

# ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

*А. В. Иванов, А. Д. Рахель\*, А. С. Шумихин*

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 21 июня 2026 г.,  
после переработки 20 июля 2026 г.  
Принята к публикации 23 июля 2026 г.

С использованием химической модели плазмы, основанной на разложении термодинамического потенциала в ряд по степеням активностей, выполнен расчет термодинамических функций плазмы свинца с развитой ионизацией и параметром кулоновской неидеальности  $\sim 1$ . Для определения границ применимости модели проведено сравнение с результатами экспериментов по электровзрыву фольг, в которых изучались свойства сверхкритического флюида свинца. Показано, что модель имеет весьма широкую область применимости и качественно описывает поведение термодинамических функций флюида в интервале удельных объемов начиная от значений, сопоставимых с критическим объемом перехода жидкость–газ (и при больших значениях). При этом использование для статистических сумм атомов и ионов вместо формулы Планка–Ларкина формулы, предложенной Старостиним и Рерихом, приводит к лучшему согласию с экспериментом. Обнаружено, что имеется интервал удельных объемов, в котором вклад от возбужденных состояний в энергию плазмы максимален, и для этого интервала модель существенно занижает этот вклад. Экспериментальные данные указывают на то, что обрезание статистических сумм должно зависеть не только от температуры, как это имеет место в указанных формулах, но и от плотности. Наконец, установлено, что значения электропроводности неидеальной плазмы свинца, измеренные при значениях параметра неидеальности  $\sim 1$  в экспериментах с взрывающимися фольгами, хорошо согласуются с измерениями электропроводности неидеальной плазмы инертных газов в экспериментах с ударными волнами. Это позволило оценить точность экспериментальных данных для такой плазмы, а также точность теоретических расчетов ее электропроводности.

**Ключевые слова:** химическая модель, неидеальная плазма, коэффициент Грюнайзена, скорость звука, теорема вириала, электропроводность, уравнение состояния, возбужденные связанные состояния

DOI: 10.31857/S0044451026090088

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Построение теории плотной плазмы, которая представляет собой частично ионизованный газ со степенью ионизации  $\sim 1$  и плотностью, всего в несколько раз меньшей критической плотности перехода жидкость–газ, является весьма сложной задачей. Это связано со сложностью учета в такой системе, рассматриваемой как газовая смесь атомов, ионов (ионизованных атомов) и свободных электронов, дальнегодействующего кулоновского взаимодействия между компонентами плазмы, часть из кото-

рых (атомы и в меньшей степени ионы) подвержены сильному влиянию плазмы [1, 2]. Кулоновское взаимодействие атома с его окружением из-за дальнегодействующего характера кулоновского потенциала делает это взаимодействие коллективным, а кроме того, оно приводит к сдвигу, слиянию и исчезновению высоко лежащих энергетических уровней атома и в результате к снижению потенциала ионизации. Построение теории осложняется еще и тем, что экспериментальные данные по свойствам плотной плазмы весьма ограничены. Экспериментальная методика [3, 4], когда фольга исследуемого металла (образец) помещается между двумя плоскими поверхностями блоков из оптически прозрачного диэлектрика и нагревается импульсом электрического тока, позволяет реализовать квазистатический процесс, в

\* E-mail: rakhel@ihed.ras.ru

котором образец плавится, а затем, при сверхкритическом давлении, переходит из жидкого состояния в газообразное. В процессе такого эксперимента измеряются изменения удельного объема образца, удельной внутренней энергии и удельной энтальпии, а также давление в образце и удельное электрическое сопротивление. Выполнив измерения для серии экспериментов, параметры которых варьируются, чтобы охватить достаточно широкий интервал давлений, можно получить данные по свойствам исследуемого металла для относительно широкой области состояний на плоскости  $V, P$  (удельный объем, давление), с погрешностью измерения величин не хуже 10 %. Недавно с помощью этого метода были получены экспериментальные данные по термодинамическим свойствам и электропроводности плотной плазмы свинца [5]. Эти данные сравнивались с результатами расчетов, выполненных в рамках химической модели [6], и было установлено, что эта модель совершенно неправильно описывает вклад в термодинамические функции плазмы от возбужденных состояний атомов и ионов, которые, как оказалось, играют в такой плазме весьма важную роль.

Химическая модель плазмы [7–9], построенная на основании разложения термодинамического потенциала  $\Omega = -PV$  по степеням активностей в большом каноническом ансамбле, в котором учтены только линейные и квадратичные члены, продемонстрировала заметно лучшее согласие с экспериментом [10]. Цель данной работы состоит в том, чтобы, во-первых, провести детальное сравнение этой модели с результатами измерений [5] и оценить границы ее применимости и точность (что невозможно сделать теоретически, как это ясно из построения этой модели), а во-вторых, используя эту модель, дать интерпретацию результатам измерений. Важность первой задачи связана не только с тем, что эта химическая модель широко используется в литературе. Главное состоит в том, чтобы выяснить, насколько точно эта модель, которая учитывает только парные корреляции между частицами, описывает вклад в термодинамические функции от возбужденных состояний атомов (и ионов) и от кулоновского взаимодействия между ее компонентами. Следует отметить, что измерения [5] позволили получить гораздо более полные данные по свойствам плотной плазмы, чем те, которые ранее были в литературе. Дело в том, что в этом случае термодинамические величины измеряются не в отдельных точках (один эксперимент — одна точка в пространстве  $V, P, E$ , где  $E$  — удельная внутренняя энергия, как это имеет место в ударно-волновых экспериментах [9]), а для

некоторого семейства линий в этом пространстве. А кроме того, одновременно измеряется удельное сопротивление образца для этих процессов. Поэтому экспериментальные данные [5] дают не только значения самих термодинамических величин, но и их производных, таких как коэффициент Грюнайзена, скорость звука, а также зависимости этих величин от удельного объема и давления.

В настоящей работе проведено сравнение химической модели [10] с результатами экспериментов [5] и показано, что эта модель действительно лучше согласуется с экспериментом, чем модель [4], однако вклад в термодинамические функции от возбужденных состояний атомов и ионов и эта модель заметно занижает. Поэтому мы провели вычисления термодинамических функций в рамках химической модели [10], используя при этом несколько различных формул для статистических сумм связанных состояний (взятых из литературы). Проблема учета возбужденных состояний атомов в термодинамике плазмы не нова [11] и связана с проблемой обрезания статистической суммы атома и разделения валентных электронов на связанные и свободные. Отметим, что в настоящее время эта проблема все еще далека от решения [2]. Правильный учет кулоновской неидеальности и возбужденных состояний атомов оказался важным при расчете термодинамических функций плазмы Солнца [12] в связи с измерениями собственных частот колебаний формы солнечного диска. Дело в том, что эти частоты измеряются с высокой точностью ( $\sim 10^{-4}$ ), и это дает основания надеяться на то, что с использованием глобальной модели Солнца удастся с высокой точностью определять показатель адиабаты для плазмы Солнца.

