

## ТЕОРИЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

*Л. Д. Ландау*

Построена теория ферми-жидкости, основанная на представлении энергии возбуждений, как функционала от функции распределения. Находятся эффективная масса возбуждений, сжимаемость и магнитная восприимчивость ферми-жидкости. Получены выражения для потока импульса и потока энергии.

Как известно, в целом ряде случаев для рассмотрения системы ферми-частиц применяется модель ферми-газа, несмотря на то, что взаимодействие между частицами отнюдь не является слабым. Классическим примером могут служить электроны в металле. Такое состояние теории не является удовлетворительным, так как остается неясным, какие свойства газовой модели отвечают действительности, а какие присущи только газу.

При этом надо иметь в виду, что речь идет об определенных свойствах энергетического спектра («спектр фермиевского типа»), для существования которых необходимо, но не достаточно, чтобы составляющие систему частицы подчинялись статистике Ферми, т. е. обладали полуцелым спином. Например, атомы дейтерия взаимодействуют таким образом, что образуют молекулы. В результате этого жидкий дейтерий обладает энергетическим спектром бозевского типа. Таким образом наличие фермиевского энергетического спектра связано не только со свойствами частиц, но и со свойствами их взаимодействия.

Жидкость бозевского типа впервые была рассмотрена автором настоящей статьи применительно к свойствам гелия II. Из характера спектра такой жидкости следует, что всякая жидкость из бозе-частиц обязательно обладает сверхтекучестью. Обратная теорема о том, что жидкость, состоящая из ферми-частиц, не может быть сверхтекучей, согласно предыдущему, в общем виде неверна.

### 1. Энергия как функционал от функции распределения

Если мы рассмотрим ферми-газ при температурах, низких по сравнению с температурой вырождения, и введем некоторое слабое взаимодействие между атомами этого газа, то, как известно, вероятность столкновения для данного атома, находящегося в фермиевской зоне размытия, пропорциональна не только интенсивности взаимодействия, но и квадрату температуры. Это показывает, что при заданной интенсивности взаимодействия «неопределенность импульсов», связанная с конечной длиной пробега, при низких температурах всегда мала, причем не только по сравнению с величиной самого импульса, но и по сравнению с шириной фермиевской зоны размытия, пропорциональной первой степени температуры.

В основе построения рассматриваемого типа спектра лежит предположение, что по мере постепенного «включения» взаимодействия между атомами, т. е. при переходе от газа к жидкости, классификация уровней остается неизменной. Роль частиц газа в этой классификации принимают на себя «элементарные возбуждения» («квазичастицы»), каждая из которых обладает определенным импульсом. Они подчиняются статистике Ферми, а их число всегда совпадает с числом частиц в жидкости. «Квазичастицу» можно в известном смысле рассматривать как частицу, находящуюся в самосогласованном поле окружающих частиц. При

наличии самосогласованного поля энергия частицы зависит от состояния окружающих частиц, а энергия всей системы уже не равна сумме энергий отдельных частиц и является функционалом от функции распределения.

Рассмотрим бесконечно малое изменение функции распределения квазичастиц  $n$ . Тогда мы можем записать изменение плотности энергии системы в виде

$$\delta E = \int \varepsilon \delta n d\tau, \quad (1)$$

где  $d\tau = dp_x dp_y dp_z / (2\pi\hbar)^3$ . Величина  $\varepsilon(p)$  является функциональной производной энергии по функции распределения. Она соответствует изменению энергии системы при добавлении одной квазичастицы с импульсом  $p$ , и ее можно рассматривать как функцию Гамильтона добавленной квазичастицы с заданным импульсом в самосогласованном поле.

Однако в формуле (1) не учтено то обстоятельство, что частицы имеют спин. Так как спин является квантово-механической величиной, то он не может быть рассмотрен классическим способом, ввиду чего мы должны считать функцию распределения статистической матрицей в отношении спина и писать вместо формулы (1) следующее соотношение:

$$\delta E = \text{Sp}_\sigma \int \varepsilon \delta n d\tau, \quad (2)$$

где  $\text{Sp}_\sigma$  — шпур по спиновым состояниям. Величина  $\varepsilon$  в общем случае также является оператором, зависящим от операторов спина. Если мы имеем равновесную жидкость, не находящуюся во внешнем магнитном поле, то вследствие изотропии энергия не может зависеть от операторов спина. Мы ограничимся рассмотрением частиц с  $s = 1/2$ .

