dot{\delta}_{PX} \sim \dot{\delta}_{f,T} \sim \dot{\delta}_{fX} \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

в приближении медленного скатывания [6]. Тогда, учитывая (33) и (34), n_S примет вид [7]

$$n_S - 1 = 4\frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\ddot{G}}{HG} + 2 \left(-\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\dot{G}}{HG} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{H\dot{G}}{G\dot{H}} \right) \left(1 + \frac{1}{\alpha_1} \right) \right]. \quad (35)$$

Для удобства анализа модели представим (35) в терминах параметров медленного скатывания:

$$n_S - 1 = 2\delta + \epsilon(n - 5) + 2\epsilon(1 - n) \left[1 + (1 - n) \left(1 + \frac{1}{\alpha_1} \right) \right]. \quad (36)$$

Помимо основных параметров, анализ космологических возмущений осуществляется с учетом дополнительного — убегания скалярных возмущений [1]

$$\frac{dn_S}{d \ln k} = \frac{1}{H(1 - \epsilon)} \left(\frac{d(n_S)}{dt} \right). \quad (37)$$

Современные наблюдательные ограничения на параметры космологических возмущений по последним данным ACT DR6 [13]:

$$r < 0.028, \quad \mathcal{P}_S = 2.1 \cdot 10^{-9}, \quad n_S = 0.974 \pm 0.003, \quad (38)$$

а также ограничение на убегание скалярных возмущений [14]:

$$\frac{dn_S}{d \ln k} = 0.0062 \pm 0.0052. \quad (39)$$

4. МОДЕЛЬ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФЛЯЦИИ

Рассмотрим параметр Хаббла в следующем виде:

$$H = e^{-mt} + d, \quad (40)$$

где m, d — некоторые положительные постоянные. Выражение для параметра Хаббла (40) действительно на стадии космологической инфляции, асимптотическое продолжение на все промежутки времени физически некорректно. Аналогично, константа d не ассоциируется с космологической постоянной. Из уравнения (17) получим

$$V(t) = -\frac{\sqrt{6} \alpha_1 G_0 n m}{3 \alpha_2} e^{-mt} (\exp^{-mt} + d)^{n-1}. \quad (41)$$

Рассмотрим степенную зависимость эволюции скалярного поля от космического времени:

$$\phi(t) = A e^{-Bt}, \quad (42)$$

где A, B — произвольные положительные постоянные. Тогда, выразив обратную зависимость $t(\phi)$ из (42),

$$t(\phi) = -\frac{1}{B} \ln \left(\frac{\phi}{A} \right), \quad (43)$$

получим потенциал как функцию скалярного поля в частном случае $B = m/2, n = 2$

$$V(\phi) = -\frac{\sqrt{6} \alpha_1 G_0 m d}{3 \alpha_2} \left(\frac{\phi}{A} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{d} \left(\frac{\phi}{A} \right)^2 \right], \quad (44)$$

что соответствует сценарию космологической инфляции MLFI с потенциалом вида [20]

$$V(\phi) = V_0 \phi^2 (1 + \alpha \phi^2), \quad (45)$$

где константа V_0 определяет энергетический масштаб инфляции. В моделях с потенциалом типа MLFI обобщается подход как с малым, так и большим полем, позволяя реализовывать гибридную инфляцию [22, 23].

Запишем параметры медленного скатывания, применив соотношение (24):

$$\epsilon = \frac{m e^{-mt}}{(e^{-mt} + d)^2}, \quad \delta = \frac{m}{2(e^{-mt} + d)}. \quad (46)$$

Завершение инфляции определяется, исходя из условия $\epsilon(t = t_e) = 1$, следовательно, время завершения данной стадии определим как

$$t_e = -\frac{1}{m} \ln \left[-d + \frac{m}{2} \pm \frac{\sqrt{m^2 - 4dm}}{2} \right]. \quad (47)$$

Положительному времени завершения стадии инфляции соответствует условие

$$0 < -2d + m \pm \sqrt{m^2 - 4dm} < 2.$$

Согласно ограничениям (38), константа $\alpha_1 < 0$, что также соответствует положительному потенциалу скалярного поля в уравнении (41).