Кроме обсуждения термодинамических функций плотной плазмы, в настоящей работе было проведено сравнение имеющихся в литературе данных по электропроводности плотной плазмы с развитой ионизацией при относительно больших значениях параметра взаимодействия. Известно, что для плазмы, в которой рассеяние электронов происходит в основном на ионах и свободных электронах, а рассеянием на нейтральных частицах можно пренебречь, безразмерная электропроводность (отношение электропроводности к плазменной частоте) есть функция трех безразмерных параметров: степени ионизации, параметра взаимодействия и параметра рождения [1, 13]. Однако вид этой универсальной зависимости при больших значениях параметра взаимодействия не вполне известен. Мы показываем, что результаты измерений проводимости плотной плаз-

мы свинца, полученные в экспериментах по электро-взрыву фольг [5], хорошо согласуются с результатами измерений проводимости плазмы инертных газов в экспериментах с ударными волнами [14, 15]. При этом сравнивались значения проводимости для плазмы со степенью ионизации  $\alpha \approx 1$ , значением параметра кулоновской неидеальности  $\Gamma_e \approx 1$  и параметра вырождения в интервале  $\Theta = 3-7$ . Здесь  $\Gamma_e = e^2/a_e T$ , где  $e$  — элементарный заряд,  $T$  — температура в энергетических единицах (в эргах),  $a_e$  — среднее расстояние между свободными электронами, которое связано с концентрацией электронов  $n_e$  формулой  $(4\pi/3)a_e^3 n_e = 1$ , а  $\Theta$  — отношение температуры плазмы к температуре Ферми для идеального газа свободных электронов. Отметим, что теоретически полученные значения проводимости такой плазмы оказались в 2–3 раза выше измеренных значений.

## 2. ХИМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для описания термодинамических свойств плазмы свинца использовалась химическая модель [10]. В этой модели удельная свободная энергия  $F$  плазмы (т. е. свободная энергия одного грамма вещества) представляется в виде

$$\beta F = - \sum_k N_k \ln \left( \frac{eV Z_k}{N_k \lambda_k^3} \right) + \beta \Delta F_{ch-ch} + \beta \Delta F_{i-a}, \quad (1)$$

где  $\beta$  — обратная температура в энергетических единицах,  $V$  — удельный объем,  $N_k$  — число частиц сорта  $k$  (атомы, ионы различной кратности и свободные электроны),  $\lambda_k = (2\pi\hbar^2\beta/m_k)^{1/2}$  — тепловая длина волны де Бройля,  $m_k$  — масса,  $Z_k$  — статистическая сумма по внутренним степеням свободы частицы сорта  $k$ ,  $\Delta F_{ch-ch}$  — поправка к свободной энергии на взаимодействие между зарядами (между свободными электронами и ионами),  $\Delta F_{i-a}$  — поправка к свободной энергии на взаимодействие между ионами и атомами. В формуле (1) символ « $e$ » обозначает основание натурального логарифма, а не элементарный заряд (как в других разделах). Поправка от взаимодействия электрон–атом ввиду ее малости (менее 1 %) не учитывалась.

Первое слагаемое в выражении (1) есть основной вклад и представляет собой свободную энергию смеси идеальных газов свободных электронов, ионов и атомов. Статистические суммы атомов должны учитывать только те возбужденные состояния, которые реализуются в плазме. Для описания этого влияния

плазмы на спектр связанных состояний атомов использовались две модельные статистические суммы: Планка–Ларкина (ПЛ) [11, 16], а также формула, впервые предложенная в работе [17], а затем обоснованная Старостиным и Рерихом (СР) [18]. Для описания возбужденных состояний ионов мы применяли три подхода. В первом подходе, как и в работе [10], в статистической сумме учитывались возбужденные состояния, энергия которых не превышала 10 эВ по отношению к основному состоянию. Данные об энергетических уровнях атома и ионов свинца брались из базы данных NIST [19]. Кроме того, мы варьировали количество учтенных возбужденных состояний ионов: для ионов кратности 1 уровни варьировались в интервале 8–60 уровней, для ионов кратности 2 — в интервале 5–50 уровней, а для ионов кратности 3 — в интервале 1–10 уровней. Во втором подходе приближение ПЛ использовалось как для атомов, так и для ионов, а в третьем подходе использовалось приближение СР.

Поправка, описывающая взаимодействие между ионами и атомами, вычисляется во втором порядке вириального разложения

$$\beta \Delta F_{i-a} = - \frac{N_i N_a}{V} B_{i-a}(T), \quad (2)$$

здесь  $B_{i-a}(T)$  — второй вириальный коэффициент, который вычислялся согласно [20], а  $N_i$  и  $N_a$  — соответственно количество ионов и атомов в системе. В качестве парного потенциала взаимодействия ион–атом использовался потенциал Леннарда–Джонса 12–4. В этом случае для второго вириального коэффициента использовалась следующая аппроксимация:

$$B_{i-a}(T) = \frac{4\pi r_0^3}{3} A\varepsilon(1 - B\varepsilon), \quad (3)$$

$$\varepsilon = \beta D_{i-a}, \quad r_0 = a_0 \left( \frac{\eta \text{Ry}}{3\sqrt{3} D_{i-a}} \right)^{1/4},$$

где  $a_0$  — боровский радиус,  $\eta$  — поляризуемость атома свинца в атомных единицах,  $\text{Ry} = 1$  Ридберг (потенциал ионизации атома водорода),  $D_{i-a}$  — энергия диссоциации молекулярного иона,  $A = 4.29$ ,  $B = 0.0063$  [21]. Заметим, что в этой работе нас интересует плазма с развитой ионизацией, для которой вклады от взаимодействия свободных электронов и ионов с атомами малы. Однако, чтобы контролировать порядок величины такого вклада, мы оставили член от взаимодействия  $i-a$ . Нами были предварительно проведены расчеты термодинамических функций плазмы свинца для ограниченного

набора состояний с учетом не только вклада взаимодействия  $i$ - $a$ , но и взаимодействия  $e$ - $a$ . Результаты этих расчетов показали, что для изучаемой нами плазмы безразмерный параметр взаимодействия  $n_a B_{e-a}$  ( $n_a$  — концентрация атомов) в несколько раз меньше, чем  $n_a B_{i-a}$ , и поэтому вклад от взаимодействия  $e$ - $a$ , как уже отмечалось, не учитывался. Методы расчета вириальных коэффициентов  $B_{e-a}$ ,  $B_{i-a}$  представлены в работе [22].