Можно показать, что именно эта энергия  $\varepsilon$  входит в формулу распределения Ферми для квазичастиц. Действительно, энтропию жидкости разумно определить комбинаторным образом:

$$S = - \text{Sp}_\sigma \int \{n \ln n + (1 - n) \ln (1 - n)\} d\tau. \quad (3)$$

Из этой формулы путем варьирования при дополнительных условиях

$$\delta N = \text{Sp}_\sigma \int \delta n d\tau = 0, \quad \delta E = \text{Sp}_\sigma \int \varepsilon \delta n d\tau = 0,$$

можно получить распределение Ферми

$$n(\varepsilon) = [e^{(\varepsilon - \mu)/\theta} + 1]^{-1}. \quad (4)$$

Отметим, что  $\varepsilon$ , будучи функционалом от  $n$ , конечно, зависит и от температуры.

В соответствии с (4) теплоемкость ферми-жидкости при низких температурах будет пропорциональна температуре; она определяется той же формулой, что и для ферми-газа, с той лишь разницей, что вместо истинной массы  $m$  частиц в нее войдет эффективная масса квазичастицы, определяемая как

$$m^* = \left. \frac{p}{\partial \varepsilon / \partial p} \right|_{p=p_0}, \quad (5)$$

где  $p_0$  — граничный импульс ферми-распределения квазичастиц при абсолютном нуле.

Существенное значение для теории ферми-жидкости имеет не только  $\varepsilon(p)$  при заданном распределении, но и изменение  $\varepsilon$ , вызываемое изменением  $n$ :

$$\delta \varepsilon(p) = \text{Sp}_\sigma \int f(p, p') \delta n' d\tau'. \quad (6)$$

Будучи второй вариационной производной, функция  $f$  симметрична относительно  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ ; кроме того, она зависит от спинов.

Если основное распределение  $n$  изотропно, то функция  $f$  в общем случае содержит члены вида  $\varphi_{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \sigma_i \sigma'_k$ , где  $\sigma_i$  — операторы спина, а если взаимодействие является обменным, то только члены вида

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (\sigma \sigma').$$

Функцию  $f$  можно рассмотреть со следующей точки зрения. Число актов рассеяния квазичастиц в единице объема за единицу времени можно записать в виде

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} |F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau'_1, \quad (7)$$

где предполагается выполненным закон сохранения импульса  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$ . Величина  $f$  есть не что иное, как  $-F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$ , т. е. амплитуда рассеяния на  $0^\circ$  (с обратным знаком). Вообще говоря, эта амплитуда комплексна, ее мнимая часть определяется полным эффективным поперечником рассеяния. Поскольку мы предполагаем, что реальные акты рассеяния маловероятны, то мнимой частью можно пренебречь.

## 2. Соотношение, вытекающее из принципа относительности Галилея

Если мы имеем дело с жидкостью, не находящейся во внешнем поле, то из принципа относительности Галилея следует, что импульс, приходящийся на единицу объема, должен быть равен плотности потока массы<sup>1</sup>. Поскольку скорость квазичастицы есть  $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ , а число квазичастиц совпадает с числом истинных частиц, имеем:

$$\text{Sp}_\sigma \int \mathbf{p} n d\tau = \text{Sp}_\sigma \int m \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} n d\tau. \quad (8)$$

Ввиду этого должны равняться и вариационные производные по  $n$  от обеих частей этого соотношения. Это дает

$$\frac{1}{m} \text{Sp}_\sigma \int \mathbf{p} \delta n d\tau = \text{Sp}_\sigma \int \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} \delta n d\tau + \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n' n d\tau d\tau'.$$

Так как величина  $\delta n$  произвольна, то отсюда следует

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} + \text{Sp}_{\sigma'} \int \frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}'} n' d\tau' = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} - \text{Sp}_{\sigma'} \int f \frac{\partial n'}{\partial\mathbf{p}'} d\tau' \quad (9)$$

(слева подразумевается единичная матрица по спинам).