Запишем тензорно-скалярное отношение для модели с параметром Хаббла (40)

$$r = -\frac{16 \alpha_1 n m e^{-mt}}{(e^{-mt} + d)^2}, \quad (48)$$

откуда время пересечения радиуса Хаббла с учетом наблюдательных ограничений:

$$t_H = -\frac{1}{m} \ln \left[\frac{-8 \alpha_1 n m - dr_H \pm 4 \sqrt{D}}{r_H} \right], \quad (49)$$

где

$$D = \alpha_1 m n (4 \alpha_1 m n + dr_H) \geq 0,$$

индекс H относится к величинам на пересечении радиуса Хаббла. Отсюда запишем ограничения на параметры: $4 \alpha_1 m n + dr_H < 0$, так как $\alpha_1 < 0$, и для положительного t_e получим

$$0 < -8 \alpha_1 n m + dr_H \pm \sqrt{D} < 1.$$

В дальнейшем t_{H_1} и t_{e_1} соответствуют знаку «+» в выражении для космического времени (49) и t_{H_2} и t_{e_2} — знаку «-». Параметр ϵ_H соответствует условию (26), поэтому также оценим его из общего выражения для тензорно-скалярного отношения (32):

$$\epsilon_H = -\frac{r_H}{16 \alpha_1 n} \ll 1. \quad (50)$$

Зная значение потенциала скалярного поля на пересечении радиуса Хаббла V_H , исходя из оценок энергетического масштаба инфляции [3]

($E_{inf} = V_H^{1/4}$), получим выражение для произвольного параметра α_2 из уравнения (41):

$$\alpha_2 = -\frac{\sqrt{6}\alpha_1 G_0 n m e^{-mt} (e^{-mt} + d)^{n-1}}{6V_H}. \quad (51)$$

Параметр G_0 получим из ограничения на \mathcal{P}_S (31):

$$G_0 = -\frac{\sqrt{6}e^{mt(n-4)}(1+de^{mt})^{1-n}E}{8\pi^2\mathcal{P}_S\alpha_1nm}, \quad (52)$$

где

$$E = d^4 e^{4mt} + 4d^3 e^{3mt} + 6d^2 e^{2mt} + 4de^{mt} + 1. \quad (53)$$

С учетом условия (26), $1-\epsilon \approx 1$, убегание скалярных возмущений (37) как функция параметров медленного скатывания выглядит следующим образом:

$$\frac{dn_S}{dt} = 2\dot{\delta} + \dot{\epsilon} \left(\frac{2}{\alpha_1} - 3 \right), \quad (54)$$

где точка обозначает производную по космическому времени. Выразим α_1 из спектрального индекса скалярных возмущений (36), в результате чего уравнение (54) примет следующий вид:

$$\frac{dn_S}{d \ln k} = 2\dot{\delta} + \dot{\epsilon} \left(\frac{(n_S - 1) - 2\dot{\delta} + 3\epsilon}{\epsilon} - 3 \right). \quad (55)$$

Исходя из наблюдательных данных по анизотропии реликтового излучения, между пересечением радиуса Хаббла и завершением стадии инфляции число е-фолдов $\Delta N \approx 55$ [24] (масштаб $k \sim 0.002 \text{ Мпс}^{-1}$), следовательно, из выражения (28) получим

$$\Delta N = \left(dt - \frac{e^{-mt}}{m} \right) \Big|_{t_H}^{t_e}. \quad (56)$$

Таким образом, подбирая константы α_1 , m и d можно полностью определить остальные параметры системы, учитывая ограничения (38), (39) и (56).

Для знака «-» в выражениях (47) и (49), в случае различных r_H , получим $t_{H_2} > t_{e_2}$, согласно представленным параметрам табл. 1 и 2.

Например, при $r_H = 0.02$ значения космического времени следующие: $t_{H_2} = 2.9 \cdot 10^8$, $t_{e_2} = 2.5 \cdot 10^8$. Следовательно, пересечение радиуса Хаббла произошло позже, чем завершение стадии инфляции, что не соответствует физически корректной хронологии инфляционного сценария. Поэтому для расчетов выбрана пара корней t_{H_1} и t_{e_1} .

