

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОВОДИМОСТИ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РЭЛЕЯ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ МЕТАЛЛ–ДИЭЛЕКТРИК. ГРАНИЦЫ КРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

*Б. Я. Балагуров**, *О. А. Васильев***

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 декабря 2025 г.,
после переработки 12 февраля 2026 г.
Принята к публикации 16 марта 2026 г.

Проведено исследование эффективной проводимости двумерной модели Рэля численным методом мультипольного разложения. Модель Рэля представляет собой изотропную проводящую матрицу с периодически расположенными включениями круглой формы с пониженной проводимостью. Как сама проводимость, так и ее производные определены в широком интервале изменения концентрации и отношения проводимостей компонент. Показано, что в критической области (окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик) вычисленные значения проводимости и ее производных с приемлемой точностью совпадают с соответствующими результатами, полученными ранее в рамках бинарного приближения. Проведенное сравнение численных и аналитических результатов позволило определить границы критической области. Также определена область применения мультипольного разложения.

Ключевые слова: композитные материалы, усредненная проводимость, фазовые переходы, мультипольное разложение, бинарное приближение

DOI: 10.31857/S0044451026040044

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная модель Рэля, предложенная в работе [1], представляет собой изотропную матрицу с круговыми включениями, центры которых расположены в узлах квадратной решетки. Исследование проводимости этой модели представляет интерес для физики низкоразмерных композиционных материалов. Теоретическое изучение двумерной модели Рэля впервые, по-видимому, проведено в работе [2], где исходная задача — нахождение проводимости — сведена к решению бесконечной системы линейных уравнений для некоторых переменных ξ_n , через которые и выражается проводимость модели.

В дальнейшем аналогичный подход использовался в ряде работ [3–7]. В работе [6] проводимость периодической решетки цилиндров была исследована методом возмущений. В работе [7] изучалась анизо-

тропная проводимость прямоугольного массива цилиндров. Результаты для решеток обобщенной формы приведены в [8], где рассматривались различные обобщения этой модели.

Эта же задача изучения двумерной модели Рэля решалась другим методом [9] путем введения комплексного потенциала. Данные подходы использовали по существу мультипольное разложение потенциала задачи. Методы работ [2] и [9] применялись при рассмотрении проводимости различных моделей, отличающихся от модели Рэля некоторыми модификациями (см. монографию [10] и цитированную в ней литературу).

Примером перехода металл–диэлектрик служит переход Мотта [11], когда изменение проводимости может достигать нескольких порядков [12] (см. также детальный обзор [13]). Обсуждение проводимости неоднородной среды также дано в монографии [14]. Эта проблема является актуальной, например, из-за неоднородностей, возникающих в высокотемпературных сверхпроводниках [15, 16]. В таких системах при приближении к критической точке в проводящей матрице возникают сверхпрово-

* E-mail: byabalagurov@mail.ru

** E-mail: ol.vasilyev@mail.ru

дящие «островки». В работе [17] была исследована диэлектрическая проницаемость как функция давления и температуры для квазидвумерного органического материала κ -(BEDT-TTF)₂-Cu₂(CN)₃, в котором происходит переход Мотта. Было продемонстрировано существование металлических островков в матрице непроводящего материала. Результаты эксперимента по исследованию перехода металл–диэлектрик в другом органическом квазидвумерном металле κ -(BEDT-TTF)₂Hg(SCN)₂Br приведены в недавней работе [18]. В статье [19] показано, что фазовый переход первого рода между сверхпроводящим состоянием и состоянием с волнами зарядовой/спиновой плотности сопровождается пространственным разделением фаз. В экспериментах по переходу металл–диэлектрик в квазидвумерных органических материалах обычно давление и температура являются параметрами, меняющими проводимость [20].

