ЖЭТФ/JETP, 2026, том 169, вып. 2, стр. 137–146 © 2026

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ФОТОННЫХ ДЕТЕКТОРОВ

Ю. И. Богданов [a,b], ***Н. А. Богданова*** [a,b], ***И. А. Дмитриев*** [a,b*], ***И. К. Голышев*** [a,b], ***В. Ф. Лукичев*** [a]

[a] *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Отделение физико-технологических исследований им. К. А. Валиева 117218, Москва, Россия*

[b] *Национальный исследовательский университет «МИЭТ» 124498, Зеленоград, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 12 сентября 2025 г.,
после переработки 31 декабря 2025 г.
Принята к публикации 2 января 2026 г.

Цель исследования — разработка метода оценки оптических квантовых состояний с учетом ограничений реальных фотонных детекторов, различающих конечное число фотонов. В качестве основы предложена POVM-модель детектирования на базе распределения Пойа, обобщающая биномиальную модель и учитывающая ограничение по максимальному числу регистрируемых фотонов. В рамках этой модели исследовано влияние конечного разрешения детекторов на точность восстановления квантовых состояний и введена количественная характеристика качества протоколов квантовой томографии — информационная эффективность, определяемая через отношение минимально возможных и реально наблюдаемых потерь точности. Проведенный анализ показал, что даже при ограниченном числе регистрируемых фотонов сохраняется возможность высокоточной реконструкции состояний с числом фотонов, значительно большим, чем максимальное число регистрируемых фотонов. Важно, что возникающие потери могут быть компенсированы простым увеличением объема выборки. Применение разработанного подхода продемонстрировано на примере реконструкции сжатых когерентных состояний и состояний сжатого вакуума.

Ключевые слова: оптические квантовые состояния, квантовая томография, PNR-детекторы, POVM, эффективность протокола

DOI: 10.7868/S3034641X26020011

1. ВВЕДЕНИЕ

Детекторы, которые могут различать число фотонов (photon-number-resolving (PNR) detectors), широко используются во многих областях квантовой оптики, где требуется обнаружение сверхслабого пучка света [1]. PNR-детекторы применяются, в частности, в метрологии [2] и таких квантово-оптических методах, как источники одиночных фотонов «по уведомлению» (heralded single-photon sources) [3–6], квантовые приемники [7–10], квантовые генераторы случайных чисел [11–19], бозонные выборки [20, 21], сложение и вычитание фотонов [22–28], визуализация изображений [29–33] и т. д. В качестве PNR-детекторов обычно используются фотоэлектронные умножители (ФЭУ) [34], лавинные фотодиоды (ЛФД) [35], сверхпроводящие нанополосковые фотонные детекторы (СНПФД) [36] и др. Квантовые измерения на основе PNR-детекторов как метод оценки оптических квантовых технологий имеют основополагающее значение для таких задач, как томография квантового состояния [37–39], томография оптических квантовых процессов [40, 41] и квантовый контроль [42]. Томографическое вероятностное описание оптических

* E-mail: il.dmitryev@gmail.com

квантовых состояний подразумевает использование неотрицательных функций распределения вероятностей, непосредственно применяемых в квантовых измерениях [43, 44]. Квантовая томография описывает детектор положительной операторно-значной мерой (positive operator-valued measure, POVM), полностью характеризующей устройство. POVM можно реконструировать, анализируя результаты процесса детектирования, полученные для томографически полного набора входных состояний. Когда операторы, описывающие детектор, оказываются диагональными в фоковском базисе, они являются фазонечувствительными (в противном случае фазочувствительными) детекторами и могут быть прямо определены с помощью статистического восстановления соответствующих аналитических функций [45] или выпуклой оптимизации [46–48]. POVM-элементы для фазочувствительных детекторов, как правило, нельзя привести к диагональному виду, поэтому их реконструкция является более сложной. Существующие методы включают оценку максимального правдоподобия [49], линейную регрессию [50], выпукло-квадратичную оптимизацию [51] и аналитическое двухэтапное решение [52]. Если полная характеризация детектора не представляет основной интерес, существуют другие альтернативы квантовой томографии детектора, такие как самотестирование [53] и самокалибровка [54].

Целью настоящего исследования является разработка метода оценки оптических квантовых состояний с учетом ограничений реальных фотонных детекторов. Основное внимание уделено влиянию конечного разрешения детекторов по числу фотонов на точность восстановления оптических квантовых состояний в задачах квантовой томографии. Для описания измерений в протоколах томографии вместо упрощенной биномиальной модели, рассмотренной ранее в работе [55], использована более общая POVM-модель, учитывающая ограничение на максимальное число возможных кликов. Такой подход соответствует поведению детекторов, способных различать лишь фиксированное количество фотонов за импульс. Экспериментально ранее нами был исследован детектор, различающий до трех фотонов [56], что соответствует POVM-модели с четырьмя исходами (0, 1, 2 и 3 отсчета). Различия между упрощенными и более реалистичными моделями измерений напрямую отражаются на точности восстановления квантовых состояний. В связи с этим естественно ввести количественную характеристику качества протоколов томографии. В настоящей работе мы используем информационную эффективность протокола квантовой томографии, определяемую как отношение минимально возможных потерь точности, аналогичных границе Рао – Крамера, к реально наблюдаемым потерям. В настоящем исследовании мы применяем модель POVM-элементов на основе распределения Пойа [57, 58] с ограничением по числу кликов, которая обобщает биномиальную модель детекторов. Знание POVM-элементов, полностью характеризующих детектор, позволяет, в принципе, реконструировать квантовое состояние сколь угодно точно. Понятно, что эффективность протоколов квантовых измерений на основе реалистичных детекторов ниже, чем эффективность гипотетических протоколов измерений с идеальными детекторами. Тем не менее, как показывают результаты анализа, даже при ограниченном числе различимых отсчетов можно с высокой точностью реконструировать состояния с существенно большим числом фотонов. При этом потери точности при переходе от идеализированных условий к реальным могут быть компенсированы увеличением объема выборки.

2. ГОМОДИННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

С помощью упрощенной схемы, представленной на рис. 1, рассмотрим некоторые основные понятия и факты, а также введем обозначения, которые будут нам необходимы в дальнейшем [55]. На вход 1 светоделителя (делителя пучка — beamsplitter, BS) подается когерентная мода от локального осциллятора (гетеродина) $|\alpha_1\rangle$, задаваемая комплексной амплитудой $\alpha_1 = |\alpha| \exp(i\theta_1)$. На вход 2 светоделителя подается исследуемое квантовое состояние $|\psi\rangle$. Задавая на входе 1 m различных фаз локального осциллятора $\theta_1 = 0, \pi/m, \ \ldots, \ \pi(m-1)/m$, мы получаем на выходе светоделителя m различных распределений из совокупности взаимно дополнительных распределений. Регистрируя числа фотонов n_1 и n_2 в выходных каналах светоделителя, получаем информацию, которая в дальнейшем используется для восстановления состояния. Детекторы обладают, вообще говоря, ограниченной способностью регистрации фотонов, которая характеризуется либо эффективностями η_1 и η_2 (в случае биномиальной модели), либо POVM-элементами POVM_1 и POVM_2 в случае модели регистрации фотонов на основе распределения Пойа.

Мы предполагаем, что в каждом из m распределений измеряется по n представителей, таким образом, полный объем выборки оказывается равен nm.

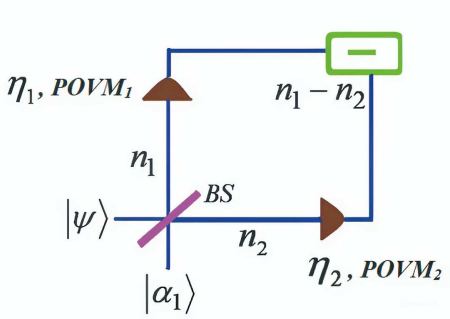

Рис. 1. Схема измерений числа фотонов на основе делителя пучка

В приближении сильного поля локального осциллятора, когда $|\alpha_1| \to \infty$, регистрация редуцированной разностной статистики $n_{12} = n_1 - n_2$ эквивалентна измерению квадратурной наблюдаемой

$$X_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a e^{-i\theta_1} + a^\dagger e^{i\theta_1} \right),$$

где a и $a^\dagger$ — операторы уничтожения и рождения соответственно. В этом случае выполняется следующее приближенное равенство:

$$X_\theta \approx \frac{n_{12}}{\sqrt{2}|\alpha_1|}.$$

Унитарный оператор светоделителя определяется следующим выражением, зависящим от двух параметров θ и φ:

$$U_{\mathrm{BS}} = \exp\left(-\theta \left(e^{-i\varphi} a_1^\dagger a_2 - e^{i\varphi} a_1 a_2^\dagger \right) \right).$$

Здесь a_1, a_2, $a_1^\dagger$, $a_2^\dagger$ — операторы уничтожения и рождения для первой и второй мод соответственно. Стандартному светоделителю 50/50 отвечают углы $\theta = \pi/4$, $\varphi = 0$.

В настоящем исследовании мы использовали базисный набор функций, который получается из набора фоковских состояний $|k\rangle$ $(k = 0, 1, \ldots)$ путем последовательного применения операций сдвига

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$$

и сжатия

$$S(\xi) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \left(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2} \right) \right\},$$

а именно:

$$|\alpha, \xi, k\rangle = S(\xi) D(\alpha) |k\rangle,$$

где α и ξ — комплексные параметры [55].

Полученный набор функций $|\alpha, \xi, k\rangle$, так же как исходный набор $|k\rangle$, является полным. Частными случаями рассматриваемого описания являются обычные фоковские состояния $|k\rangle = |0, 0, k\rangle$ (когда $\alpha = 0$, $\xi = 0$), когерентные состояния $|\alpha\rangle = |\alpha, 0, 0\rangle$ (когда $\xi = 0$, $k = 0$), сжатые вакуумные состояния $|\xi\rangle = |0, \xi, 0\rangle$ (когда $\alpha = 0$, $k = 0$), сжатые фоковские состояния $|\xi, k\rangle = |0, \xi, k\rangle$ (когда $\alpha = 0$, $k \neq 0$), сжатые когерентные состояния $|\alpha, \xi\rangle = |\alpha, \xi, 0\rangle$ (когда $k = 0$) и др. Во всех этих случаях, в рассматриваемом базисе, в разложении будет только одно ненулевое слагаемое. Таким образом, широкий набор важных, широко используемых квантовых состояний представляется в простейшей из возможных форм.