Наблюдательным данным (38), (39) и $\Delta N \approx 55$ соответствуют параметры модели в случае

$r_H = 0.02$, что будет использовано для последующих вычислений. Тогда на пересечении радиуса Хаббла $\epsilon_H = 0.018$, $\delta_H = 0.009$, что значительно меньше единицы и соответствует условию (26).

Исходя из выбранного значения потенциала в табл. 1 и 2, оценим энергетический масштаб инфляции:

$$E_{inf} \simeq V^{1/4} \approx 4.162 \cdot 10^{-3} = 4.162 \cdot 10^{-3} M_P = 1.01 \cdot 10^{16} \text{ ГэВ}. \quad (57)$$

Полученное значение (57) соответствует оценкам [3, 25] для стандартных сценариев космологической инфляции. Убегание скалярных возмущений находится в пределах 1.28σ от центрального значения (39) АСТ DR6 [13]. Следовательно, результаты согласуются в пределах погрешности 2σ .

Запишем скалярное поле как функцию параметра медленного скатывания ϵ :

$$\phi(\epsilon) = A \sqrt{\frac{m - 2d\epsilon \pm \sqrt{m^2 - 4m\epsilon d}}{2\epsilon}}, \quad (58)$$

где в уравнении (58) в дальнейшем рассмотрим положительные значения поля со знаком $+$. Для табл. 1 и 2 ($r_H = 0.02$) получим

$$H \Big|_{t=t_H} = 5.6 \cdot 10^{-6} M_P = 1.36 \cdot 10^{13} \text{ ГэВ}. \quad (59)$$

Вычислим разность значений скалярного поля на пересечении радиуса Хаббла и завершения стадии инфляции.

$$\Delta\phi = \phi_H - \phi_E = 0.597. \quad (60)$$

Результат (60) при значении нормировочной константы $A = 7$ справедлив для сценариев с малым полем, так как изменение скалярного поля в рассматриваемый период не превышает массу Планка, т.е. $\Delta\phi < 1$ [3].

Запишем функцию неминимальной связи для потенциала (44)

$$f_1(\phi, T) \approx \approx \alpha_1 \sqrt{T} G_0 d^2 F^2(\phi) + \frac{\sqrt{6}\alpha_1 G_0 m d}{3} \left(\frac{\phi}{A} \right)^2, \quad (61)$$

где

$$F(\phi) = 1 + \frac{1}{d} \left(\frac{\phi}{A} \right)^2.$$

Аналогичным образом выразим $\omega(\phi)$ и $\dot{\phi}$:

$$\omega(\phi) = -\frac{8\sqrt{6}}{3} \frac{G_0 \alpha_1}{A^2 m d F(\phi)}, \quad \dot{\phi}(\phi) = -\frac{1}{2} m d \phi F(\phi), \quad (62)$$

Таблица 1. Значения произвольных параметров модели для параметра Хаббла $H = e^{-mt} + d$ и констант $m = 10^{-7}$, $d = 10^{-9}$, $\mathcal{P}_S = 2.1 \cdot 10^{-9}$, $V_H = 3 \cdot 10^{-10}$, $n_S = 0.974$

r_H	ϵ_H	δ_H	ΔN	$t_{H_1} \cdot 10^{-8}$	$t_{e_1} \cdot 10^{-8}$
0.015	0.016	0.0081	61	1.199	1.614
0.015	0.015	0.0077	65	1.193	1.614
0.020	0.018	0.0089	55	1.209	1.614
0.022	0.020	0.0098	50	1.219	1.614
0.025	0.019	0.0095	51	1.216	1.614