При некоторых предельных параметрах (концентрации c включений и отношении h проводимостей компонент) в двумерной модели Рэля происходит фазовый переход типа металл–диэлектрик, изучение которого представляет общефизический интерес. Поведение эффективных характеристик в композициях в области фазового перехода является довольно сложным, что затрудняет их теоретическое изучение. Тем не менее в работе [21] было предложено так называемое бинарное приближение, сводящее задачу о проводимости двумерной модели Рэля к проблеме протекания тока через пару соседних включений. Дальнейшее развитие метода бинарного приближения и результаты его применения изложены в работах [22, 23]. Особенностью этого приближения является то обстоятельство, что его точность тем выше, чем ближе параметры модели к точке фазового перехода. Поэтому аналитический результат для проводимости, полученный в этом приближении, будет применим в критической области. Справедливость этого утверждения должна быть проверена путем прямого расчета проводимости модели численным методом, использующим регулярный подход [2, 9].

В работе [24] был проведен численный эксперимент по изучению зависимости проводимости двумерной модели Рэля от аргумента h при фиксированной концентрации $c = c_0$, где $c_0 = \pi/4$ — критическая концентрация включений, соответствующая соприкосновению соседних кругов. Сравнение численных результатов с аналитическими доказало справедливость теоретического предсказания работы [21] в некотором интервале параметра h и

позволило определить ее границу h_c . Установлено также, что в пределах упомянутого интервала теоретическое (бинарное приближение) и экспериментальное (численный счет) значения проводимости с хорошей точностью совпадают во всех деталях, включая численные коэффициенты. В следующей работе [25] изучалась зависимость проводимости модели от другого аргумента g , непосредственно связанного с концентрацией включений c : $g = \sqrt{(c_0 - c)/c_0}$. Здесь также было подтверждено существование критической области в некотором диапазоне параметра g и определена ее граница g_c . В диапазоне концентрации g , соответствующей критической области, экспериментальные и теоретические данные для проводимости также совпадают. Результаты работ [24, 25] взаимно дополняют друг друга.

В настоящей работе изучалось численным методом поведение проводимости в окрестности третьей части границы. С этой целью был проведен ряд численных экспериментов с изучением зависимостей проводимости и ее производных от полярного радиуса ρ вдоль лучей, исходящих из начала координат (см. ниже вставку на рис. 1). В каждом таком случае из сравнения с соответствующей теоретической зависимостью определялось критическое значение ρ_c . Совокупность точек ρ_c при заданных углах θ воспроизводит часть границы критической области в виде дуги между величинами h_c и g_c . Этот результат вместе с соответствующими данными из работ [24, 25] позволил установить всю границу критической области и тем самым ее форму и размер. Следует ожидать, что в пределах этой области аналитическое выражение для проводимости из [21] с приемлемой точностью воспроизводит реальную проводимость модели.

2. КРИТИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ

Двумерная модель Рэля представляет собой матрицу — изотропную пленку проводимости σ_1 — с включениями круговой формы радиуса R и проводимости σ_2 . Центры включений расположены в узлах квадратной решетки периода $2a$. Такая система электрически изотропна, и ее эффективная проводимость является скалярной величиной, $\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2)$, где $p = 1 - \pi R^2/4a^2$ — концентрация (доля занимаемой площади) первой компоненты — матрицы. Для дальнейшего удобно ввести безразмерную проводимость $f(g, h)$ по соотношению

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 f(g, h). \quad (1)$$

Здесь, как обычно, $h = \sigma_2/\sigma_1$, а g — величина, непосредственно связанная с концентрацией:

$$g = \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{c}{c_0}} = 2\sqrt{\frac{p - p_c}{\pi}}, \quad (2)$$

где $c = \pi R^2/4a^2$ — концентрация второй компоненты (включений), $c_0 = \pi/4$ — ее критическое значение для первой компоненты — матрицы. При $g \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ проводимость рассматриваемой модели стремится к нулю: $f(0, 0) = 0$. Таким образом, в двумерной модели Рэля может происходить фазовый переход типа металл–диэлектрик.