3. ПРОТОКОЛ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Мы предполагаем, что состояние на входе светоделителя есть тензорное произведение состояния локального осциллятора $|\alpha_1\rangle$ и изучаемого неизвестного квантового состояния $|\psi\rangle$, т. е. $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\psi\rangle$. Тогда квантовое состояние на выходе

$$|\psi_{\mathrm{out}}\rangle = U_{\mathrm{BS}} |\psi_{\mathrm{in}}\rangle. \tag{1}$$

В соответствии с принципом дополнительности Бора, измерения, отвечающие различным фазам θ_1 локального осциллятора, образуют совокупность взаимно дополнительных распределений. Пусть общее число таких распределений равно m (имеется m сечений в фазовом пространстве). Рассматриваемая совокупность образует протокол квантовых измерений.

Состояние $|\psi_{\mathrm{out}}\rangle$ будем описывать посредством амплитуд вероятности $M^{\theta_j}_{n_1 n_2}$ того, что на выходе светоделителя окажется n_1 и n_2 фотонов в первой и второй модах соответственно при условии, что фаза локального осциллятора равна θ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда, предполагая известным поле осциллятора, в силу линейности выражения (1), всю рассматриваемую совокупность квантовых измерений можно компактно представить в матричном виде [55, 59]:

$$M^{\theta_j}_{n_1 n_2} = X^{\theta_j}_{n_1 n_2}\, c, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Здесь c — вектор-столбец, задающий состояние в гильбертовом пространстве размерности s, $X^{\theta_j}_{n_1 n_2}$ — строка аппаратной матрицы длиной s. Индексы n_1, n_2 и θ_j обеспечивают идентификацию строки аппаратной матрицы, всего имеется $(N_1 + 1)(N_2 + 1)m$ таких строк, где N_1 и N_2 — максимально возможное число фотонов в модах, которое учитывается

при моделировании (при условии, что вероятность появления большего числа фотонов пренебрежимо мала).

Соответствующая вероятность появления на входах детекторов n_1 и n_2 фотонов есть квадрат модуля амплитуды:

$$P^{0,\theta_j}_{n_1 n_2} = \left|M^{\theta_j}_{n_1 n_2}\right|^2. \tag{3}$$

С учетом конечной эффективности детекторов вероятность зарегистрировать в модах соответственно k_1 и k_2 фотонов есть

$$P^{\theta_j}_{k_1 k_2} \sum_{\substack{n_1 \geq k_1 \\ n_2 \geq k_2}} P_1(k_1|n_1) P_2(k_2|n_2) P^{0,\theta_j}_{n_1 n_2}. \tag{4}$$

Здесь $P_1(k_1|n_1)$ — вероятность того, что первый детектор зарегистрирует k_1 фотон при условии, что на его вход поступит n_1 фотон. Аналогично $P_2(k_2|n_2)$ — вероятность того, что второй детектор зарегистрирует k_2 фотонов при условии, что на его вход поступит n_2 фотонов.

Заметим, что вклад в регистрацию k_1 и k_2 фотонов дают все строки протокола с $n_1 \geq k_1$ и $n_2 \geq k_2$. Эти вклады нужно просуммировать с весами, которые задают распределения $P_1(k_1|n_1)$ и $P_2(k_2|n_2)$ соответственно, в этом случае возникает свертка по строкам протокола. Получающаяся свертка показывает, что измерения становятся нечеткими (оказываются «размазанными» по различным строкам протокола).

В настоящей работе мы представляем обобщение результатов работы [55] на случай неидеальных условий детектирования, когда для числа регистрируемых детекторами фотонов используется весьма общая модель, основанная на POVM-элементах детекторов [56, 60, 61]. В рамках рассматриваемого формализма вероятности $P(j|k)$ зарегистрировать j фотонов при условии, что на входе имеется k фотонов, задают соответствующий j-й POVM-элемент детектора. В основе разработанной нами модели анализа фотонной статистики лежит распределение Пойа, которое задается следующей формулой:

$$P(j|k,m,M) = \\ = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(M)\Gamma(m+j)\Gamma(M-m+k-j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(k-j+1)\Gamma(m)\Gamma(M-m)\Gamma(M+k)}. \tag{5}$$

Оказывается, что рассматриваемое выражение, задающее вероятность обнаружить j фотонов в выделенной m-модовой подсистеме при условии, что в полной M-модовой системе имеется k фотонов, имеет непосредственное отношение к фундаментальным аспектам статистики фотонов и бозонов в целом [25, 57, 62]. Заметим, что формула (5) допускает и нецелые значения для параметров m и M. Это важно, в частности, для задач квантовой томографии, поскольку указанные параметры могут выступать в качестве подгоночных при обработке экспериментальных данных.

Распределение Пойа (5) является естественным обобщением хорошо известного биномиального распределения [63], которое можно рассматривать как предельный случай распределения Пойа при достаточно больших M и m. Можно показать [57], что биномиальное распределение возникает в пределе, когда $M \to \infty$, $m \to \infty$, а $\eta = m/M \to \text{const}$. В рассматриваемом пределе возникает биномиальное распределение, задающее число «успехов» в серии из k независимых испытаний с вероятностью «успеха» в отдельном испытании, равной η.

Такая картина имеет место в рамках простейшей модели, когда статистика числа фотонов регистрируется фазонечувствительным детектором, для которого в качестве вероятности «успеха» выступает эффективность детектора η [64]. В рассматриваемой здесь более общей модели, основанной на распределении Пойа, эффективность детектора η сама становится случайной величиной, имеющей бета-распределение с параметрами $a = m$ и $b = M - m$ [63].