Таблица 2. Значения произвольных параметров модели для параметра Хаббла $H = e^{-mt} + d$ и констант $m = 10^{-7}$, $d = 10^{-9}$, $\mathcal{P}_S = 2.1 \cdot 10^{-9}$, $V_H = 3 \cdot 10^{-10}$, $n_S = 0.974$

r_H	$G_0 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_2 \cdot 10^5$	$dn_S/d \ln k$	α_1
0.015	9.82	3.0	$3.22 \cdot 10^9$	-0.029
0.015	10.35	3.8	$3.03 \cdot 10^9$	-0.031
0.020	6.70	2.0	$3.56 \cdot 10^9$	-0.035
0.022	5.45	1.3	$3.93 \cdot 10^9$	-0.035
0.025	4.94	1.5	$3.82 \cdot 10^9$	-0.041

Отсутствию фантомных полей соответствует $\alpha_1 < 0$ в (62). Теперь запишем окончательное выражение для кинетического слагаемого:

$$\omega(\phi)X = \alpha_2 V = -\frac{\sqrt{6} \alpha_1 G_0 m d}{3} \left(\frac{\phi}{A}\right)^2 F(\phi). \quad (63)$$

Таким образом, уравнения (40), (43), (44), (61) и (62) определяют решения в терминах скалярного поля для рассматриваемого параметра Хаббла (40) и зависимости скалярного поля (42).

5. АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Оценим отношение (25) для анзаца (29) и параметра Хаббла (40). Согласно параметрам в табл. 1 и 2, при $r_H = 0.02$ параметр $\alpha_2 = 2.0 \cdot 10^{-5}$, и условие (25) выполняется. Тем не менее, необходимо показать, что космологическая модель обладает выходом из инфляционной стадии. Для этого проанализируем отношение слагаемых $\alpha_2 T$ и $\alpha_1 G(\phi)\sqrt{T}$ в (12) для параметра Хаббла (40), анзаца (29) и скаляра кручения (7):

$$-\frac{\alpha_2 T}{\alpha_1 G(\phi)\sqrt{T}} = -\frac{\alpha_2 \sqrt{6}}{\alpha_1 G_0 H}. \quad (64)$$

На рисунке штриховые линии указывают точку, соответствующую времени завершения стадии инфляции, где

$$-\frac{\alpha_2 \sqrt{6}}{G_0 \alpha_1} (e^{-mt_e} + d)^{-1} \approx 0.21.$$

Следовательно, по завершении стадии инфляции влияние $\alpha_1 G(\phi)\sqrt{T}$ становится пренебрежимо мало, и функция (12) примет вид

$$f(T, \phi) \approx -\frac{\alpha_2}{2} T - \alpha_2 V(\phi) = f_2(T, \phi). \quad (65)$$

Рассмотрим поведение функции на больших временах ($t \gg t_e$) в постинфляционный период. Подставим функцию (2) в уравнения динамики (9)–(11) и переопределим поле из соотношения (23):

$$3H^2 = V + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (66)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad (67)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0. \quad (68)$$

что совпадает с уравнениями динамики (19)–(21). Следовательно, эволюция Вселенной на поздних стадиях описывается телепараллельным эквивалентом общей теории относительности. Эволюция Вселенной в постинфляционный период, включая последующий повторный разогрев скалярного поля (reheating), подробно описывается в работах [1, 3, 20].