Для учета взаимодействия между зарядами используется дебаевское приближение в большом каноническом ансамбле [7, 23, 24]. При этом для химического потенциала частиц с зарядом  $z_k$  мы получим поправку

$$\beta \Delta \mu_{z_k} = -\ln \left( 1 + z_k^2 \frac{\gamma}{2} \right), \quad (4)$$

где  $\gamma$  — положительный корень уравнения

$$\gamma^2 = 4\pi (\beta e^2)^3 \sum_k \frac{z_k^2 n_k}{1 + z_k^2 \gamma/2}, \quad (5)$$

а также поправки для давления и внутренней энергии:

$$\beta \Delta P_{ch-ch} = -\frac{\gamma}{6} \sum_k \frac{z_k^2 n_k}{1 + z_k^2 \gamma/2}, \quad (6)$$

$$\Delta E_{ch-ch} = 3V \Delta P_{ch-ch}. \quad (7)$$

Состав плазмы определяется путем решения системы уравнений

$$\mu_a = \mu_e + \mu_{i_1}, \quad \mu_{i_k} = \mu_e + \mu_{i_{k+1}}, \quad (8)$$

$$N = N_a + N_i, \quad N_i = \sum_k N_{i_k}, \quad (9)$$

$$N_e = \sum_k k N_{i_k}, \quad (10)$$

которые выражают условия ионизационного равновесия для частиц, участвующих в соответствующем процессе ионизации (электронов, атомов и ионов кратности  $k$ , которые мы отмечаем индексом  $i_k$ ), сохранения числа ядер и сохранения заряда соответственно. Для давления и удельной внутренней энергии плазмы получаем следующие выражения:

$$\beta P = \sum_k n_k + \beta \Delta P_{ch-ch} - n_a n_i B_{i-a}(T), \quad (11)$$

$$E = \frac{3}{2} \sum_k T N_k + \Delta E_{ch-ch} - \frac{3}{4} T n_i N_a B_{i-a}(T) + \sum_j N_j \langle E_j \rangle, \quad (12)$$

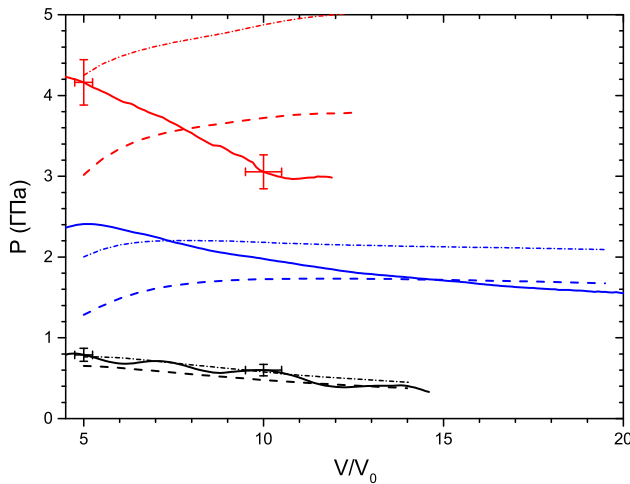
где последняя сумма в (12) — внутренняя энергия составных частиц (атомов и ионов различной кратности), в которой

$$\langle E_j \rangle = -\frac{\partial \ln Z_j}{\partial \beta}. \quad (13)$$

### 3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Эксперименты по импульсному джоулеву нагреву фольг свинца [5] позволили получить уникальные данные по свойствам плотной плазмы свинца. Переход образца свинца в плазменное состояние в таком эксперименте совершался в результате теплового расширения при сверхкритическом давлении, так что расслоение на фазы жидкость-газ в этом процессе не происходило. Когда плотность свинца уменьшалась в 3–5 раз по отношению к нормальному значению, он испытывал непрерывный переход в неметаллическое состояние при температуре  $T \sim 1$  эВ и давлении  $P \sim 1$  ГПа [3]. Неметаллическое состояние в этом случае представляет собой проводящий сверхкритический флюид с плотностью меньше критической плотности перехода жидкость-газ, отрицательным температурным коэффициентом сопротивления и удельным сопротивлением  $\sim 10$  мкОм·м. Критическая точка свинца, оцененная на основании результатов экспериментов [3, 25], имеет следующие параметры:  $V_c/V_0 = 3.5 \pm 0.3$  ( $V_0$  — удельный объем свинца при нормальных условиях),  $P_c \approx 0.2$  ГПа, а критическая удельная энтальпия (отсчитываемая от нормального состояния твердого тела)  $W_c \approx 1$  кДж/г. Возникает вопрос: что представляет собой этот неметаллический сверхкритический флюид? Как будет показано в этой работе, в интервале объемов  $V > 1.5V_c$  он представляет собой плотную плазму.

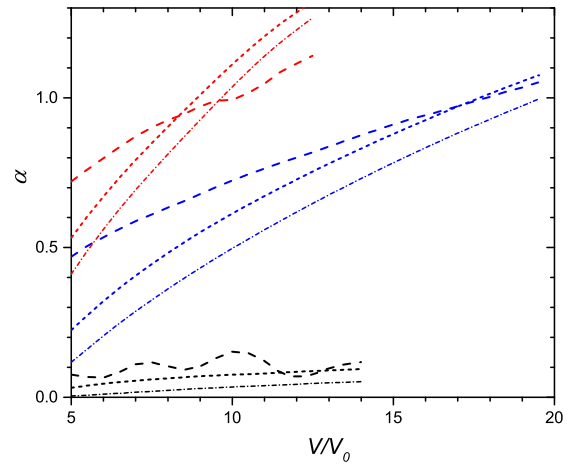
На рис. 1 приведено прямое сравнение измеренных в экспериментах [5] зависимостей давления от относительного объема  $V/V_0$  для сверхкритического флюида свинца с результатами расчетов по химической модели [10]. На рисунке показаны также зависимости, рассчитанные для идеальной газовой смеси, состоящей из атомов, ионов и свободных электронов, с учетом ионизации и рекомбинации. Для описания возбужденных состояний атомов использовалась модель ПЛ. В этих расчетах значения удельной внутренней энергии для определенного значения удельного объема брались из эксперимента. Как видно на рисунке, все зависимости, рассчитанные с помощью этой химической модели, от-



**Рис. 1.** Измеренные в трех экспериментах [5] зависимости давления от относительного объема (сплошные линии) сравниваются с результатами расчетов по модели [10] (штриховые линии), а также с зависимостями для идеальной плазмы (штрихпунктирные линии). В расчетах значения внутренней энергии при определенных значениях объема брались из эксперимента. Крестики показывают погрешности измерений

нительно мало отличаются от зависимостей, полученных для идеального газа. При этом разница между значениями давления для химической модели и идеального газа имеет тот же порядок, что и разница между рассчитанными по химической модели и измеренными значениями.