Дополним рассматриваемую модель ограничением по числу регистрируемых фотонов. Пусть j_0 — максимально возможное число регистрируемых фотонов. Тогда всего имеется $j_0 + 1$ POVM-элементов детектора от $j = 0$ до $j = j_0$. Соответствующие POVM-элементы будем задавать формулами

$$\text{POVM}(j,k) = P(j|k,m,M) \quad \text{при } 0 \leq j < j_0, \\ \text{POVM}(j_0,k) = \sum_{j=j_0}^{\infty} P(j|k,m,M). \tag{6}$$

В качестве иллюстрации на рис. 2 показаны POVM-элементы, полученные в рамках модели на основе распределения Пойа с параметрами $m = 20$, $M = 25$; здесь максимальное количество кликов $j_0 = 7$.

Рассматриваемые нами измерения удобно описывать посредством нечетких операторов измерений. В рамках такого описания вероятность (4) можно записать в виде

$$P^{\theta_j}_{k_1 k_2} = \text{Tr}\left(\Lambda^{\theta_j}_{k_1 k_2}, \rho\right), \tag{7}$$

где ρ — матрица плотности, а оператор нечетких измерений задается сверткой

$$\Lambda^{\theta_j}_{k_1 k_2} = \sum_{\substack{n_1 \geq k_1 \\ n_2 \geq k_2}} P_1(k_1|n_1) P_2(k_2|n_2) \Lambda^{0,\theta_j}_{n_1 n_2}, \tag{8}$$

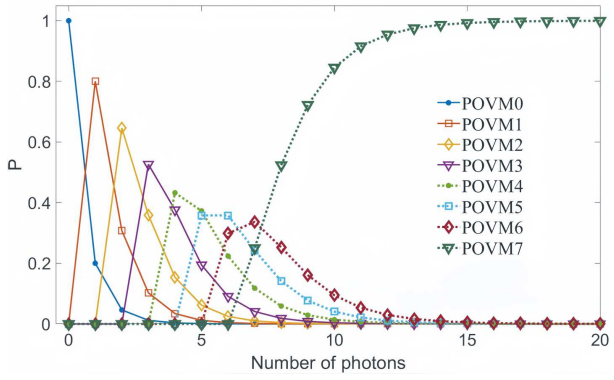

Рис. 2. POVM-элементы в рамках модели Пойа с параметрами: $m = 20$, $M = 25$, $j_0 = 7$

где $\Lambda^{0,\theta_j}_{n_1n_2} = \left(X^{\theta_j}_{n_1n_2}\right)^+ X^{\theta_j}_{n_1n_2}$ — оператор идеального (четкого) измерения.

Заметим, что $\Lambda^{0,\theta_j}_{n_1n_2}/\mathrm{Tr}\left(\Lambda^{0,\theta_j}_{n_1n_2}\right)$ — проектор. Такое измерение можно назвать чистым. Мы видим, что оператор нечетких измерений $\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}$ в (8) есть смесь таких чистых операторов измерений.

Рассматриваемая совокупность операторов нечетких измерений задает неортогональное разложение единицы (resolution of identity) [65]. Это свойство выполняется для каждой фазы θ_j локального осциллятора в отдельности:

$$\sum_{k_1,k_2} \Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2} = E, \tag{9}$$

где E — единичная матрица.

Заметим, что рассматриваемые нами алгоритмы могут быть непосредственно обобщены и на измерения, которые не сводятся к разложению единицы [59].

4. ПОЛНОТА И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Для описания всей совокупности квантовых измерений удобно каждую матрицу $\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}$ размерности $s \times s$, отвечающую отдельной строке протокола, вытянуть в виде одной строки длиной s^2 (вторую строку поместить справа от первой и т.д.). Составим из таких строк матрицу B, которая называется матрицей измерений для томографического протокола [66]. Рассматриваемая матрица порождает совокупность из m взаимно дополнительных распределений, соответствующих различным фазам локального осциллятора. Каждая из этих матриц формально имеет бесконечное число строк, отвечающих различным числам фотонов n_1 и n_2 в модах на выходе (реально, как уже сказано выше, в расчетах без ущерба для точности можно ограничиться конечным числом строк, обрезая строки, отвечающие пренебрежимо малой вероятности).

С использованием матрицы измерений B все результаты протокола могут быть компактно записаны в матричном виде [66]:

$$B\rho = f. \tag{9}$$

Здесь ρ — матрица плотности, записанная в форме одного столбца (второй столбец ниже первого и т.д.). Для упрощения записи будем использовать то же самое обозначение ρ для нового объекта. Вектор-столбец f служит для записи вероятностей регистрируемых событий.

Пусть b — совокупность сингулярных значений матрицы измерений B. Количественной характеристикой качества протокола служит число обусловленности матрицы измерений B, которое есть отношение максимального сингулярного значения к минимальному:

$$\mathrm{cond}(B) = \frac{b_{\max}}{b_{\min}}. \tag{11}$$

Если протокол неполный, то некоторые из сингулярных значений равны нулю и $\mathrm{cond}(B) \to \infty$. Напротив, если протокол полный, то его число обусловленности $\mathrm{cond}(B)$ имеет конечное значение (чем оно меньше, тем выше качество рассматриваемого протокола).

