Т. 32. Журнал экспериментальной и теоретической физики. Вып. 1
1957

КОЛЕБАНИЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

Л. Д. Ландау

Исследованы различные типы волн, которые могут распространяться в ферми-жидкости как при абсолютном нуле, так и при отличных от нуля температурах. Рассмотрен вопрос о поглощении этих волн.

Настоящая статья посвящена исследованию распространения волн в ферми-жидкости, исходя из развитой автором общей теории таких жидкостей [1]. Эти явления должны отличаться в ферми-жидкости большим своеобразием, связанным прежде всего с невозможностью распространения в ней при абсолютном нуле температуры обычных гидродинамических звуковых волн. Последнее обстоятельство очевидно уже из того, что длина пробега, а с ней и вязкость ферми-жидкости стремятся к бесконечности при $T \to 0$, в связи с чем неограниченно возрастает коэффициент поглощения звука.

Оказывается, однако, что в ферми-жидкости при абсолютном нуле могут распространяться другие волны, по своей природе существенно отличающиеся от обычного звука; мы будем называть их волнами «нулевого звука».

Впервые вопрос о колебаниях ферми-жидкости был рассмотрен Гольдманом [2] в применении к электронному газу с кулоновым взаимодействием между частицами. Задача же о газе незаряженных частиц, подобная рассматриваемой здесь для жидкости, впервые рассматривалась в работе Климонтовича и Силина [3] и затем в ряде работ Силина [4–6]. При этом газ предполагался слабо неидеальным с взаимодействием, удовлетворяющим условиям применимости теории возмущений.

1. Колебания ферми-жидкости при абсолютном нуле

Начнем с исследования тех колебаний при абсолютном нуле температуры, которые не затрагивают спиновых характеристик жидкости. Это значит, что от спиновых переменных не зависит не только равновесная функция распределения n_0, но и «возмущенная» функция:

$$n = n_0 + \delta n(\mathbf{p}). \tag{1}$$

При абсолютном нуле n_0 представляет собой «ступенчатую» функцию, обрывающуюся у предельного импульса $p = p_0$ [1].

Энергия квазичастиц (элементарных возбуждений) является функционалом от n, т. е. вид функции $\varepsilon(\mathbf{p})$ зависит от вида $n(\mathbf{p})$. Аналогично (1) напишем ее в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0(p) + \delta\varepsilon(\mathbf{p}), \tag{2}$$

где функция $\varepsilon_0(p)$ соответствует распределению $n_0(p)$. Величина же $\delta\varepsilon$ связана с δn формулой вида (см. [1]):

$$\delta\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathrm{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, \delta n' d\tau', \qquad d\tau = d^3\mathbf{p} / (2\pi\hbar)^3. \tag{3}$$

---

[1] Во избежание излишнего усложнения исследования, мы ограничимся простым и наиболее важным случаем энергетического спектра с областью заполнения, представляющей собой одну сплошную сферу радиуса p_0.

Поскольку δn предполагается не зависящим от спиновой переменной, то операция Sp применяется только к амплитуде рассеяния f. Но скалярная функция $\mathrm{Sp}_{\sigma'} f$ может содержать оператор спина σ лишь в виде произведения ($\sigma\,[\mathbf{pp}']$) двух аксиальных векторов: σ и $[\mathbf{pp}']$ (выражения же, содержащие двойные произведения компонент σ, можно не рассматривать, так как для спина $1/2$ они, как известно, сводятся к выражениям, содержащим σ в нулевой или первой степени). Но это произведение не инвариантно по отношению к изменению знака времени и потому не может войти в инвариантную величину $\delta\varepsilon$. Таким образом, σ выпадает вовсе, и $\delta\varepsilon$ оказывается не зависящим от спиновой переменной.