Если мы имеем дело с изотропным случаем, то достаточно, чтобы формула (9) имела место для шпуров, т. е.

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} - \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f \frac{\partial n'}{\partial\mathbf{p}'} d\tau'. \quad (10)$$

Отметим, что эта формула определяет функцию  $\varepsilon$  через величину  $f$  с точностью до постоянной.

Рассмотрим соотношение (10) для импульсов, близких к границе распределения Ферми. При низких температурах функция  $\partial n/\partial\mathbf{p}$  будет мало отличаться от  $\delta$ -функции. Ввиду этого в интеграле в (10) мы можем выполнить интегрирование по абсолютной величине импульса, оставляя лишь

<sup>1</sup> Этот вывод не относится, в частности, к электронам в металле, поскольку для них  $\mathbf{p}$  — импульс, а квазиимпульс.

интегрирование по углу. Это дает следующее соотношение между истинной и эффективной массами:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{p_0}{2(2\pi\hbar)^3} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f \cos \theta d\Omega. \quad (11)$$

Поскольку в этой формуле оба векторных аргумента в  $f$  соответствуют ферми-поверхности, то функция  $f$  зависит только от угла между ними.

### 3. Сжимаемость ферми-жидкости

Выразим сжимаемость (при абсолютном нуле) через более удобную для нас величину  $\partial\mu/\partial N$ . Для этого замечаем, что вследствие однородности химический потенциал  $\mu$  зависит лишь от отношения  $N/V$ . Следовательно, имеем

$$\frac{\partial\mu}{\partial N} = - \frac{V\partial\mu \cdot \partial V}{N} = - \frac{V^2}{N} \frac{\partial p}{\partial V}. \quad (12)$$

Для квадрата скорости звука получаем

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial(mN/V)} = \frac{1}{m} \left( N \frac{\partial\mu}{\partial N} \right). \quad (13)$$

Таким образом задача свелась к вычислению производной  $\partial\mu/\partial N$ . Поскольку  $\mu = \varepsilon(p_0) \equiv \varepsilon_0$ , изменение химического потенциала  $\delta\mu$ , происходящее вследствие изменения полного числа частиц  $\delta N$ , будет равно<sup>2</sup>

$$\delta\mu = \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f \delta n' d\tau' + \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial p_0} \delta p_0. \quad (14)$$

Второй член обязан тому, что при изменении  $\delta N$  граничный импульс  $p_0$  меняется на величину  $\delta p_0$ .

Для случая спина  $1/2$   $\delta N$  и  $\delta p_0$  связаны соотношением

$$\delta N = 8\pi p_0^2 \delta p_0 V / (2\pi\hbar)^3. \quad (15)$$

В (14) под интегралом существенны значения функции лишь при близких к  $p_0$  значениях импульсов. Поэтому интегрирование по абсолютной величине  $p$  можно произвести, после чего получается

$$\text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f \delta n' d\tau' = \frac{1}{8\pi V} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f d\omega \delta N. \quad (16)$$

Из (14) с учетом (15) и (16) получаем

$$\partial\mu/\partial N = \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f d\omega / 16\pi V + (2\pi\hbar)^3 / 8\pi p_0 m^* V. \quad (17)$$

Воспользуемся теперь соотношением (11) и выразим в полученной формуле эффективную массу  $m^*$  через массу частиц  $m$ . Имеем

$$\frac{\partial\mu}{\partial N} = \frac{1}{16\pi V} \int \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} f (1 - \cos \theta) d\omega + \frac{(2\pi\hbar)^3}{8\pi p_0 m V}.$$

Далее, умножив полученное соотношение на  $N/m = (1/m) 8\pi p_0^3 V / 3 (2\pi\hbar)^3$ , находим выражение для квадрата скорости звука

$$c^2 = \frac{p_0^2}{3m^2} + \frac{1}{6m} \left( \frac{p_0}{2\pi\hbar} \right)^3 \int \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} f (1 - \cos \theta) d\omega. \quad (18)$$

<sup>2</sup> Соотношение (14) получается в результате взятия  $\text{Sp}$  от аналогичного выражения, содержащего спинные операторы.