Это означает, что данная химическая модель, построенная на основе разложения термодинамического потенциала в ряд по степеням активностей, в котором удержаны только линейные (соответствующие идеальному газу) и квадратичные члены, используется в пределах границ ее применимости. Другими словами, малый параметр, по которому проводится разложение в физической модели [7, 16], действительно мал, и квадратичные члены дают гораздо меньший вклад, чем линейные. Следует особо отметить, что используемая модель с разумной точностью описывает поведение сверхкритического флюида свинца в интервале давлений  $P/P_c = 3-20$  уже при плотностях, которая всего в 1.4–2 раза ниже критической (и при более низких плотностях). Укажем, что температура такой плазмы, согласно химической модели, составляет 1–4 эВ. Как видно на рис. 1, точность расчета давления по модели [10] в области  $V/V_0 > 8$ ,  $P < 3$  ГПа сравнивается с точностью измерений. Однако в интервале объемов  $V/V_0 = 5-8$  разница между измеренными и рассчитанными значениями достигает 30 %. При



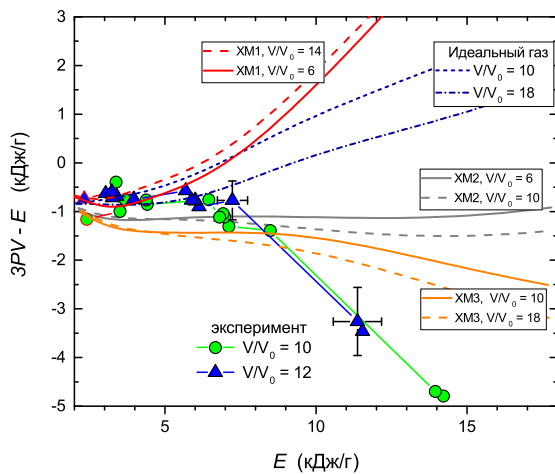
**Рис. 2.** Степень ионизации плазмы  $\alpha$  как функция относительного объема, рассчитанная по модели [10] (штриховые линии) для измеренных зависимостей  $E(V)$ , по этой же модели, но с учетом связанных состояний по СР (короткие штрихи), а также рассчитанная для идеальной плазмы (штрихпунктирные линии)

этом модель идеального газа в этом интервале объемов лучше согласуется с экспериментом.

На рис. 2 приведены рассчитанные значения степени ионизации для тех же экспериментальных зависимостей  $E(V)$ , для которых рассчитывалось давление. Степень ионизации определяется как количество свободных электронов, приходящихся на исходный атом, т. е.  $\alpha = n_e/(n_i + n_a)$ . Заметим, что степень ионизации для эксперимента с максимальным давлением, рассчитанная по модели [10], при значениях объема  $V/V_0 > 8$  оказалась ниже, чем в случае, когда связанные состояния атомов и ионов учитываются по модели СР. Это объясняется тем, что в модели [10] для статистических сумм ионов бралось фиксированное число (10) уровней, и поэтому обрезание статистической суммы ионов в этом случае не столь сильное, как по формуле СР.

На рис. 3 показаны зависимости приращения средней кинетической энергии флюида свинца, рассматриваемого как система из элементарных частиц (валентных электронов и ионов кратности 4), от внутренней энергии, определенные по результатам измерений [5] для двух изохор,  $V/V_0 = 10$  и  $V/V_0 = 12$ . Средняя кинетическая энергия частиц определялась с помощью теоремы вириала для системы частиц, взаимодействующих по закону Кулона [26]. Согласно этой теореме, которая справедлива как для классической, так и для квантовой системы частиц, средняя кинетическая энергия  $K$  (на 1 г вещества) равна





**Рис. 3.** Приращение средней кинетической энергии флюида свинца как функция приращения внутренней энергии, отсчитываемой от нормального состояния твердого тела, на изохорах. Измеренные значения на двух изохорах (значки, которые для наглядности соединены линиями) сравниваются с результатами расчетов по модели [6] (XM1), [10] (XM2), модели [10], в которой связанные состояния учитываются по модели СР (XM3), а также с расчетом для идеальной плазмы

$$K = 3PV - E. \quad (14)$$

Обращаем внимание на то, что здесь внутренняя энергия  $E$  отсчитывается от состояния, в котором все элементарные частицы системы удалены на бесконечность и имеют там нулевую кинетическую энергию. Но поскольку соотношение (14) должно выполняться и для нормального состояния твердого тела, т. е.  $K_0 = 3P_0V_0 - E_0$ , где индекс «0» отмечает значения величин в нормальном состоянии, вычитая это выражение из (14) и пренебрегая величиной  $3P_0V_0 \sim 10^{-4}$  кДж/г, получаем

$$K - K_0 = 3PV - (E - E_0), \quad (15)$$

где  $E - E_0$  — измеряемая в эксперименте внутренняя энергия, которую мы будем впредь обозначать как  $E$ . Приведенная на рис. 3 величина и есть приращение кинетической энергии системы,  $K - K_0$ . Для классической системы частиц, согласно теореме о равнораспределении кинетической энергии по степеням свободы, кинетическая энергия равна  $1.5NT$  ( $N$  — число частиц в системе), т. е. является монотонно возрастающей функцией температуры. Однако, как следует из рис. 3, для экспериментальных зависимостей в интервале энергий  $E > 7$  кДж/г

кинетическая энергия убывает с ростом удельной внутренней энергии. Поскольку на изохорах внутренняя энергия есть монотонно растущая функция температуры (так как изохорическая теплоемкость  $c_v > 0$ ), наблюдаемое поведение говорит о том, что мы имеем дело не с классической, а с квантовой системой. Для квантовой системы кинетическая энергия вполне может убывать с ростом температуры. При увеличении температуры связанные электроны в квантовой системе переходят в возбужденные состояния, для которых волновая функция менее локализована вблизи ядра атома, и, согласно принципу неопределенности Шредингера, средняя кинетическая энергия связанных электронов становится меньше, чем в основном состоянии. Таким образом, экспериментальные данные, приведенные на рис. 3, позволяют оценить вклад возбужденных состояний атомов и ионов в термодинамические функции плазмы. Как следует из этого рисунка, модель [10] гораздо лучше согласуется с экспериментом, чем модель [6], однако и она описывает связанные состояния недостаточно точно. Этот вывод подтверждается результатами, которые были получены при учете большего числа уровней для ионов кратности 1 и 2, чем в работе [10] (количество ионов кратности 3 и выше для исследованной области состояний не превышало 1%, и поэтому они не учитывались). Укажем для справки, что значения первых трех потенциалов ионизации атома свинца равны  $I_1 = 3.53$  кДж/г,  $I_2 = 6.95$  кДж/г,  $I_3 = 14.8$  кДж/г [27], а теплота сублимации свинца равна 0.942 кДж/г [28]. Как видно на рис. 3, для значений энергии в интервале 10–15 кДж/г измеренные значения кинетической энергии в 3–5 раз превышают вычисленные значения по модели [10] (по абсолютной величине). Поскольку статистические суммы связанных состояний в модели СР обрезаются не столь сильно, как в приближении ПЛ, мы выполнили расчеты с использованием формулы СР. Мы обозначаем химическую модель с обрезанием по СР как XM3. Как видно на рис. 3, эта модель действительно лучше согласуется с экспериментом, чем XM2 [10]. Однако и в этом случае измеренные значения по абсолютной величине более чем в 2 раза превышают вычисленные значения. Таким образом, рассмотренные нами химические модели плотной плазмы недостаточно точно описывают вклады в термодинамические функции от возбужденных состояний атомов и ионов.