Кинетическое уравнение для ферми-жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = I(n), \tag{4}$$

где $I(n)$ — интеграл столкновений между квазичастицами. Число столкновений пропорционально квадрату ширины зоны размытости распределения, так что при абсолютном нуле $I(n) = 0$. Подставляя (1) и (2) в (4) и учитывая, что n_0 и ε_0 от $\mathbf{r}$ не зависят, получим

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = 0,$$

а предполагая δn и $\delta\varepsilon$ пропорциональными $e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}$:

$$(\mathbf{kv} - \omega)\,\delta n = \mathbf{kv}\,\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\,\delta\varepsilon, \tag{5}$$

где введена скорость квазичастиц $\mathbf{v} = \partial\varepsilon_0 / \partial\mathbf{p}$. Ввиду наличия в правой стороне этого уравнения δ-образной функции $\partial n_0 / \partial\varepsilon$, фактически в нем фигурируют лишь значения всех величин, взятые у границы $p = p_0$ (невозмущенного) фермиевского распределения. Введем удобное для дальнейшего новое обозначение

$$F = \mathrm{Sp}_{\sigma'} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, 4\pi p^2 dp \,/\, (2\pi\hbar)^3\, d\varepsilon. \tag{6}$$

Тогда (3) напишется в виде:

$$\delta\varepsilon = \iint F\,\delta n' d\varepsilon' do' / 4\pi.$$

Быстро меняющейся с ε' функцией является здесь лишь $\delta n'$. Поэтому можно переписать это выражение в виде:

$$\delta\varepsilon = \int F\nu' do' / 4\pi, \tag{7}$$

где введена согласно

$$\nu(\mathbf{n}) = \int \delta n(\mathbf{p})\, d\varepsilon \tag{8}$$

функция ν, зависящая только от направления $\mathbf{n}$ вектора $\mathbf{p}$, а функция $F(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ берется на границе (невозмущенного) фермиевского распределения; при этом F зависит только от угла χ между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$.

Заметим для дальнейшего, что полученное в [1] соотношение, связывающее истинную массу частиц m с эффективной массой квазичастиц m^*, при помощи функции $F(\chi)$ напишется в виде

$$\overline{F\cos\chi} = (m^* / m) - 1, \tag{9}$$

где черта означает усреднение по направлениям (при выводе этого соотношения полагаем в (6) $\varepsilon = p^2 / 2m^*$). Уравнение же для скорости «обычного звука» c можно привести к виду:

$$\overline{F} = 3\,mm^* c^2 / p_0^2 - 1. \tag{10}$$

Подставим (7) в уравнение (5) и проинтегрируем последнее по $d\varepsilon$. Это дает

$$(\mathbf{kv} - \omega)\,\nu = -\,\mathbf{kv} \int F\nu' do' / 4\pi.$$

Выберем направление **k** в качестве полярной оси и пусть углы θ, φ определяют направление импульса **p** (и совпадающее с ним направление **v**) относительно этой оси. Введя также скорость $u = \omega / k$ распространения волны и обозначение $\eta = u / v$, напишем окончательно полученное уравнение в виде:

$$(\eta - \cos\theta)\,\nu(\theta, \varphi) = \cos\theta \int F(\chi)\,\nu(\theta', \varphi')\,do' / 4\pi. \tag{11}$$

Это интегральное уравнение определяет принципиально скорость распространения волн и вид функции $\nu(\theta, \varphi)$ в них. Последняя имеет следующий наглядный смысл. Тот факт, что δn пропорционально [как это видно из (5)] производной $\partial n_0 / \partial \varepsilon$, означает, что изменение функции распределения при колебаниях сводится к деформации граничной фермиевской поверхности (сферы в невозмущенном распределении). Интеграл же (8) представляет собой величину смещения (в единицах энергии) этой поверхности в заданном направлении **n**.

Отметим сразу же, что из вида уравнения (11) следует, что вещественная (нас интересуют лишь незатухающие колебания) величина η должна превышать 1, т. е. скорость распространения волн удовлетворяет неравенству

$$u > v. \tag{12}$$

Исследуем в качестве примера случай, когда функция $F(\chi)$ сводится к постоянной (обозначим ее F_0). Интеграл в правой стороне уравнения (11) не зависит при этом от углов θ, φ. Поэтому искомая функция ν имеет вид (экспоненциальный множитель опускаем):

$$\nu = \text{const} \cdot \cos\theta / (\eta - \cos\theta). \tag{13}$$

Граничная фермиевская поверхность приобретает форму поверхности вращения, вытянутой в направлении вперед по направлению распространения волны и сплюснутой в обратном направлении. Укажем для сравнения, что обычной звуковой волне соответствует функция ν вида $\nu = \text{const} \cdot \cos\theta$, представляющая собой смещение фермиевской сферы как целого, без изменения ее формы.