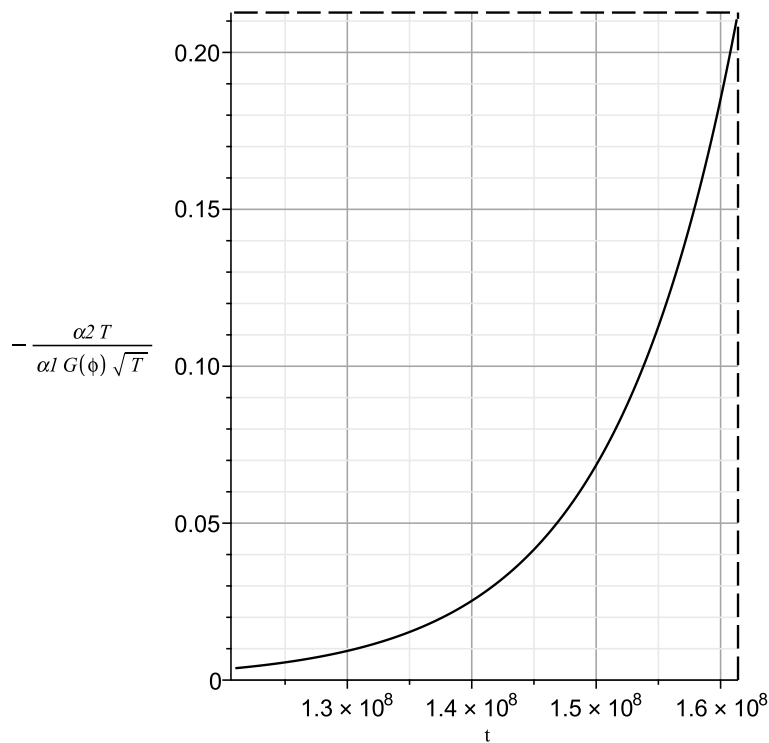


Рис. 1. Отношение слагаемых $-\frac{\alpha_2 T}{\alpha_1 G(\phi)\sqrt{T}}$ в функции неминимальной связи для свободных параметров системы из табл. 1 и 2 от t_{H_1} до t_{e_1} , при $r_H = 0.02$

6. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Проведем сравнительный анализ с другими моделями на основе кривизны. В модифицированных теориях гравитации с действием (8) скорость распространения скалярных c_s и тензорных (гравитационных волн) c_T возмущений равна скорости света в вакууме, т. е. $c_s^2 = 1, c_T^2 = 1$ [6]. В теориях гравитации ЭГБ [21] она отлична от единицы в выбранной системе единиц и может не соответствовать наблюдательным ограничениям.

В моделях с нелинейной связью (например, [26]), вводимый параметр связи ξ принимает большие значения $\xi \sim 10^4$ для массы Хиггса, а также приводит к слишком высокой температуре рехитинга $T_{reh} \sim 2 \cdot 10^{15}$ [26, 27].

Предложенная модель космологической инфляции (44) успешно воспроизводит наблюдаемое отношение тензорных и скалярных возмущений. Для рассмотренного сценария (MLFI с $H = e^{-mt} + d$) значение r и n_S на пересечении радиуса Хаббла составляет $r_H = 0.02, n_S = 0.974$, что удовлетворяет наблюдательным ограничениям (39). Убегание скалярных возмущений $\frac{dn_S}{d \ln k}$ в случае MLFI принимает

положительное значение $3.56 \cdot 10^{-9}$, что согласуется с данными АСТ в пределах $1.2 - 1.3\sigma$ [13, 14].

Параметры, при которых достигается согласие с наблюдениями: $m = 10^{-7}, d = 10^{-9}, \mathcal{P}_S = 2.1 \cdot 10^{-9}, \alpha_1 = -0.035, G_0 = 6.7 \cdot 10^4, \alpha_2 = 2.0 \cdot 10^{-5}$. Параметры медленного скатывания на пересечении радиуса Хаббла значительно меньше единицы $\epsilon_H = 0.018, \delta_H = 0.009$, а число е-фолдов и энергетический масштаб инфляции $E_{inf} \approx 1 \cdot 10^{16}$ соответствуют оценкам для стандартных инфляционных сценариев [1, 3, 25].

Функция неминимальной связи скалярного поля и кручения (12) позволяет рассматривать модель в двух режимах. Первый соответствует стадии космологической инфляции в приближении медленного скатывания с функцией (1), что соответствует обобщенным точным решениям работы [7]. Приближение медленного скатывания реализуется на протяжении стадии инфляции, а отношение кинетического слагаемого к потенциалу $\frac{\omega X}{V} = \alpha_2 = 2.0 \cdot 10^{-5}$ значительно меньше единицы. На поздних этапах эволюции Вселенной, согласно анализу функции (12) на рисунке, а также соотношениям (64), (2) и (1), предложенная модель совпадает с TEGR.