Для детального количественного описания информации о квантовом состоянии будем использовать матрицу информации [67]

$$H = 2n \sum_{j,k_1,k_2} \frac{\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}|c\rangle\langle c|\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}}{\langle c|\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}|c\rangle}. \tag{10}$$

Рассматриваемое выражение определяется суммированием по всем фазам локального осциллятора θ_j, а также по всем возможным числам k_1 и k_2 регистрируемых фотонов в каждом канале. Мы предполагаем, что состояние ранга r, являющееся смесью из r компонент, представлено в виде действительного столбца $|c\rangle$ длиной $2rs$ (мнимые части компонент смеси ниже действительных). Переход от комплексного гильбертова пространства к действительному пространству удвоенной размерности порождает следующее преобразование для векторов и матриц:

$$c \to \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(c) \\ \mathrm{Im}(c) \end{pmatrix},$$
$$\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}\right) & -\mathrm{Im}\left(\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}\right) \\ \mathrm{Im}\left(\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}\right) & \mathrm{Re}\left(\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}\right) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Матрица H — действительная симметричная матрица размерности $2rs \times 2rs$. В случае полного протокола она имеет $\nu_H = (2s-r)r$ ненулевых строго положительных собственных значений, а остальные r^2 собственных значений точно равны нулю. Суммарная информация измеряется как сумма всех собственных значений (след матрицы H). Можно показать, что для идеальных нередуцированных (чистых) измерений суммарная информация равна $2nms$. Уровень четкости квантовых измерений будем характеризовать параметром информационной чистоты (informational purity), который определим следующей формулой:

$$\mathrm{Purity} = \frac{1}{ms}\sum_{j,k_1,k_2} \frac{\mathrm{Tr}\left(\left(\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}\right)^2 \rho\right)}{\mathrm{Tr}\left(\Lambda^{\theta_j}_{k_1k_2}\rho\right)} = \frac{\mathrm{Tr}(H)}{2nms}. \tag{12}$$

Согласно введенному определению, $\mathrm{Purity} = 1$ для идеальных (четких) измерений и $\mathrm{Purity} < 1$ для нечетких измерений. Мы видим, что величина $(1-\mathrm{Purity})$ характеризует возникающий из-за неидеальности POVM-измерений уровень деградации информации, которая содержится в измерениях.

На основе матрицы информации можно показать, что потеря точности есть случайная величина, асимптотическое распределение которой можно представить в виде [67]

$$1 - F = \sum_{j=1}^{\nu} d_j \xi_j^2, \tag{13}$$

где $d_j \geq 0$ — неотрицательные коэффициенты, $\xi_j \sim \mathcal{N}(0,1)$, $j = 1,\ldots,\nu$ — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, $\nu = \nu_H - 1 = (2s-r)r - 1$ — число степеней свободы квантового состояния. В частности, $\nu = 2s-2$ для чистых состояний, для которых $r=1$, и $\nu = s^2-1$ для смешанных состояний полного ранга, для которых $r=s$.

Рассматриваемое распределение является естественным обобщением распределения хи-квадрат. Последнее соответствует частному случаю $d_1 = d_2 = \ldots = d_\nu = 1$. Представленное распределение естественно назвать неоднородным хи-квадрат распределением. В рассматриваемом нами асимптотическом пределе параметры d_j оказываются обратно пропорциональными объему выборки (общему числу зарегистрированных событий) nm, т. е. $d_j \propto 1/nm$. Указанная зависимость позволяет легко осуществлять перерасчет от одного объема выборки к другому.

Алгоритм вычисления вектора d для распределения точности (15) весьма прост [67]. Рассмотрим вектор, составленный из ненулевых сингулярных значений матрицы H:

$$s_H = \mathrm{svd}(H). \tag{14}$$

В случае полного протокола вектор s_H имеет длину $\nu_H = (2s-r)r$. Оказывается, что первое (максимальное, равное $2nm$) сингулярное значение отвечает за нормировку, а остальные $\nu = \nu_H - 1$ значений отвечают за интересующие нас статистические флуктуации в оценке квантового состояния.

Вычеркнув первый элемент вектора s_H, получим вектор $\tilde{s}_H$ длиной ν. Для POVM-измерений связь между компонентами векторов $\tilde{s}_H$ и d дается следующей простой формулой:

$$d_j = \frac{1}{2\tilde{s}_{H,j}}, \qquad j = 1,\ldots,\nu. \tag{15}$$

Из (15) следует, что среднее значение потерь точности равно

$$\langle 1 - F\rangle = \sum_{j=1}^{\nu} d_j. \tag{16}$$

Нетрудно показать, что минимально возможные средние потери точности, соответствующие равномерному распределению информации $\tilde{s}_H$ по степеням свободы, можно рассчитать по формуле

$$\langle 1 - F\rangle_{\min} = \frac{\nu^2}{4(s-1)nm}. \tag{17}$$

Для любого POVM-протокола выполняется неравенство $\langle 1-F\rangle \geq \langle 1-F\rangle_{\min}$. Рассматриваемое неравенство является обобщением неравенства Рао – Крамера на случай POVM-измерений в асимптотическом пределе (при больших объемах выборок).

Назовем информационной эффективностью протокола e_P отношение минимально возможных потерь точности $\langle 1-F\rangle_{\min}$ к их значению $\langle 1-F\rangle$ для данного протокола:

$$e_P = \frac{\langle 1-F\rangle_{\min}}{\langle 1-F\rangle}. \tag{18}$$

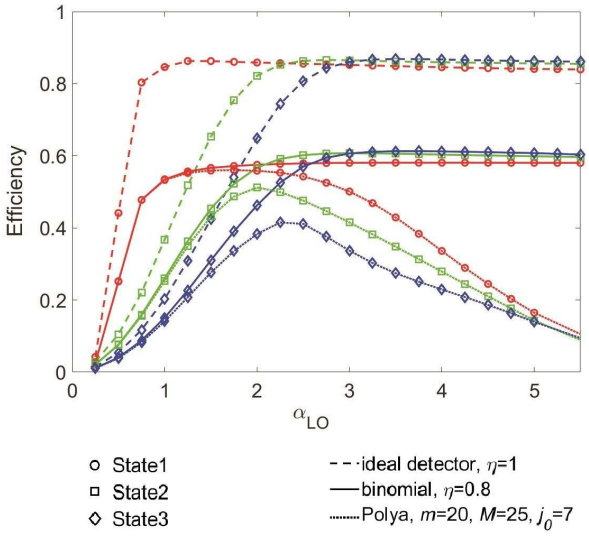

Рис. 3. Реконструкция сжатых когерентных состояний

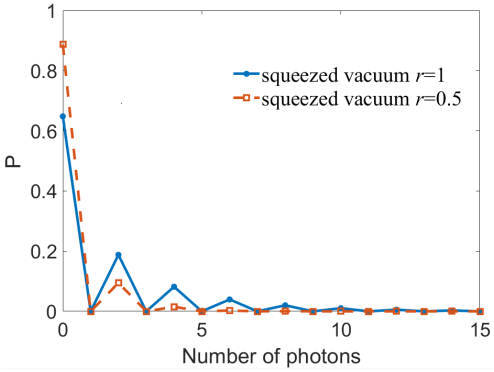

Рис. 4. Распределение по числу фотонов (сжатый вакуум), вероятность нечетного числа фотонов равна нулю; $r = |\xi|$ — параметр сжатия

Очевидно, что $e_P \leq 1$. Явная формула, которая позволяет вычислить информационную эффективность для любого рассматриваемого протокола, как следует из (18) и (19), записывается как

$$e_P = \frac{\nu^2}{4(s-1)nm\sum\limits_{j=1}^{\nu} d_j}. \qquad (19)$$

На рис. 3 на примере сжатых когерентных состояний представлено сравнение информационной эффективности протоколов квантовых измерений с использованием различных моделей детекторов, включая идеальный детектор (штриховые кривые), детектор, имеющий эффективность $\eta = 0.8$ и описываемый биномиальным распределением (сплошные кривые), а также детектор на основе распределения Пойа с параметрами $m = 20$, $M = 25$ и с ограничением на число регистрируемых отсчетов ($j_0 = 7$, т. е. не более семи кликов, пунктирные кривые). Комплексный параметр сжатия во всех случаях был равен $\xi = 0.5\exp(i\pi/3)$, а амплитуда когерентного состояния была равна соответственно $\alpha = 0$ (state 1, сжатый вакуум, круглые маркеры), $\alpha = (1-i)/\sqrt{2}$ (state 2, квадратные маркеры), $\alpha = (1-i)$ (state 3, ромбовидные маркеры). В протоколе квантовых измерений число срезов в фазовом пространстве, задающее число взаимно дополнительных измерений, было выбрано равным $m = 5$.

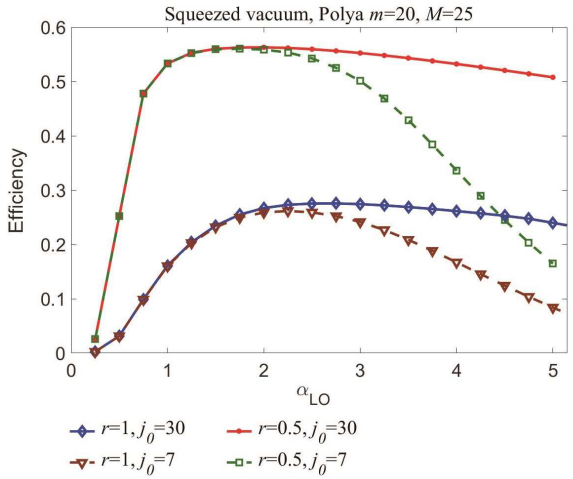

Рис. 5. Эффективность томографии сжатого вакуума (детектор на основе распределения Пойа); $r = |\xi|$ — параметр сжатия

Рисунки 4 и 5 характеризуют состояние сжатого вакуума, для которого характерно парное рождение фотонов [64]. Рисунок 4 показывает, что рассматриваемый эффект выражен тем сильнее, чем выше сжатие.

Рисунок 5 демонстрирует влияние степени сжатия вакуума на информационную эффективность детектора в модели на основе распределения Пойа. С увеличением степени сжатия возрастает сложность состояния и соответственно уменьшается информационная эффективность реконструирования. Мы видим также, что для рассматриваемых состояний влияние ограничения на число регистрируемых детектором отсчетов слабое, когда детектор способен детектировать до 30 фотонов, и сильное, когда детектор способен регистрировать не более 7 фотонов. В случае больших интенсивностей поля локального осциллятора информационная эффективность уменьшается, поскольку детектор оказывается «засвеченным» в силу того, что в основном оказывается задействованным только один элемент POVM, отвечающий максимальному числу кликов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод оценки оптических квантовых состояний с учетом ограничений реальных фотонных детекторов. Описано влияние конечного разрешения детекторов по числу фотонов на точность восстановления оптических квантовых состояний в задачах квантовой томографии. Показано, что качество протоколов квантовой томографии можно характеризовать информационной эффективностью, которая представляет собой отношение минимально возможных потерь точности, аналогичных границе Рао – Крамера, к реально наблюдаемым потерям. В качестве модели детектора, которая обобщает биномиальную модель, была применена модель POVM-элементов на основе распределения Пойа с ограничением по числу кликов. Разработанный подход был проиллюстрирован расчетом информационной эффективности квантовых измерений в приложении к состояниям сжатого вакуума и сжатым когерентным состояниям.