Для определения скорости u подставляем (13) в (11) и получаем

$$\frac{F_0}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{\eta - \cos\theta}\, 2\pi \sin\theta\, d\theta = 1.$$

Произведя интегрирование, найдем следующее уравнение, определяющее в неявном виде скорость волны по заданной величине F_0:

$$\varphi(\eta) \equiv \frac{\eta}{2} \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} - 1 = \frac{1}{F_0}. \tag{14}$$

Функция $\varphi(\eta)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0 при изменении η от 1 до ∞, оставаясь всегда положительной. Отсюда следует, что рассматриваемые волны могут существовать лишь при $F_0 > 0$. Поскольку функция F пропорциональна взятой с обратным знаком амплитуде рассеяния (на угол 0°) квазичастиц друг на друге (см. [1]), то последняя должна быть отрицательной, что соответствует взаимному отталкиванию квазичастиц. Следует, однако, подчеркнуть, что этот вывод относится именно к случаю $F = \text{const}$. Если функция $F(\chi)$ не сводится к постоянной (и в то же время не мала по сравнению с 1; см. ниже), то распространение нулевого звука, вообще говоря, возможно как при отталкивательном, так и при притягательном взаимодействии квазичастиц.

При $\eta \to \infty$: $\varphi(\eta) \approx 1/3\eta^2$. Поэтому большим F_0 соответствует $\eta = \sqrt{F_0/3}$. В обратном же случае $F_0 \to 0$ мы найдем, что η стремится к 1 по закону

$$\eta - 1 \sim e^{-2/F_0}. \tag{15}$$

Последний случай имеет более общее значение: он соответствует нулевому звуку в почти идеальном ферми-газе при произвольном виде функции $F(\chi)$. Действительно, почти идеальному газу соответствует малая по абсолютной величине функция F. Из уравнения (11) видно, что при этом η будет близким к 1, а функция ν будет заметно отлична от нуля лишь при малых углах θ. На этом основании, интересуясь лишь этой областью углов, можно заменить в интеграле в правой стороне уравнения (11) функцию F ее значением при $\chi=0$ (при $\theta \to 0$ и $\theta' \to 0$ также и $\chi \to 0$). В результате мы снова вернемся к формулам (13) и (15) с заменой константы F_0 на $F(0)$ (этот результат совпадает с полученным ранее Силиным [4]).

Отметим, что в слабо неидеальном ферми-газе скорость нулевого звука превышает скорость обычного звука в $\sqrt{3}$ раз. Действительно, для первой имеем $\eta \approx 1$, т. е. $u \approx v$. Для скорости же обычного звука из формулы (10), пренебрегая в ней членом $\bar{F}$ и положив $m^* \approx m$: $c^2 \approx p_0^2/3m^2 = v^2/3$.

В общем случае произвольной зависимости $F(\chi)$ решение уравнения (11) неоднозначно. Оно в принципе допускает существование различных типов нулевого звука, отличающихся друг от друга угловой зависимостью их амплитуды $\nu(\theta, \varphi)$ и распространяющихся с различными скоростями. При этом наряду с аксиально-симметрическими решениями $\nu(\theta)$ могут существовать и асимметрические решения, в которых ν содержит азимутальные множители $e^{\pm im\varphi}$ (m — целое число).