На рис. 4 представлены приращения средней потенциальной энергии флюида свинца как функции приращения внутренней энергии для некоторой группы экспериментов [5] (сплошные линии), ко-

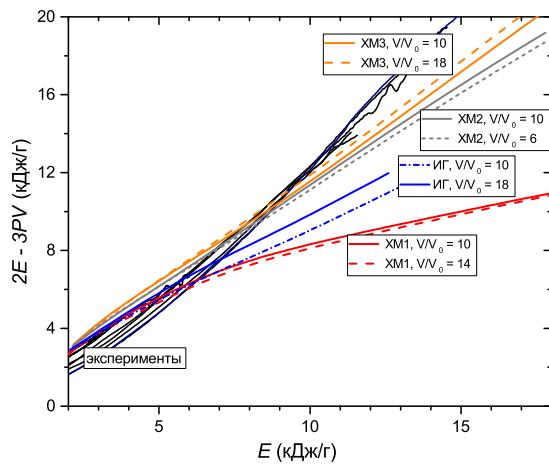


Рис. 4. Приращение средней потенциальной энергии как функция приращения внутренней энергии, полученное для некоторой группы экспериментов [5] (сплошные линии) сравнивается с результатами расчетов. Обозначения те же, что и на рис. 3

которые сравниваются с результатами расчетов. Как оказалось, экспериментальные зависимости идут узким пучком, и поэтому мы приводим здесь не изохоры, а зависимости, измеренные для некоторой группы экспериментов. Отметим, что в экспериментах удельный объем и удельная внутренняя энергия монотонно возрастали, и максимальным значениям энергии для приведенных зависимостей соответствуют значения объема  $V/V_0 = 15-30$ . Поскольку  $E = U + K$ , где  $U$  — средняя потенциальная энергия, величина, приведенная на рис. 4, равна  $U - U_0$ , где  $U_0$  — потенциальная энергия системы в нормальном состоянии. Для идеального газа бесструктурных частиц эта величина тождественно равна нулю. Однако рост потенциальной энергии может быть вызван не только взаимодействием частиц в непрерывном спектре, но и переходом связанных электронов в возбужденные состояния. Как видно на рис. 4, в интервале энергий  $E < 6$  кДж/г все модели несколько завышают потенциальную энергию по отношению к эксперименту, а в интервале  $E > 10$  кДж/г — занижают. Как следует из сравнения зависимостей, полученных для трех химических моделей, с зависимостью для идеального газа (ИГ), результаты расчетов гораздо более чувствительны к способу учета возбужденных состояний атомов и ионов, чем к вкладу в свободную энергию от взаимодействия. Поэтому можно утверждать, что центральной проблемой теории является правильное описание возбужденных состояний атомов и ионов.

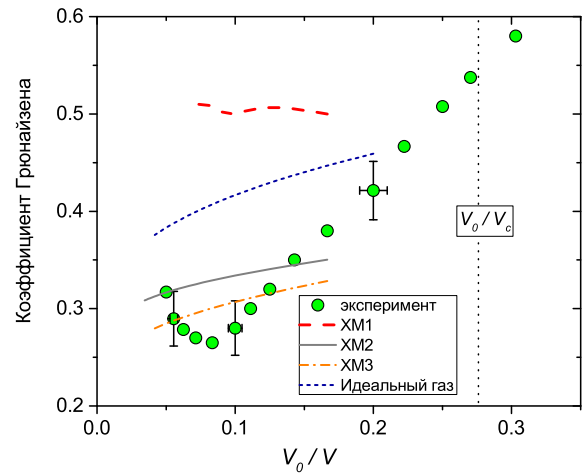


Рис. 5. Коэффициент Грюнаизена флюида свинца как функция относительной плотности. Сравнение измеренных значений [5] с рассчитанными по трем химическим моделям и для идеальной плазмы свинца (см. подпись к рис. 3). Вертикальной пунктирной линией отмечена критическая плотность

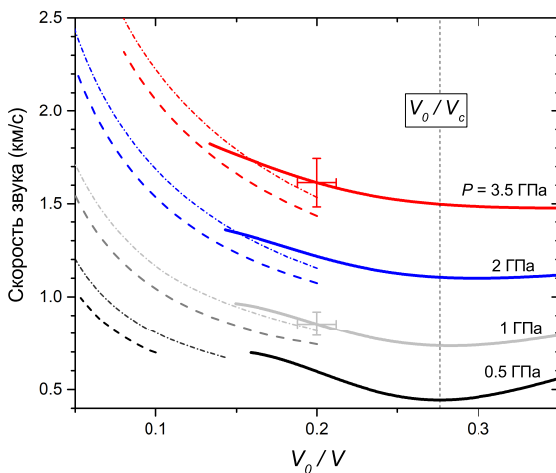
Дифференцируя соотношение (15) по энергии при фиксированном значении объема, получим

$$\left(\frac{\partial K}{\partial E}\right)_V = 3\gamma_G - 1, \quad (16)$$

где  $\gamma_G$  — коэффициент Грюнаизена, который определяется формулой

$$\gamma_G = \left(\frac{\partial PV}{\partial E}\right)_V. \quad (17)$$

Отсюда следует, что существенная разница между рассчитанными и измеренными значениями приращения кинетической энергии, которая наблюдается при отрицательных значениях этого приращения (см. рис. 3), соответствует области состояний, для которой  $\gamma_G < 1/3$ . Как видно на рис. 5, эта область соответствует интервалу плотностей  $V_0/V = 0.04-0.13$ . Химические модели дают для этого интервала более высокие значения  $\gamma_G$ , чем измеренные значения, и поэтому они занижают вклад в энергию от возбужденных состояний. В отличие от эксперимента, который показывает, что коэффициент Грюнаизена имеет минимум вблизи значения плотности  $V_0/V = 0.084$  ( $V/V_0 \approx 12$ ), модели предсказывают монотонное уменьшение  $\gamma_G$  с понижением плотности. Обращаем внимание на тот факт, что зависимость, полученная для идеального газа с обрезанием статистических сумм атома и ионов по модели ПЛ лучше согласуется с экспериментом, чем



**Рис. 6.** Сравнение рассчитанных зависимостей скорости звука для плазмы свинца от относительной плотности на четырех изобарах со значениями, полученными с помощью уравнения состояния [25] (сплошные линии). Штрихпунктирные линии — зависимости, рассчитанные для идеального газа, когда все статистические суммы обрезаются по модели ПЛ, пунктирные линии — по модели ХМ3. Вертикальной пунктирной линией отмечена критическая плотность перехода жидкость–газ

полученная по модели ХМ1 [6]. Это показывает, как уже отмечалось выше, что правильный учет связанных состояний составных частиц химической модели (атомов и ионов) оказывается более важным, чем учет членов в свободной энергии, описывающих взаимодействие между частицами плазмы.