Безразмерная проводимость $f(g, h)$ как функция двух переменных в декартовых координатах (g — абсцисса, h — ордината) определена в квадрате $0 \leq g \leq 1, 0 \leq h \leq 1$. При этом начало координат совпадает с точкой фазового перехода. Окрестность этой точки представляет собой критическую область, внутри которой зависимость проводимости от параметров g и h имеет нестандартный характер. Аналитическое выражение для $f(g, h)$ в критической области найдено в бинарном приближении в работе [21]. Это приближение становится точным в пределе $h \rightarrow 0$ и $g \rightarrow 0$, так что его результат может быть использован в критической области, границы которой должны быть определены. Согласно [23], в этой области для эффективной проводимости $f(p, h)$ имеем следующее выражение:

$$f(p, h) = \frac{g}{\pi} + \frac{2h}{\pi} \left[\ln \frac{1}{g} - F(\gamma) \right], \quad \gamma = \frac{h}{g}, \quad (3)$$

где

$$F(\gamma) = -\gamma \int_0^\infty e^{-\gamma x} \ln(1 - e^{-x}) dx. \quad (4)$$

Дополнительную информацию о фазовом переходе дает исследование производных от проводимости $f(g, h)$ по ее аргументам:

$$\frac{\partial f(g, h)}{\partial h} = \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \frac{1}{g} - F(\gamma) - \gamma F'(\gamma) \right\}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial f(g, h)}{\partial g} = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \{ \gamma - \gamma^2 F'(\gamma) \}. \quad (6)$$

Здесь $F'(\gamma)$ — производная $dF(\gamma)/d\gamma$. Использование формул (3)–(6) в работах [24, 25] позволило определить границы критической области вдоль осей координат: $0 \leq g \leq g_c$ вдоль оси абсцисс и $0 \leq h \leq h_c$ вдоль оси ординат.

Целью настоящей работы является определение части границы в виде дуги, соединяющей точки $(0, h_c)$ и $(g_c, 0)$. Для этого рассмотрим поведение

проводимости и ее производных вдоль лучей, исходящих из начала координат (см. вставку на рис. 1). Введем полярные координаты согласно

$$g = \rho \cos \theta, \quad h = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (7)$$

Угол θ принимает следующие значения:

$$\theta_n = n \frac{\pi}{24}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 11, 12. \quad (8)$$

В этих координатах из формул (3), (5) и (6) имеем ($h = \rho \sin \theta$)

$$\frac{f(g, h)}{\rho \sin \theta} = \frac{1}{\pi} \{ \text{ctg } \theta - 2 \ln \cos \theta - 2F(\text{tg } \theta) \} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\rho}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial f(g, h)}{\partial h} = -\frac{2}{\pi} \{ \ln \cos \theta + F(\text{tg } \theta) + \text{tg } \theta F'(\text{tg } \theta) \} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\rho}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial f(g, h)}{\partial g} = \frac{1}{\pi} \{ 1 - 2\text{tg } \theta + 2\text{tg}^2 \theta F'(\text{tg } \theta) \}. \quad (11)$$

Значения функций $F(\text{tg } \theta)$ и $F'(\text{tg } \theta)$ при углах θ_n из (8) представлены в таблице.

3. МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Способ вычисления проводимости при малой концентрации включений был предложен в работе [1]. Последовательное применение этого подхода позволило дать в работе [2] регулярную процедуру вычисления проводимости при произвольных концентрациях, сводящую исходную проблему к решению бесконечной системы линейных уравнений для некоторых величин ξ_n . Определение величин ξ_n из этой системы дает принципиальную возможность вычислить проводимость модели во всем интервале изменения входящих в задачу параметров. К таким же результатам привело рассмотрение этой проблемы в работе [9] другим методом — путем введения комплексного потенциала. В [9] показано, что через величину ξ_n как решение упомянутой системы уравнений выражается не только сама проводимость, но и производные по ее аргументам. Такой комплексный численный эксперимент позволяет получить более полную информацию о свойствах модели. Согласно [2, 9], неизвестные ξ_n подчиняются следующей бесконечной системе уравнений:

$$\xi_n + \sum_{m=0}^{\infty} S_{nm} \xi_m = \delta_{n0}, \quad (12)$$

Таблица. Значения функции $F(\theta_n)$ и ее производной $F'(\theta_n)$ (округлено до 5 цифр после десятичной точки) а также границы $\ln(1/\rho_c(n))$ и $\ln(1/\rho_m(n))$ критической области (округлено до 3 цифр) для разных значений параметра $\theta_n = n\pi/24$

n	$F(\theta_n)$	$F'(\theta_n)$	$\ln(1/\rho_c(n))$	$\ln(1/\rho_m(n))$
0	0	1.64493	4.112	11.925
1	0.19792	1.37656	5.004	12.348
2	0.37104	1.17394	5.509	12.605
3	0.53031	1.01148	5.844	12.802
4	0.68364	0.87466	6.086	12.961
5	0.83784	0.75448	6.270	13.090
6	1	0.64493	6.412	13.194
7	1.17900	0.54161	6.522	13.279
8	1.38823	0.44099	6.607	13.345
9	1.65163	0.33991	6.670	13.395
10	2.02221	0.23521	6.713	13.430
11	2.66919	0.12337	6.738	13.451
12	0	0	6.774	13.458

где δ_{n0} — символ Кронекера. В формуле (12) учтено, что $S_{00} = 0$, см. ниже. Матрица S_{nm} имеет вид

$$S_{nm} = \varkappa \lambda^{n+m+1} Q_{nm}, \quad (13)$$

где

$$\varkappa = \frac{1-h}{1+h}, \quad \lambda = \frac{R^2}{a^2} = 1 - g^2 = \frac{c}{c_0}, \quad c_0 = \frac{\pi}{4}, \quad (14)$$

$$Q_{nm} = \frac{(2n+2m)!c_{n+m+1}}{\sqrt{(2n)!(2n+1)!(2m)!(2m+1)!}}, \quad (15)$$

c_{n+m+1} — коэффициенты в разложении функции Вейерштрасса $\zeta(z)$ в окрестности точки $z = 0$. Согласно [26], для рассматриваемой квадратной решетки (лемнискатный случай) коэффициенты c_n с нечетным индексом равны нулю, так что величина S_{nm} отлична от нуля только в том случае, когда индексы « m » и « n » имеют разную четность. При этом $c_2 = 0.590852\dots$ и $c_4 = 0.116368\dots$, а остальные коэффициенты c_{2k} при $k > 2$ могут быть последовательно найдены с помощью рекуррентного соотношения

$$c_{2k} = \frac{3}{(4k+1)(2k-3)} \sum_{m=1}^{k-1} c_{2m}c_{2k-2m}. \quad (16)$$

В полярных координатах матрица S_{nm} сохраняет вид (13), где в данном случае

$$\varkappa = \frac{1 - \rho \sin \theta}{1 + \rho \sin \theta}, \quad \lambda = 1 - \rho^2 \cos^2 \theta. \quad (17)$$

Решение уравнений (12) с матрицей S_{nm} , определенной в (13) и (14), позволяет найти эффективную проводимость модели по формуле

$$f(g, h) = \frac{1 - c\varkappa\xi_0}{1 + c\varkappa\xi_0} \quad (18)$$

с \varkappa из (14) и

$$c = \frac{\pi}{4}(1 - \rho^2 \cos^2 \theta). \quad (19)$$

Как отмечено выше, в ходе численного эксперимента полезно находить не только саму проводимость, но и ее производные по формулам

$$\frac{\partial f(g, h)}{\partial h} = \frac{4c}{(1+h)^2} \frac{1}{(1+c\varkappa\xi_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2, \quad (20)$$

$$\frac{\partial f(g, h)}{\partial g} = \frac{\pi g \varkappa}{(1+c\varkappa\xi_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\xi_n^2 \quad (21)$$

с теми же, что и выше, значениями величин h, g, c, \varkappa в полярных координатах. В (21) учтено, чтоб в соответствии с (2)б $dp/dg = (\pi/2)g$.