Так, при функции $F(\chi)$ вида

$$F = F_0 + F_1 \cos\chi = F_0 + F_1(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')) \tag{16}$$

могут существовать решения с $\nu \sim e^{\pm i\varphi}$. Действительно, подставляя (16) в (11) и произведя интегрирование по $d\varphi'$ (предполагая при этом, что $\nu = f(\theta)e^{i\varphi}$), получим:

$$(\eta - \cos\theta) f = \frac{F_1}{4}\cos\theta\sin\theta \int_0^\pi \sin^2\theta' f' d\theta'.$$

Отсюда

$$\nu = \mathrm{const} \cdot \frac{\sin\theta\cos\theta}{\eta - \cos\theta} e^{i\varphi}. \tag{17}$$

Подставляя же это выражение обратно в уравнение, получим соотношение

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3\theta\cos\theta}{\eta - \cos\theta} d\theta = \frac{4}{F_1}, \tag{18}$$

определяющее зависимость скорости распространения от F_1. Интеграл в левой стороне равенства является монотонно убывающей положительной функцией η. Поэтому его наибольшее возможное значение достигается при $\eta = 1$. Вычислив интеграл, мы найдем, что соответствующее (наименьшее допустимое) значение F_1 есть 6. Таким образом, распространение асимметричной волны вида (17) возможно лишь при $F_1 > 6$.

Обращаясь к реально существующей ферми-жидкости — жидкому He^3 — имеет смысл попытаться аппроксимировать неизвестную нам его функцию $F(\chi)$ двухчленной формулой (16). Входящие в нее коэффициенты F_0 и F_1 можно определить при помощи формул

$$F_0 = 3mm^*c^2/p_0^2 - 1, \quad F_1/3 = m^*/m - 1$$

[см. (9) и (10)], зная значения эффективной массы m^* и скорости обычного звука c. Первую можно извлечь из экспериментальных данных о температурной зависимости энтропии (в наиболее низкотемпературной области); из имеющихся в настоящее время данных [7] получается $m^* = 1{,}43\ m$ (m — масса атома He^3). Для скорости же c, согласно данным Вальтерса и Фербанка [8] о сжимаемости жидкого He^3, имеем 195 *м/сек*. Наконец, p_0 получается непосредственно из плотности жидкости: $p_0/\hbar = 0{,}76 \cdot 10^8$ *см*$^{-1}$.

На основании приведенных данных получаем

$$F_0 = 5{,}4; \quad F_1 = 1{,}3. \tag{19}$$

Из этих значений можно сделать ориентировочное заключение о том, что в жидком He^3 распространение асимметричного нулевого звука невозможно. Для симметричного же нулевого звука решение уравнения с функцией $F(\chi)$ из (16) и (19)[2] приводит к значению $\eta = 1{,}83$, откуда для скорости волны: $u = 1{,}83\ v = 1{,}83\ p_0/m^* = 206$ *м/сек*.

Возможность распространения волн в ферми-жидкости при абсолютном нуле означает, что ее энергетический спектр может автоматически содержать «бозевскую ветвь» в виде фононов с энергией $\varepsilon = up$. Следует, однако, оговорить, что было бы неправильным вводить соответствующие этой ветви поправки в термодинамические величины ферми-жидкости, поскольку они содержат более высокие степени температуры (T^3 в теплоемкости), чем отклонения от развитой в [1] приближенной теории.

2. Колебания ферми-жидкости при температурах выше нуля

При низких, но отличных от нуля температурах в ферми-жидкости происходят взаимные столкновения квазичастиц, причем число столкновений пропорционально T^2. Соответствующее же время релаксации (время свободного пробега) $\tau \sim 1/T^2$. Характер распространяющихся в жидкости волн, естественно, существенно зависит от соотношения между их частотой и обратным временем релаксации.

При $\omega\tau \ll 1$ (что фактически эквивалентно условию малости длины пробега квазичастиц по сравнению с длиной волны λ) столкновения успевают установить термодинамическое равновесие в каждом (малом по сравнению с λ) элементе объема жидкости. Это значит, что мы имеем дело с обычными гидродинамическими звуковыми волнами, распространяющимися со скоростью c.

Если же $\omega\tau \gg 1$, то, напротив, столкновения не играют существенной роли в процессе распространения колебания, и мы будем иметь рассмотренные в предыдущем разделе волны нулевого звука.

В обоих этих предельных случаях распространение волн сопровождается сравнительно слабым их поглощением. В промежуточной же области, $\omega\tau \sim 1$, поглощение весьма сильно и выделение различных типов волн, как незатухающих процессов, здесь невозможно.