На рис. 6 мы сравниваем рассчитанные для плазмы свинца зависимости скорости звука от относительной плотности на изобарах со значениями, полученными с помощью феноменологического уравнения состояния [25]. Это калорическое уравнение состояния (которое устанавливает зависимость между  $P$ ,  $V$  и  $E$ ) позволяет определять скорость звука флюида свинца с точностью не хуже 10%, однако для ограниченного интервала плотностей  $V_0/V > 0.15$ . Из данных, приведенных на рис. 6, следует, что модель ХМ3 хорошо описывает поведение скорости звука, демонстрируя, однако, при высоких давлениях более быстрый рост с уменьшением плотности. И снова мы видим, что при относительно больших значениях плотности зависимости, полученные для идеального газа, лучше согласуются с экспериментом. Тот факт, что имеется область состояний плотной плазмы, для которой уравнение состояния идеального газа лучше согласуется с экспериментом, чем некоторые химические моде-

ли неидеальной плазмы, давно обсуждается в литературе [29]. Укажем, что в случае плазмы свинца такое поведение имеет место в интервале удельных объемов  $V/V_0 = 5-9$  при давлениях  $P \approx 2$  ГПа ( $T \approx 2$  эВ, согласно ХМ3), а при увеличении давления до 4 ГПа ( $T \approx 3$  эВ) интервал объемов сокращается и составляет  $V/V_0 = 5-6$  (см. рис. 1). Для этой области состояний  $\Gamma_e = 1.2-1.6$ , а  $\Theta = 2-3$ . Для области состояний плазмы, в которой модели ХМ2 и ХМ3 лучше согласуются с экспериментом, чем модель идеального газа, имеют место неравенства  $\Gamma_e < 1.2$ ,  $\Theta > 3$ .

Такое же поведение мы обнаруживаем при сравнении результатов теории и эксперимента по так называемой изоэнтальпической скорости звука. Мы формально называем изоэнтальпической скоростью звука величину

$$c_w = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_w}, \quad (18)$$

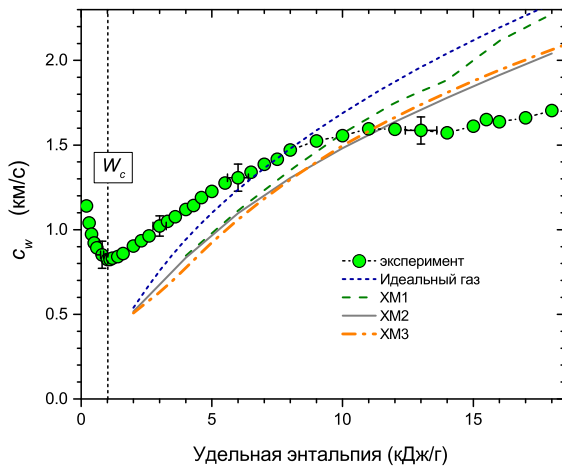
где  $\rho$  — плотность ( $\rho = V^{-1}$ ). Эта величина связана со скоростью звука  $c_s$  (изоэнтропической) соотношением

$$c_s = c_w \sqrt{1 + \gamma_G}. \quad (19)$$

Как следует из данных, приведенных на рис. 7, в интервале энтальпий  $W < 10$  кДж/г все модели занижают величину  $c_w$  по отношению к эксперименту, а в интервале  $W > 12$  кДж/г — завышают ее и, следовательно, завышают скорость звука  $c_s$ . Действительно, в интервале  $V/V_0 > 6$ , который соответствует для экспериментов [5] значениям энтальпии  $W > 2$ , коэффициент Грюнайзена  $\gamma_G$  принимает значения в относительно узком интервале 0.26–0.35. Обратим также внимание на то, что в этом случае модель ХМ2 несколько лучше согласуется с экспериментом, чем ХМ3. Это означает, что в модели ХМ3 вклад от взаимодействия между частицами в свободную энергию не вполне согласован с вкладом от возбужденных состояний, т. е. упругие свойства возбужденных атомов и ионов описываются недостаточно точно.

Как видно на рис. 7, для интервала энтальпий  $W < 10$  кДж/г приближение идеального газа лучше согласуется с экспериментом, чем наши химические модели, учитывающие кулоновское взаимодействие. Основываясь на результатах сравнения, представленных на рис. 1, 4–7, можно утверждать, что если бы функция обрезания уровней возбужденных

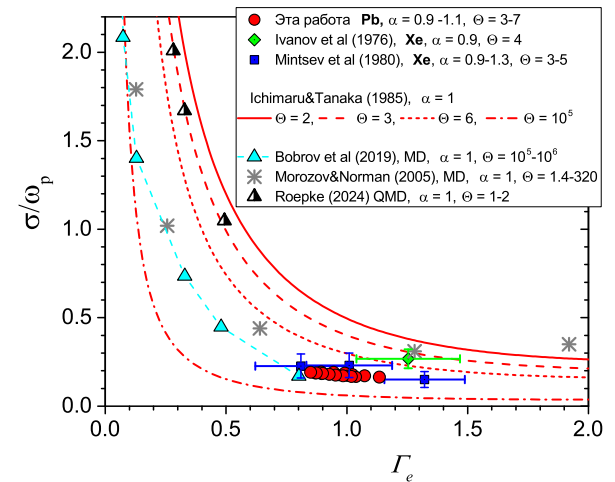




**Рис. 7.** Изоэнтальпическая скорость звука как функция удельной энтальпии. Измеренные значения [5] сравниваются с результатами расчетов по трем моделям и с расчетом для идеальной плазмы (см. обозначения на рис. 3). Вертикальной линией отмечено значение энтальпии в критической точке

состояний, в отличие от формул ПЛ и СР, зависела не только от температуры, но и от плотности, и при этом при большей плотности обрезание было бы более сильным, чем в формуле ПЛ, а при уменьшении плотности, это обрезание было бы слабее, чем по формуле СР, то это позволило бы получить лучшее согласие с экспериментом.

Для исследования неидеальной плазмы, которая существует при температурах и давлениях, не достижимых в статических экспериментах, очень важно сравнить экспериментальные данные, полученные в существенно различных динамических экспериментах, поскольку это позволяет оценить их точность. Такое сравнение, как уже отмечалось во Введении, можно провести для безразмерной электропроводности. При этом основной интерес вызывают данные по электропроводности при больших значениях параметра взаимодействия, при которых разные теории предсказывают весьма отличающиеся друг от друга значения электропроводности [30]. На рис. 8 показана зависимость безразмерного отношения  $\sigma/\omega_p$  от параметра взаимодействия  $\Gamma_e$ , где  $\sigma$  — проводимость, а  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2/m}$  — плазменная частота ( $m$  — масса электрона). Измеренные значения проводимости неидеальной плазмы свинца [5] приведены для относительно узкого интервала значений степени ионизации  $\alpha = 0.9$ – $1.1$ . Дело в том, что в литературе данные по зависимости ку-



**Рис. 8.** Зависимости безразмерной проводимости от параметра кулоновской неидеальности. Красные кружки показывают значения проводимости, измеренные в работе [5], в которой температура и степень ионизации рассчитывались с помощью модели XM3. Эти значения сравниваются с результатами измерений [15] (зеленый ромб) и [14] (синие квадраты), а также с результатами расчетов в работе [31] (красные линии) и в рамках молекулярной динамики [30] (черно-белые треугольники), [32] (голубые треугольники и соединяющие их линии для наглядности), [33] (звездочки)