Определение производных по этим формулам позволяет избежать численного дифференцирования, особенно затруднительного в критической области — окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик.

Для определения проводимости $f(g, h)$ и ее производных при заданных g и h в рамках мультипольного разложения необходимо выбрать конечную подсистему величин ξ_n ($n = 0, 1, 2, \dots, N$). Выбор величины N в общем случае зависит от минимальных размеров параметров h и g , а также от необходимой точности вычислений. При этом величина N тем больше, чем ближе параметры h и g к точке фазового перехода. Так, в работе [24] при исследовании зависимости проводимости от параметра h при фиксированной (критической) концентрации использовалась подсистема размера $N = 200000$. Такого же размера подсистема использовалась в настоящей работе.

4. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сравнение аналитических (разд. 2) и полученных в работе численных результатов для проводимости модели Рэлея приведено на рис. 1. На этом рисунке эффективная проводимость f построена как функция переменной $\ln(1/\rho)$ для фиксированных значений угла θ_n . На вставке схематически показаны лучи $\theta_n = n\pi/24$, вдоль которых расположены

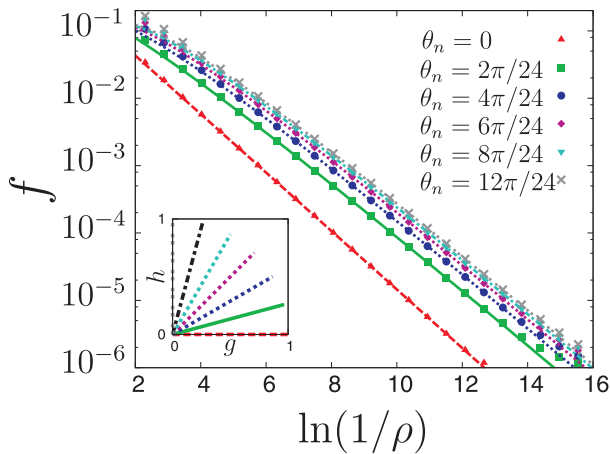


Рис. 1. Значения проводимости f как функция переменной $\ln(1/\rho)$, полученные методом мультипольного разложения (формула (18), символы) и теоретические результаты (формула (9), линии). На вставке схематически изображены лучи $g = \rho \cos \theta_n$ и $h = \rho \sin \theta_n$, вдоль которых проводились вычисления в плоскости (g, h)

точки, для которых проводились вычисления. Поскольку критической точке соответствует значение $\rho = 0$, на рис. 1 окрестность критической точки описывается большим значением переменной $\ln(1/\rho)$. Мы видим, что в этой области проводимость стремится к нулю по закону

$$f \propto \rho \left[A(\theta) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\rho} \right],$$

где ρ — расстояние до критической точки, а A является функцией полярного угла θ .

Можно заметить, что при больших значениях переменной $\ln(1/\rho) \geq 13$ результаты численного мультипольного разложения (символы) начинают отличаться от точных в этой области аналитических результатов (линии). При малых значениях переменной $\ln(1/\rho) \leq 4$, вдали от критической точки, уже теоретические результаты становятся некорректными. Точное определение границ критической области (где численные и аналитические результаты совпадают) приведено далее в тексте.

Ранее [24] проводимость и ее производные были исследованы как функции переменной h для критической концентрации $g = 0$, $\theta = \pi/2 = 12\pi/24$ (вертикальный луч на вставке, данные на рис. 1 обозначены крестиками). В работе [25] эти величины были исследованы для диэлектрических включений $h = 0$ как функции концентрации g (горизонтальный луч $\theta = 0$ на вставке, данные на рис. 1 обозначены треугольниками). В данной работе проводимость и ее производные исследованы во всей плоскости