Частотную и температурную зависимости коэффициента поглощения γ в области обычного звука легко получить при помощи известной формулы для поглощения звука (см., например, [9]), согласно которой γ пропорциональна квадрату частоты и коэффициенту вязкости[3]. Поскольку вязкость ферми-жидкости пропорциональна $1/T^2$ [10], то мы находим, что

$$\gamma \sim \omega^2 / T^2 \text{ при } \omega \ll 1/\tau. \tag{20}$$

Поглощение в области нулевого звука существенно отличается по своему характеру от поглощения обычного звука. В последнем столкновения не могут привести к диссипации энергии «на фоне» распределения, измененного лишь звуковыми колебаниями как таковыми; это связано с упоминавшимся уже обстоятельством, что измененное таким образом распределение остается в каждом элементе объема жидкости термодинамически равновесным. Поэтому поглощение обычного звука связано с влиянием столкновений на самую функцию распределения.

[2] Эти вычисления произведены А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым.

[3] Вклад же в γ со стороны второй вязкости и теплопроводности оказывается пропорциональным более высоким степеням T и потому не существенен.

В области же нулевого звука столкновения приводят к поглощению уже «на фоне» распределения измененного лишь самими колебаниями, не являющегося в этом случае термодинамически равновесным (поскольку деформируется форма граничной фермиевской поверхности). Это изменение функции распределения не зависит от частоты, а потому не будет зависеть от частоты и коэффициент поглощения. Зависимость же γ от температуры определяется его пропорциональностью числу столкновений, т. е.

$$\gamma \sim T^2 \text{ при } \varkappa T / \hbar \gg \omega \gg 1/\tau. \tag{21}$$

Верхний предел указанной здесь области применимости этой формулы определяется неравенством $\hbar\omega \ll \varkappa T$ ($\varkappa$ — постоянная Больцмана), допускающим классическое рассмотрение столкновений. Напомним, что предполагающееся здесь неравенство $\varkappa T/\hbar \gg 1/\tau$, т. е. $\hbar/\tau \ll \varkappa T$ (малость квантовой неопределенности энергии квазичастиц по сравнению с $\varkappa T$), заведомо должно иметь место, так как оно является условием применимости всей вообще развитой в [1] теории ферми-жидкости.

Определение же коэффициента поглощения нулевого звука в области частот $\hbar\omega \gg \varkappa T$ требует квантового рассмотрения. Соответствующие вычисления могут быть упрощены, если производить их таким образом, чтобы выразить искомый «квантовый» коэффициент поглощения через «классический» из (21).

Поглощение звуковых квантов $\hbar\omega$ происходит при столкновениях квазичастиц. Если обозначить посредством ε_1 и ε_2 энергии квазичастиц до и после столкновения, то при заданной частоте ω они связаны законом сохранения энергии $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \hbar\omega = \varepsilon_1' + \varepsilon_2'$. Наряду с такими столкновениями надо учесть также и обратные столкновения, сопровождающиеся испусканием звуковых квантов. Учитывая известные свойства вероятности столкновения ферми-частиц, мы найдем, что полная скорость убывания числа звуковых квантов в результате столкновений дается выражением вида:

$$\iiiint w(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2')\{n_1 n_2 (1-n_1')(1-n_2') - n_1' n_2' (1-n_1)(1-n_2)\} \times$$
$$\times\, \delta(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k})\, \delta(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_1' d\tau_2'. \tag{22}$$

δ-Функции в подынтегральном выражении обеспечивают выполнение законов сохранения импульса и энергии.