#### 4. Магнитная восприимчивость

Вычислим магнитную восприимчивость ферми-жидкости. Если система находится в магнитном поле  $\mathbf{H}$ , то дополнительная энергия свободной частицы в этом поле равна  $\beta \sigma \mathbf{H}$ . Кроме того, необходимо еще учесть тот факт, что в присутствии магнитного поля вид функции распределения также меняется. Следовательно, при вычислении магнитной восприимчивости необходимо иметь в виду, что

$$\delta \varepsilon = -\beta (\sigma \mathbf{H}) + \text{Sp}_{\sigma'} \int f \delta n' d\tau', \quad (19)$$

т. е. нельзя пренебрегать влиянием члена с  $f$ . Запишем  $f$  в виде

$$f = \varphi + \psi (\sigma \sigma'), \quad (20)$$

где второй член учитывает обменное взаимодействие между частицами. Далее, при вычислении добавки  $\delta n$ , зависящей от поля, изменение химического потенциала  $\delta \mu$  можно не учитывать. Это изменение является величиной второго порядка малости по полю  $\mathbf{H}$ , в то время как  $\delta \varepsilon$  — первого порядка по полю. Поэтому в формулу (19) можно подставить  $\delta n = (\partial n / \partial \varepsilon) \delta \varepsilon$ ; имеем

$$\delta \varepsilon = -\beta (\sigma \mathbf{H}) + \text{Sp}_{\sigma'} \int f \frac{\partial n'}{\partial \varepsilon'} \delta \varepsilon' d\tau'. \quad (21)$$

Будем искать  $\delta \varepsilon$  в виде

$$\delta \varepsilon = -\gamma (\sigma \mathbf{H}). \quad (22)$$

Величина  $\gamma$  определится из формулы (21)<sup>3</sup>

$$\gamma = \beta + \frac{1}{2} \int \psi \frac{\partial n}{\partial \varepsilon'} \gamma' d\tau'. \quad (23)$$

Учитывая  $\delta$ -образный характер  $\partial n / \partial \varepsilon$ , получаем отсюда

$$\gamma = \beta - \frac{1}{2} \overline{\psi_0} \gamma (\partial \tau / \partial \varepsilon)_0. \quad (24)$$

Здесь индекс 0 указывает, что берутся значения всех функций при  $p = p_0$ ; черта сверху означает усреднение по углам. С другой стороны восприимчивость определяется из формулы

$$\chi \mathbf{H} = \beta \text{Sp} \int n \sigma d\tau$$

или

$$\chi \mathbf{H} = -\beta \text{Sp} \int \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \gamma (\mathbf{H} \sigma) \sigma d\tau = \frac{\mathbf{H}}{2} \beta \gamma \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_0. \quad (25)$$

Отсюда окончательно получаем

$$\frac{1}{\chi} = \frac{2}{\beta \gamma_0 (\partial \tau / \partial \varepsilon)_0} = \frac{2}{\beta^2 (d\tau / d\varepsilon)_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \overline{\psi_0} \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_0 \right). \quad (26)$$

Далее,  $(d\tau / d\varepsilon)_0$  можно выразить через коэффициент  $\alpha$  в линейном законе теплоемкости. Таким путем находим

$$1/\chi = \beta^{-2} \{ 2\pi^2 k^2 / 3\alpha + \overline{\psi_0} \}. \quad (27)$$

Отсюда видно, что в жидкости не существует связи между теплоемкостью и восприимчивостью, которая имеет место в газах. Член с  $\overline{\psi_0}$  учитывает обменное взаимодействие, существенное для жидкостей. Так, для  $\text{He}^3$  анализ экспериментальных данных [1] показывает, что  $\overline{\psi_0}$  отрицательна и составляет примерно  $2/3$  от первого члена.