лоновской части электропроводности от параметра взаимодействия получены, в том числе и из экспериментов, в которых степень ионизации плазмы была существенно ниже единицы, и поэтому приходилось выделять из измеренных значений электропроводности кулоновскую часть, связанную с рассеянием электронов только на ионах и электронах. При этом использовались различные модели для описания рассеяния электронов на атомах, ионах и электронах, а также модели для расчета состава плазмы. Это, разумеется, вносит погрешность в определение кулоновской части электропроводности. Поэтому мы приводим данные измерений электропроводности для узкого интервала значений степени ионизации вблизи значения  $\alpha = 1$ . Как видно на рис. 8, экспериментальные данные, полученные для неидеальной плазмы свинца в экспериментах по электроудару фольг [5], в пределах погрешности измерений согласуются с экспериментальными данными работ [14,15], полученными при ударном сжатии ксенона. Для обоих наборов данных три параметра, характеризующих плазму, а именно  $\alpha$ ,  $\Gamma_e$  и  $\Theta$ , имеют близкие значения. Отметим, что мы оцениваем погрешность в приведенных значениях безразмерной проводимости для экспериментальных данных [5] (с

учетом погрешностей расчета температуры и степени ионизации) порядка размера кружков, которые представляют эти данные на рис. 8, а погрешность в значениях  $\Gamma_e$  не хуже 10 %.

Как видно на рис. 8, расчеты [31] плохо согласуются с экспериментальными данными [5], предсказывая для  $\Theta = 3-7$ ,  $\Gamma_e \approx 1$  значения проводимости в 2–3 раза выше измеренных значений. Обращает на себя внимание то, что при малых значениях  $\Gamma_e$  теоретические расчеты хорошо согласуются друг с другом, однако уже при значениях  $\Gamma_e > 0.1$  результаты классической молекулярной динамики [32] не согласуются с расчетами [31], а при значениях  $\Gamma_e > 0.5$  — и с результатами моделирования [33]. Значения проводимости, полученные на основании результатов моделирования плазмы водорода с использованием квантовой молекулярной динамики [30], вполне согласуются с результатами работы [31].

Таким образом, приведенное на рис. 8 сравнение показывает, что эксперименты позволяют измерять с удовлетворительной точностью проводимость неидеальной плазмы, для которой параметр неидеальности достигает значений  $\Gamma_e \approx 1$ . Результаты наших расчетов показали, что плазма свинца со степенью ионизации  $\alpha = 0.9-1.1$ , для которой приведены значения проводимости, состоит не только из свободных электронов и однозарядных ионов, но также из нейтральных атомов в количестве 10–20 % от общего числа исходных атомов и двукратно ионизованных атомов в количестве 5–20 %. Таким образом, эта система отличается от идеализированных систем, рассматриваемых в теоретических работах [30–33], где имеется один свободный электрон на каждый атом плазмы и нет ни нейтральных атомов, ни ионов кратности больше, чем 1. В связи с этим можно утверждать, что отличие теоретических значений электропроводности от экспериментальных для плазмы свинца со степенью ионизации  $\alpha \approx 1$  может быть вызвано тем, что, во-первых, в этой плазме все же остается некоторое количество нейтральных атомов, которые, как показано в этой работе, находятся в сильно возбужденном состоянии и поэтому могут оказать заметное влияние на проводимость, и, во-вторых, в заметном количестве присутствуют ионы кратности 2.

#### 4. ВЫВОДЫ

Установлено, что химическая модель плазмы, построенная на основании разложения термодинамического потенциала в ряд по степеням активностей

с точностью до второго порядка, имеет весьма широкую область применимости на плоскости удельный объем–давление. Она качественно описывает поведение термодинамических функций сверхкритического флюида свинца при давлениях в интервале 3–20 от критического значения, уже начиная от значений удельного объема в 1.5–2 раза больших, чем значение в критической точке (и при еще больших значениях). Показано, что экспериментальные данные, полученные для плотной плазмы свинца, совместно с использованием теоремы вириала позволяют установить, насколько правильно теоретические модели разделяют внутреннюю энергию на кинетическую и потенциальную, а это, в свою очередь, дает возможность прямо оценить точность учета связанных состояний в этих моделях. Показано, что данная модель лучше согласуется с экспериментом, если использовать для статистических сумм атомов и ионов вместо формулы Планка–Ларкина [11, 16] формулу, предложенную Старостиным и Рерихом [18]. Обнаружено, что имеется интервал удельных объемов, в котором вклад от возбужденных состояний в энергию плазмы максимален, и для этого интервала, даже при использовании формулы Старостина–Рериха, модель занижает вклад во внутреннюю энергию от возбужденных состояний более чем в 2 раза по отношению к измеренным значениям. Экспериментальные данные свидетельствуют, что обрезание статистических сумм должно зависеть не только от температуры, как это имеет место в указанных формулах, но и от плотности. Наконец, установлено, что измеренные в экспериментах по электровзрыву фольг значения проводимости неидеальной плазмы свинца при значениях параметра неидеальности и степени ионизации плазмы, близких к единице, хорошо согласуются с результатами, полученными в ударно-волновых экспериментах для плазмы ксенона. При этом результаты теоретических расчетов в 2–3 раза завышают величину проводимости такой плазмы. Таким образом, настоящая работа показывает, что имеющиеся экспериментальные данные позволяют уточнить теорию неидеальной плазмы.

**Финансирование.** Данная работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Государственное задание № 075-00270-26-00).

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов.** Вклад авторов равноценен.