Финансирование. Данная работа поддержана Российским научным фондом, проект № 22-12-00263–П, https://rscf.ru/en/project/22-12-00263/. Раздел 3 «Протокол квантовых измерений» подготовлен в рамках Государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — ОФТИ им. К. А. Валиева.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Hadfield, Nat. Photonics **3**, 696 (2009).

2. M. Shangguan, H. Xia, C. Wang et al., Opt. Lett. **42**, 3541 (2017).

3. S. I. Davis, A. Mueller, R. Valivarthi et al., Phys. Rev. Appl. **18**, 064007 (2022).

4. S. Sempere-Llagostera, G. S. Thekkadath, R. B. Patel et al., Opt. Express **30**, 3138 (2022).

5. L. Stasi, P. Caspar, T. Brydges et al., Quantum Sci. Technol. **8**, 045006 (2023).

6. C. Bruscino, M. Ejrnaes, P. Ercolano et al., Sci. Rep. **14**, 20345 (2024).

7. S. Izumi, M. Takeoka, K. Ema et al., Phys. Rev. A **87**, 042328 (2013).

8. F. E. Becerra, J. Fan, and A. Migdall, Nat. Photonics **9**, 48 (2015).

9. S. Izumi, M. Takeoka, K. Wakui et al., Phys. Rev. A **94**, 033842 (2016).

10. J. L. Habif, A. Jagannathan, S. Gartenstein et al., Opt. Express **29**, 7418 (2021).

11. O. Kwon, Y. W. Cho, and Y. H. Kim, Appl. Opt. **48**, 1774 (2009).

12. C. Gabriel, C. Wittmann, D. Sych et al., Nat. Photonics **4**, 711 (2010).

13. H. Fürst, H. Weier, S. Nauerth et al., Opt. Express **18**, 13029 (2010).

14. V. Mannalatha, S. Mishra, and A. Pathak, Quantum Inf. Process. **22**, 439 (2023).

15. M. Ren, E. Wu, Y. Liang et al., Phys. Rev. A **83**, 023820 (2011).

16. M. J. Applegate, O. Thomas, J. F. Dynes et al., Appl. Phys. Lett. **107**, 071106 (2015).

17. H. Xu, D. Perenzoni, A. Tomasi et al., IEEE Trans. Circuits Syst. II **65**, 627 (2018).

18. K. A. Balygin, V. I. Zaitsev, A. N. Klimov et al., JETP **126**, 728 (2018).

19. M. Eaton, A. Hossameldin, R. J. Birrittella et al., Nat. Photonics **17**, 106 (2023).

20. J. F. F. Bulmer, B. A. Bell, R. S. Chadwick et al., Sci. Adv. **8**, eabl9236 (2022).

21. C. Oh, M. Liu, Y. Alexeev et al., Nat. Phys. **20**, 1461 (2024).

22. Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants et al., Phys. Rev. A **96**, 063803 (2017).

23. G. V. Avosopiants, K. G. Katamadze, Yu. I. Bogdanov et al., Laser Phys. Lett. **15**, 075205 (2018).

24. K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, Yu. I. Bogdanov, and S. P. Kulik, Optica **5**, 723 (2018).

25. K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, N. A. Bogdanova et al., Phys. Rev. A **101**, 013811 (2020).

26. G. V. Avosopiants, B. I. Bantysh, K. G. Katamadze et al., Phys. Rev. A **104**, 013710 (2021).

27. M. Endo, R. He, T. Sonoyama et al., Opt. Express **31**, 12865 (2023).

28. J. Fadrný, M. Neset, M. Bielak et al., NPJ Quantum Inf. **10**, 89 (2024).

29. D. Gatto Monticone, K. Katamadze, P. Traina et al., Phys. Rev. Lett. **113**, 143602 (2014).

30. M. Aßmann, Sci. Rep. **8**, 7829 (2018).

31. K. G. Katamadze, B. I. Bantysh, A. Yu. Chernyavskiy et al., Phys. Rev. Appl. **23**, 024066 (2025).

32. O. Wolley, T. Gregory, S. Beer et al., Sci. Rep. **12**, 8286 (2022).

33. W. Li, S. Li, T. C. Brown et al., AVS Quantum Sci. **5**, 041401 (2023).

34. I. Yamazaki, N. Tamai, H. Kume et al., Rev. Sci. Instrum. **56**, 1187 (1985).

35. S. Cova, A. Longoni, and A. Andreoni, Rev. Sci. Instrum. **52**, 408 (1981).

36. G. N. Goltsman, O. Okunev, G. Chulkova et al., Appl. Phys. Lett. **79**, 705 (2001).

37. Yu. I. Bogdanov, L. A. Krivitsky, and S. P. Kulik, JETP Lett. **78**, 352 (2003) [Ю. И. Богданов, Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик, Письма в ЖЭТФ **78**, 804 (2003)].

38. Yu. I. Bogdanov, R. F. Galeev, S. P. Kulik et al., Phys. Rev. A **73**, 063810 (2006).

39. Yu. I. Bogdanov, G. V. Avosopiants, L. P. Belinsky et al., JETP **123**, 212 (2016) [Ю. И. Богданов, Г. В. Авосопянц, Л. В. Белинский и др., ЖЭТФ **150**, 246 (2016)].