В интеграле (22) существенны значения энергии лишь в области размытости распределения Ферми. В этой области сильно меняются в подинтегральном выражении лишь те множители, которые содержат $n(\varepsilon)$. Кроме того, следует учесть, что угловые интегралы в (22) практически не меняются при переходе от «классической» области $\hbar\omega \ll \varkappa T$ к «квантовой» $\hbar\omega \gg \varkappa T$. Ввиду этого, нам будет достаточно вычислить интеграл

$$J = \iiiint \{n_1 n_2 (1-n_1')(1-n_2') - n_1' n_2' (1-n_1) \times$$
$$\times (1-n_2)\, \delta(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega)\, d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_1' d\varepsilon_2',$$

взятый только по энергиям. Подставив сюда

$$n(\varepsilon) = [e^{(\varepsilon-\mu)/\varkappa T} + 1]^{-1}$$

и введя обозначения

$$x = (\varepsilon - \mu)/\varkappa T, \quad \xi = \hbar\omega/\varkappa T,$$

получим (опуская множитель T^3)

$$J = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-e^{-\xi})\, \delta(x_1' + x_2' - x_1 - x_2 - \xi)\, dx_1 dx_2 dx_1' dx_2'}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}+1)(1+e^{-x_1'})(1+e^{-x_2'})}.$$

Ввиду быстрой сходимости интеграла область интегрирования может, очевидно, быть распространена от $-\infty$ до $+\infty$.

Для проведения интегрирования переходим к переменным x_1, x_2, y_1, y_2, где $y = x - x'$. Интегрирование по x_1 и x_2 производится элементарно и дает:

$$J = (1 - e^{-\xi}) \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(y_1 + y_2 + \xi)\, dx_1\, dx_2\, dy_1\, dy_2}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)(1 + e^{-x_1 + y_1})(1 + e^{-x_2 + y_2})} =$$

$$= (1 - e^{-\xi}) \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_1 y_2 \delta(y_1 + y_2 + \xi)\, dy_1\, dy_2}{(1 - e^{y_1})(1 - e^{y_2})} =$$

$$= -(1 - e^{-\xi}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(\xi + y)\, dy}{(e^y - 1)(e^{-y-\xi} - 1)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(\xi + y) \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^{y+\xi} - 1} \right\} dx.$$

Для вычисления получившейся разности двух расходящихся интегралов вводим предварительно конечный нижний предел $-\Lambda$ и пишем:

$$J = \int\limits_{-\Lambda}^{+\infty} \frac{y(\xi + y)}{e^y - 1} dy - \int\limits_{-\Lambda+\xi}^{+\infty} \frac{y(y - \xi)\, dy}{e^y - 1} = 2\xi \int\limits_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y dy}{e^y - 1} - \int\limits_{-\Lambda+\xi}^{-\Lambda} \frac{y(y - \xi)\, dy}{e^y - 1}.$$

Имея в виду перейти к пределу $\Lambda \to \infty$, во втором из стоящих здесь интегралов пренебрегаем e^y в знаменателе. Первый же переписываем следующим образом:

$$\int\limits_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y dy}{e^y - 1} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{y\, dy}{e^y - 1} + \int\limits_{-\Lambda}^{0} \frac{y\, dy}{e^y - 1} = \frac{\pi^2}{6} + \int\limits_{-\Lambda}^{0} \left(\frac{y}{1 - e^{-y}} - y \right) dy =$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \int\limits_{0}^{\Lambda} \frac{y\, dy}{e^y - 1} + \frac{\Lambda^2}{2}.$$

Произведя сокращения и переходя после этого к $\Lambda \to \infty$, получим окончательно

$$J = (2\xi\pi^2 / 3)(1 + \xi^2 / 4\pi^2).$$

Искомый коэффициент поглощения γ пропорционален J. Коэффициент пропорциональности между ними определяется тем, что при $\xi \ll 1$ должно быть $\gamma = \gamma_{\text{кл}}$. Поэтому получаем окончательно:

$$\gamma = \gamma_{\text{кл}} [1 + (\hbar\omega / 2\pi\varkappa T)^2] \text{ при } \hbar\omega \gtrsim \varkappa T. \tag{23}$$

Учитывая, что $\gamma_{\text{кл}} \sim T^2$, найдем что в пределе больших частот:

$$\gamma \sim \omega^2 \text{ при } \hbar\omega \gg \varkappa T, \tag{24}$$

т. е. коэффициент поглощения снова становится пропорциональным квадрату частоты, но не зависит от температуры. Отметим, что переход от формулы для «малых» к формуле для «высоких» частот происходит при $\hbar\omega \sim 2\pi\varkappa T$ (а не $\hbar\omega \sim \varkappa T$)[4]. Результат (24) относится, в частности, к нулевому звуку всех частот при абсолютном нуле температуры.