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. E. Fortov, A. G. Khrapak, and I. T. Yakubov, *Physics of Nonideal Plasma*, Fizmatlit, Moscow (2010), in Russian [В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, И. Т. Якубов, *Физика неидеальной плазмы*, Физматлит, Москва (2010)].
2. W. Ebeling and G. Röpke, *Contrib. Plasma Phys.* **65**, e70009 (2025).
3. A. M. Kondratyev, V. N. Korobenko, and A. D. Rakhel, *J. Exp. Theor. Phys.* **127**, 1074 (2018) [А. М. Кондратьев, В. Н. Коробенко, А. Д. Рахель, *ЖЭТФ* **154**, 1168 (2018)].
4. A. V. Ivanov, A. M. Kondratyev, and A. D. Rakhel, *Phys. Rev. B* **113**, 014117 (2026).
5. E. M. Apfelbaum, A. M. Kondratyev, and A. D. Rakhel, *Zh. Eksp. Teor. Fis.* **165**, 876 (2024) [Е. М. Апфельбаум, А. М. Кондратьев, А. Д. Рахель, *ЖЭТФ* **165**, 876 (2024)].
6. E. M. Apfelbaum, *Contrib. Plasma Phys.* **61**, e202100063 (2021).
7. A. A. Likalter, *Sov. Phys. JETP* **29**, 133 (1969) [А. А. Ликальтер, *ЖЭТФ* **56**, 240 (1969)].
8. V. K. Gryaznov, I. L. Iosilevskiy, and V. E. Fortov, in *High-Pressure Shock Compression of Solids VII. Shock Waves and Extreme States of Matter*, Springer, Hannover (2004), p. 437.
9. V. K. Gryaznov, S. V. Ayukov, V. A. Baturin, I. L. Iosilevskiy, A. N. Starostin, and V. E. Fortov, *AIP Conf. Proc.* **731**, 147 (2004).
10. A. S. Shumikhin, *Eur. Phys. J. D* **79**, 112 (2025).
11. L. Brillouin, *Les Statistiques Quantiques*, Les Presses Universitaires de France, (1930) [Л. Бриллюэн, *Квантовая статистика*, ГНТИУ, Харьков-Киев (1934)].
12. V. A. Baturin, S. V. Ayukov, A. V. Oreshina, A. B. Gorshkov, V. K. Gryaznov, I. L. Iosilevskiy, and W. Däppen, *Sol. Phys.* **300**, 3 (2025).
13. G. Röpke, M. Schörner, R. Redmer, and M. Bethkenhagen, *Phys. Rev. E* **104**, 045204 (2021).
14. V. B. Mintsev, V. E. Fortov, and V. K. Gryaznov, *Sov. Phys. JETP* **52**, 59 (1980) [В. Б. Минцев, В. Е. Фортов, В. К. Грязнов, *ЖЭТФ* **79**, 116 (1980)].
15. Yu. V. Ivanov, V. B. Mintsev, V. E. Fortov, and A. N. Dremin, *Sov. Phys. JETP* **44**, 112 (1976) [Ю. В. Иванов, В. Б. Минцев, В. Е. Фортов, А. Н. Дремин, *ЖЭТФ* **71**, 216 (1976)].
16. A. I. Larkin, *Sov. Phys. JETP* **11**, 1363 (1960) [А. И. Ларкин, *ЖЭТФ* **38**, 1896 (1960)].
17. G. E. Norman and A. N. Starostin, *High Temp.* **8**, 381 (1970) [Г. Э. Норман, А. Н. Старостин, *ТВТ* **8**, 413 (1970)].
18. A. N. Starostin and V. C. Roerich, *J. Exp. Theor. Phys.* **100**, 165 (2005) [А. Н. Старостин, В. К. Рерих, *ЖЭТФ* **127**, 186 (2005)].
19. <http://physics.nist.gov>
20. T. L. Hill, *Statistical Mechanics. Principles and Selected Applications*, McGraw-Hill, New York (1956).
21. I. A. Mulencko, V. B. Solovei, A. L. Khomkin, and V. N. Tsurkin, *High Temp.* **37**, 494 (1999) [И. А. Муленко, В. Б. Соловей, А. Л. Хомкин, В. Н. Цуркин, *ТВТ* **37**, 518 (1999)].
22. A. L. Khomkin and A. S. Shumikhin, *High Temp.* **50**, 307 (2012) [А. Л. Хомкин, А. С. Шумихин, *ТВТ* **50**, 329 (2012)].
23. V. K. Gryaznov, M. V. Zhernokletov, V. N. Zubarev, I. L. Iosilevskii, and V. E. Fortov, *Sov. Phys. JETP* **51**, 288 (1980) [В. К. Грязнов, М. В. Жерноклетов, В. Н. Зубарев, И. Л. Иосилевский, В. Е. Фортов, *ЖЭТФ* **78**, 573 (1980)].
24. A. L. Khomkin and A. S. Shumikhin, *High Temp.* **52**, 328 (2014) [А. Л. Хомкин, А. С. Шумихин, *ТВТ* **52**, 335 (2014)].
25. A. M. Kondratyev and A. D. Rakhel, *Phys. Rev. B* **107**, 195134 (2023).
26. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1*, Pergamon Press, Oxford (1980) [Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. V, *Статистическая физика*, ч. I, Физматлит, Москва (2002)].
27. *Tables of Physical Quantities*, ed. by I. K. Kikoin, Atomizdat, Moscow (1976), in Russian [Таблицы физических величин. Справочник, под ред. И. К. Кикина, Атомиздат, Москва (1976)].
28. L. V. Gurvich, I. V. Veyts, V. A. Medvedev et al., *Thermodynamic Properties of Individual Substances*, Nauka, Moscow (1979), in Russian [Л. В. Гурвич, И. В. Вейц, В. А. Медведев и др., *Термодинамические свойства индивидуальных веществ*, Наука, Москва (1979)].
29. A. L. Khomkin and A. S. Shumikhin, *J. Exp. Theor. Phys.* **136**, 541 (2023) [А. Л. Хомкин, А. С. Шумихин, *ЖЭТФ* **163**, 609 (2023)].
30. G. Röpke, *Phys. Plasmas* **31**, 042301 (2024).

31. S. Ichimaru, H. Iyetomi, and S. Tanaka, Phys. Rep. **149**, 91 (1987).  
 32. A. A. Bobrov, A. M. Bunkov, S. Y. Bronin, A. B. Klyarfeld, B. B. Zelener, and B. V. Zelener, Phys. Plasmas **26**, 082102 (2019).  
 33. I. V. Morozov and G. E. Norman, J. Exp. Theor. Phys. **100**, 370 (2005) [И. В. Морозов, Г. Э. Норман, ЖЭТФ **127**, 412 (2005)].

## Thermodynamic Functions and Electrical Conductivity of Non-Ideal Plasma

*A. V. Ivanov, A. D. Rakhel\*, A. S. Shumikhin*

Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences  
 125412, Moscow, Russia

\*E-mail: rakhel@ihed.ras.ru

Received June 21, 2026

Revised July 20, 2026

Accepted July 23, 2026

### Abstract

Using a chemical model based on the activity expansion of the thermodynamic potential, we calculated thermodynamic functions of dense lead plasma characterized by the degree of ionization and the Coulomb nonideality parameter of  $\sim 1$ . To determine the limits of the model's applicability, we compared these results with the recent data from exploding foil experiments that studied the properties of supercritical lead fluid. It is shown that the model has a fairly wide range of applicability and qualitatively describes the behavior of thermodynamic functions of the fluid over a range of specific volumes, starting from the values comparable to the critical volume of the liquid–gas transition (and at the larger values). In addition, the use of the formula proposed by Starostin and Roerikh for the partition functions of atoms and ions, instead of the Planck–Larkin formula, made it possible to obtain better agreement with the experiment. It was found that there is a range of specific volumes in which the contribution from excited states of the plasma species to the internal energy is maximum, and for this range, the model significantly underestimates this contribution. Experimental data indicate that the cutoff of the partition functions should depend not only on temperature, as in the above-mentioned formulas, but also on density. Finally, it was found that the electrical conductivity values measured in the exploding foil experiments for the non-ideal lead plasma, characterized by the nonideality parameter of  $\sim 1$ , are in good agreement with the data on the electrical conductivity of non-ideal inert gas plasmas obtained in experiments with shock waves. This allowed us to evaluate the accuracy of the experimental data on such plasma, as well as the accuracy of theoretical calculations of its electrical conductivity.

**Keywords:** chemical model, non-ideal plasma, Grüneisen coefficient, speed of sound, virial theorem, electrical conductivity, equation of state, excited bound states

**Funding.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Assignment No. 075-00270-26-00).

**Conflicts of interest.** The authors declare that they have no conflicts of interest.

**Authors' contributions.** The contributions of the authors are equal.