<sup>3</sup> При этом используются соотношения  $\text{Sp}_{\sigma'} (\sigma \sigma') \sigma' = 1/3 \sigma \text{Sp}_{\sigma'} (\sigma' \sigma') = 1/2 \sigma$ .

## 5. Кинетическое уравнение

В отсутствие магнитного поля и при пренебрежении магнитным взаимодействием спин-орбита  $\varepsilon$  не зависит от оператора  $\sigma$ , и кинетическое уравнение в квазиклассическом приближении приобретает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = I(n). \quad (28)$$

Необходимость учета производных от энергии  $\varepsilon$  по координатам в отсутствие внешнего поля связана с тем, что  $\varepsilon$  является функционалом  $n$ , а функция распределения  $n$  зависит от координат.

Найдем выражение для потока импульса. Для этого умножим левую и правую части полученного уравнения на импульс  $p_i$  и проинтегрируем по всему фазовому объему. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Sp} \int p_i n d\tau + \text{Sp} \int p_i \left( \frac{\partial n}{\partial x_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} - \frac{\partial n}{\partial p_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) d\tau = \text{Sp} \int p_i I(n) d\tau. \quad (29)$$

Вследствие сохранения импульса при столкновениях правая часть полученного уравнения равна нулю, в левой же части после несложных преобразований получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i n d\tau + \frac{\partial}{\partial x_k} \int p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} n d\tau - \int p_i \frac{\partial}{\partial p_k} \left( n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) d\tau = 0. \quad (30)$$

Наконец, преобразовав третий интеграл по частям, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i n d\tau + \frac{\partial}{\partial x_k} \int p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} n d\tau + \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} d\tau = 0. \quad (31)$$

Интеграл  $\text{Sp} \int n (\partial \varepsilon / \partial x_i) d\tau$  можно представить в виде (см. (2))

$$\text{Sp} \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} d\tau = \text{Sp} \frac{\partial}{\partial x_i} \int n \varepsilon d\tau - \text{Sp} \int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial x_i} d\tau = \frac{\partial}{\partial x_i} [\text{Sp} \int n \varepsilon d\tau - E].$$

Таким образом окончательно имеем закон сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Sp} \int p_i n d\tau + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (32)$$

где тензор потока импульса

$$\Pi_{ik} = \text{Sp} \int p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} n d\tau + \delta_{ik} [\text{Sp} \int n \varepsilon d\tau - E]. \quad (33)$$

Аналогичным путем получаем выражение для потока энергии. Умножаем левую и правую части кинетического уравнения (28) на  $\varepsilon$  и интегрируем по всему фазовому объему. Имеем

$$\text{Sp} \int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} d\tau + \text{Sp} \int \varepsilon \left( \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \right) d\tau = \text{Sp} \int \varepsilon I(n) d\tau.$$

Вследствие сохранения энергии при соударениях правая часть полученного уравнения равна нулю, левая же часть без труда приводится к виду

$$\int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} d\tau + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int n \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau = 0.$$

Учитывая (2), окончательно получаем

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0, \quad (34)$$

где поток энергии

$$\mathbf{Q} = \operatorname{Sp} \int n \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau. \quad (35)$$

При решении конкретных кинетических задач необходимо иметь в виду следующее обстоятельство. При таком решении мы обычно записываем функцию  $n$  в форме суммы равновесной функции  $n_0$  и добавки  $\delta n$ . При этом отклонение тензора потока импульса  $\Pi_{ik}$  и вектора потока энергии  $\mathbf{Q}$  от их равновесных значений будет происходить как за счет непосредственно изменения функции  $n$  на величину  $\delta n$ , так и за счет изменения  $\varepsilon$ , происходящего вследствие функциональной зависимости  $\varepsilon$  от  $n$  (2).

В заключение выражаю благодарность И. М. Халатникову и А. А. Абрикосову за полезную дискуссию.

Институт физических проблем  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
7 марта 1956 г.

#### Литература

- [1] W. Fairbank, W. Ard a. G. Walters. Phys. Rev., 95, 566, 1954.