3. Спиновые волны в ферми-жидкости

Наряду с рассмотренными в разделе 1 волнами нулевого звука, не затрагивающими распределение спинов, в ферми-жидкости при абсолютном

[4] Рассматривая частоты $\omega \gg \varkappa T/\hbar$, мы в то же время предполагаем выполненным неравенство $\hbar\omega \ll \varkappa T_0$ (T_0 — температура вырождения распределения Ферми). В противном случае в поглощении участвовали бы частицы из «глубины» распределения Ферми, и вся развиваемая теория стала бы неприменимой.

нуле могут распространяться также и волны других типов, которые можно назвать спиновыми[5].

Будем обозначать в этом разделе посредством K функцию

$$K = f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, 4\pi p^2\, dp \,/\, (2\pi\hbar)^3\, d\varepsilon, \tag{25}$$

в которой не применяется операция Sp. При учете обменного взаимодействия между квазичастицами эта функция содержит член, пропорциональный произведению $\sigma\sigma'$, т. е. имеет вид [1]:

$$K = {}^1/_2 F(\chi) + {}^1/_2 G(\chi)\, \sigma\sigma' \tag{26}$$

[F совпадает с использованной выше функцией (6)].

Вместо уравнения (11) теперь будем иметь:

$$(\eta - \cos\theta)\, \nu = \cos\theta\, \mathrm{Sp}_{\sigma'} \int F\nu'\, do' \,/\, 4\pi. \tag{27}$$

Наряду с рассмотренными ранее решениями $\nu(n)$, не зависящими от спина, это уравнение имеет также решение вида:

$$\nu = \mu(\mathbf{n})\, \sigma. \tag{28}$$

Подставив (26) и (28) в (27), выполнив операцию Sp и сократив обе стороны уравнения на σ, получим:

$$(\eta - \cos\theta)\, \mu = \cos\theta \int G\mu'\, do' \,/\, 16\pi. \tag{29}$$

Мы видим, что для каждой из компонент вектора μ получается уравнение, отличающееся от (11) лишь заменой F на $G/4$. Поэтому все дальнейшие вычисления раздела 1 могут быть непосредственно применены и к спиновым волнам.

У реального жидкого He^3 из имеющихся экспериментальных данных по его магнитной восприимчивости можно определить лишь среднее значение $\overline{G}$, оказывающееся равным —1,9. Поскольку эта величина отрицательна, то (ввиду результатов раздела 2) вероятнее всего, что распространение спиновых волн в жидком He^3 невозможно. Такой вывод, однако, ни в какой степени не является категорическим.

В заключение выражаю благодарность А. А. Абрикосову, Е. М. Лифшицу и И. М. Халатникову за полезную дискуссию.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
15 сентября 1956 г.

Литература

[1] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, **30**, 1058, 1956.— [2] И. И. Гольдман. ЖЭТФ, **17**, 681, 1947.— [3] Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин. ЖЭТФ, **23**, 151, 1952.— [4] В. П. Силин. ЖЭТФ, **23**, 641, 1952.— [5] В. П. Силин. ЖЭТФ, **27**, 269, 1954.— [6] В. П. Силин. ЖЭТФ, **28**, 749, 1955.— [7] B. Abraham, D. Osborne, B. Weinstock. Phys. Rev., **98**, 551, 1955.— [8] G. K. Walters, W. M. Fairbank. Phys. Rev., **103**, 263, 1956.— [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, 2-е изд., М., 1954, § 77.— [10] И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, **20**, 919, 1950.

OSCILLATIONS OF A FERMI LIQUID

L. D. Landau

Various types of waves which can be propagated in a Fermi-liquid at absolute zero temperature and at non-zero temperatures are investigated. Absorption of the waves is also considered.

[5] Уравнение для спиновых волн в слабо неидеальном ферми-газе рассматривалось Силиным[6].