Таким образом, предложенный сценарий позволяет рассматривать космологические модели с различной динамикой ускоренного расширения на основе решений с произвольным параметром Хаббла и эволюцией скалярного поля. Рассматриваемый метод позволяет строить верифицируемые космологические модели на основе физических потенциалов, например, MLFI (45), в отличие от случая гравитации Эйнштейна и TEGR.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен новый подход для построения космологических решений в гравитации с неминимальной связью скалярного поля и кручения. В основе метода использовались решения, справедливые для произвольной динамики. В таком случае при определенном наборе констант можно получить физически значимые потенциалы, задавая зависимость параметра Хаббла и эволюции скалярного поля от космического времени.

Рассмотренная модель соответствует современным ограничениям, в отличие от аналогичных сценариев, основанных на гравитации Эйнштейна и ее телепараллельном эквиваленте [21, 26, 28–30].

Предлагаемый подход позволяет строить верифицированные космологические модели с произвольной динамикой и различной реализацией механизма инфляции, которые на поздних временах соответствуют TEGR. Следует отметить, что дальнейший интерес представляет изучение возможности регистрации реликтовых гравитационных волн и отклонений в их спектре в рамках модифицированных теорий гравитации.

Финансирование. Работа не имела спонсорской поддержки.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Chervon, I. Fomin, V. Yurov et al., *Scalar Field Cosmology, Series on the Foundations of Natural Science and Technology*, WSP, Singapur **13** (2019), p. 287.
2. T. Clifton, P. G. Pereira, A. Padilla et al., *Modified Gravity and Cosmology*, Phys. Rep. **513**, 1 (2012).
3. D. Baumann and L. McAllister, *Inflation and String Theory, Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, Cambridge University Press (2015), p. 393.
4. A. Riess, A. Filippenko, P. Challis et al., *Observational Evidence from Supernovae for an*

Accelerating Universe and a Cosmological Constant, Astron. J. **116**, 1009 (1998).

5. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and V. K. Oikonomou, *Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution*, Phys. Rep. **692**, 1 (2017).
6. M. Gonzalez-Espinoza and G. Otalora, *Generating Primordial Fluctuations From Modified Teleparallel Gravity With Local Lorentz-Symmetry Breaking*, Phys. Lett. B **809**, 135696 (2020).
7. I. V. Fomin, S. V. Chervon, and E. S. Dentsel, *Reconstruction the Scalar-Torsion Gravity Version From the Frame of Exact Cosmological Solutions*, Phys. At. Nucl. **88**, 494 (2025).
8. S. A. Kadam, L. K. Duchaniya, and B. Mishra, *Teleparallel Gravity and Quintessence: The Role of Nonminimal Boundary Couplings*, Ann. Phys. **470**, 169808 (2024).
9. Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. D. Laurentis et al., *f(T) Teleparallel Gravity and Cosmology*, Rep. Prog. Phys. **79**, 106901 (2016).
10. A. D. Alruwaili, A. Jawad, and S. Sadiq, *Physical Constraining the Warm Inflationary Parameters in f(ϕ, T) Modified Gravity*, Phys. Dark Univ. **51**, 102188 (2026).
11. S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, C. Escamilla-Rivera et al., *Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology*, Rep. Prog. Phys. **86**, 026901 (2023).
12. M. Krššák, E. N. Saridakis, and V. U. Catalica, *The Covariant Formulation of F(T) Gravity*, Class. Quantum Grav. **33**, 115009 (2016).
13. T. Louis, A. L. Posta, Z. Atkins et al., *The Atacama Cosmology Telescope: DR6 Power Spectra, Likelihoods and ΛCDM Parameters*, JCAP **11**, 062 (2025).
14. E. Calabrese, J. C. Hill, J. T. Jense et al., *The Atacama Cosmology Telescope: DR6 Constraints on Extended Cosmological Models*, JCAP **11**, 063 (2025).
15. J. G. Pereira, C. Ringeval, and V. Vennin, *Teleparallelism: A New Insight Into Gravity*, in: *Handbook of Spacetime*, ed. by A. Ashtekar and V. Petkov, Springer (2014), p. 197.
16. M. Hohmann, *Metric-affine Geometries With Spherical Symmetry*, Symmetry **12**, 453 (2020).
17. R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Introduction*, Fundam. Theor. Phys. **173** (2013).
18. M. Gonzalez-Espinoza, G. Otalora, N. Videla et al., *Slow-Roll Inflation in Generalized Scalar-Torsion Gravity*, JCAP **08**, 029 (2019).