40. Yu. I. Bogdanov, B. I. Bantysh, A. A. Kalinkin et al., JETP **118**, 845 (2014) [Ю. И. Богданов, Б. И. Бантыш, А. А. Калинкин и др., ЖЭТФ **145**, 963 (2014)].

41. Yu. I. Bogdanov, A. A. Kalinkin, S. P. Kulik et al., New J. Phys. **15**, 035012 (2013).

42. D. Dong and I. R. Petersen, Annu. Rev. Control **54**, 243 (2022).

43. V. I. Man'ko and L. A. Markovich, Theor. Math. Phys. **197**(2), 1677 (2018) [В. И. Манько, Л. А. Маркович, ТМФ **197**(2), 328 (2018).

44. E. O. Kiktenko, A. O. Malyshev, A. S. Mastiukova, V. I. Man'ko, A. K. Fedorov, and D. Chruściński, Phys. Rev. A **101**, 052320 (2020).

45. J. J. Renema, G. Frucci, Z. Zhou et al., Opt. Express **20**, 2806 (2012).

46. A. Feito, J. S. Lundeen, H. Coldenstrodt-Ronge et al., New J. Phys. **11**, 093038 (2009).

47. C. M. Natarajan, L. Zhang, H. Coldenstrodt-Ronge et al., Opt. Express **21**, 893 (2013).

48. J. S. Lundeen, A. Feito, H. Coldenstrodt-Ronge et al., Nat. Phys. **5**, 27 (2009).

49. J. Fiurášek, Phys. Rev. A **64**, 024102 (2001).

50. S. Grandi, A. Zavatta, M. Bellini et al., New J. Phys. **19**, 053015 (2017).

51. L. Zhang, A. Datta, H. Coldenstrodt-Ronge et al., New J. Phys. **14**, 115005 (2012).

52. Y. Wang, S. Yokoyama, D. Dong et al., IEEE Trans. Inf. Theory **67**, 2293 (2021).

53. T. H. Yang, T. Vértesi, J. D. Bancal et al., Phys. Rev. Lett. **113**, 040401 (2014).

54. D. Mogilevtsev, J. Řeháček, and Z. Hradil, Phys. Rev. A **79**, 020101 (2009).

55. Yu. I. Bogdanov and S. P. Kulik, Laser Phys. Lett. **10**, 125202 (2013).

56. Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, N. A. Borshchevskaya et al., Russ. Microelectron. **52**, 221 (2023).

57. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, K. G. Katamadze et al., JETP Lett. **111**, 543 (2020).

58. I. A. Dmitriev, I. K. Golyshev, N. A. Bogdanova, Yu. I. Bogdanov, and V. F. Lukichev, Russ. Microelectron. **54**(8) (2025).

59. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, L. A. Krivitsky et al., Phys. Rev. A **70**, 042303 (2004).

60. A. Migdall, S. V. Polyakov, J. Fan et al., *Single-photon Generation and Detection*, Elsevier (2013).

61. G. V. Avosopiants, K. G. Katamadze, N. A. Borshchevskaia et al., Laser Phys. Lett. **21**, 095202 (2024).

62. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, K. G. Katamadze et al., Proc. SPIE **11022**, 110222L (2019); arXiv:1906.06384.

63. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, and V. L. Dshkhunyan, Russ. Microelectron. **32**, 51 (2003) [Ю. И. Богданов, Н. А. Богданова, В. Л. Дшхунян, Микроэлектроника **32**, 62 (2003)].

64. M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).

65. A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, Edizioni della Normale, Pisa (2011).

66. Yu. I. Bogdanov, G. Brida, I. D. Bukeev et al., Phys. Rev. A **84**, 042108 (2011).

67. Yu. I. Bogdanov, JETP **108**, 928 (2009) [Ю. И. Богданов, ЖЭТФ **135**, 1068 (2009)].

Statistical Reconstruction of Optical Quantum States Taking Into Account Photon Detector Limitations

Yu. I. Bogdanov [a,b], ***N. A. Bogdanova*** [a,b], ***I. A. Dmitriev*** [a,b], ***I. K. Golyshev*** [a,b], ***V. F. Lukichev*** [a]

[a] National Research Center «Kurchatov Institute»,
Valiev Division of Physics and Technology
117218, Moscow, Russia
[b] National Research University of Electronic Technology (MIET)
124498, Zelenograd, Moscow, Russia

Abstract

The objective of this work is to develop a method for estimating optical quantum states under realistic limitations of photon detectors that can resolve only a finite number of photons. As the basis, we propose a POVM-based detection model derived from the Pólya distribution, which generalizes the binomial model and explicitly accounts for the detector's limit on the maximum number of detectable photons. Within this framework, we analyze the influence of finite detector resolution on the accuracy of quantum-state reconstruction and introduce a quantitative measure of the performance of quantum tomography protocols — information efficiency, defined through the ratio between the minimally attainable and experimentally observed accuracy losses. The analysis demonstrates that even with strict limits on the number of detected photons, high-fidelity reconstruction remains feasible for states with photon numbers significantly exceeding the detector's maximum photon count. Importantly, the associated losses can be compensated by a straightforward increase in sample size. The applicability of the proposed approach is illustrated through the reconstruction of squeezed coherent states and squeezed vacuum states.

Keywords: optical quantum states, quantum tomography, PNR detectors, POVM, protocol efficiency

Funding. The work was carried out within the framework of a state assignment National Research Center «Kurchatov Institute» and was financially supported by the Russian Science Foundation (project 22-12-00263—П, https://rscf.ru/en/project/22-12-00263/).

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

Author's contributions. The contribution of the authors is equivalent.