19. M. Gonzalez-Espinoza and G. Otalora, *Cosmological Dynamics of Dark Energy in Scalar-Torsion $f(T, \phi)$ Gravity*, Eur. Phys. J. C **81**, 480 (2021).
20. J. Martin, C. Ringeval, and V. Vennin, *Encyclopaedia Inflationaris*, Phys. Dark Univ. **46**, 101653 (2024).
21. I. V. Fomin, *Gauss–Bonnet Term Corrections in Scalar Field Cosmology*, Eur. Phys. J. C **80**, 1145 (2020).
22. R. Kallosh and A. Linde, *Chaotic Inflation and Supersymmetry Breaking*, Phys. Rev. D **84**, 083519 (2011).
23. C.-S. Chen and C.-M. Lin, *Type II Seesaw Higgs Triplet as the Inflaton for Chaotic Inflation and Leptogenesis*, Phys. Lett. B **695**, 9 (2011).
24. Y. Akrami, F. Arroja, M. Ashdown et al., *Planck 2018 Results. I. Overview and the Cosmological Legacy of Planck*, Astron. Astrophys. **641**, A1 (2020).
25. J. Martin, C. Ringeval, R. Trotta et al., *The Best Inflationary Models After Planck*, JCAP **03**, 030 (2014).
26. F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *The Standard Model Higgs Boson as the Inflaton*, Phys. Lett. B **659**, 703 (2008).
27. R. Kallosh, A. Linde, and D. Roest, *Universal Attractor for Inflation at Strong Coupling*, Phys. Rev. Lett. **112**, 011303 (2014).
28. D. Frolovsky and S. Ketov, *Are Single-Field Models of Inflation and PBH Production Ruled Out by ACT Observations?*, arXiv:2505.17514 (2025).
29. S. Ketov, E. Pozdeeva, and S. Vernov, *Inflation in $F(R)$ Gravity Models Revisited After ACT*, arXiv:2508.08927 (2025).
30. S. Mishra, V. Sahni, and A. Toporensky, *Initial Conditions for Inflation in an FRW Universe*, Phys. Rev. D **98**, 083538 (2018).

A Method for Constructing Verified Cosmological Models in Gravity with Non-Minimal Scalar Field–Torsion Coupling

*E. S. Dentzel**

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russia

*E-mail: edentsel@yandex.ru

Received February 17, 2026

Revised June 2, 2026

Accepted June 2, 2026

Abstract

Cosmological models based on gravity with non-minimal coupling between the scalar field and torsion are considered. An ansatz for an arbitrary coupling function is chosen as a power-law dependence on the Hubble parameter. The construction is based on the form of the non-minimal coupling function that allows the evolution of the Universe to be treated in two regimes. Within the slow-roll approximation, the proposed approach corresponds to the cosmological inflation scenario with generalized exact solutions, while at the post-inflationary stage it reduces to the teleparallel equivalent of general relativity. The proposed approach makes it possible to consider physical potentials of well-known cosmological inflation models for certain values of the arbitrary model parameters. This method ensures correct dynamics of inflationary scenarios, including the stage of accelerated expansion and the exit from inflation. The applicability of the slow-roll approximation at the cosmological inflation stage is analyzed. Using MLFI (Mixed Large Field Inflation) as an example, it is shown that the model within the framework of gravity with non-minimal scalar field–torsion coupling is verified against the modern ACT DR6 observational constraints on cosmological perturbation parameters. The values of the arbitrary model parameters are obtained.

Keywords: cosmological inflation, modified theories of gravity, non-minimal scalar field–torsion coupling, teleparallel equivalent of general relativity, torsion scalar, slow-roll approximation, cosmological perturbation parameters, tensor-to-scalar ratio, spectral index, MLFI

Funding. The study was not sponsored.