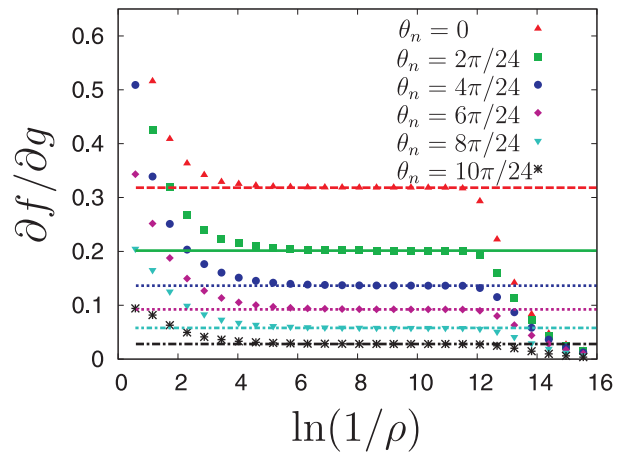


Рис. 2. Значения производной $\partial f/\partial g$ как функция переменной $\ln(1/\rho)$, полученные методом мультипольного разложения (формула (21), символы) и теоретические результаты (формула (11), горизонтальные линии)

параметров (g, h) . Основным результатом является определение границ критической области, в которой теоретические результаты (уравнения (9)–(11)) совпадают с численными результатами мультипольного разложения (уравнения (18), (20) и (21)). Таким образом продемонстрировано, что в критической области аналитические формулы точно описывают проводимость модели Рэля и производные проводимости.

На рис. 2 сравниваются зависимости теоретических (линии) и численных (символы) результатов для производной $\partial f/\partial g$ от аргумента $\ln(1/\rho)$ для шести лучей, т. е. при шести значениях угла θ . Для упрощения картинки на этом рисунке не представлены аналогичные данные для остальных лучей. Смысл зависимостей, представленных на рис. 2, следующий: по мере роста аргумента $\ln(1/\rho)$ (уменьшения величины ρ) результаты численного исследования приближаются к теоретическим зависимостям, совпадая с ними в точке $\ln(1/\rho_c)$, так что ρ_c является границей критической области. Это совпадение продолжается до точки $\ln(1/\rho_m)$, и далее кривые расходятся. Здесь ρ_m является порогом применимости численного метода.

Визуальное определение границы $\ln(1/\rho_c)$ по рисункам типа 1, 2 позволяет дать качественную, по порядку величины, оценку порога ρ_c . Прежде чем придать процедуре определения значений ρ_c и ρ_m последовательный и количественный характер, учтем следующее обстоятельство. В интервале совпадения теоретических и численных данных, $\ln(1/\rho_c) \leq \ln(1/\rho) \leq \ln(1/\rho_m)$, строгого равенства между теоретическими и экспериментальными кри-

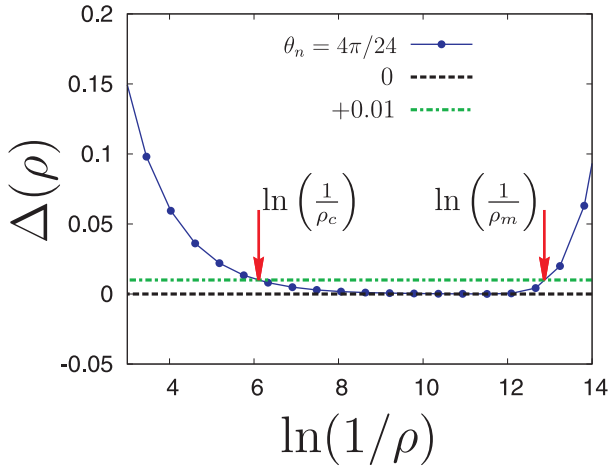


Рис. 3. Величина Δ (22) как функция $\ln(1/\rho)$ для безразмерной проводимости f для значения угла $\theta_4 = 4\pi/24$, уровень отсечки $+0.01$ обозначен горизонтальной штрихпунктирной линией, границы $\ln(1/\rho_c(4))$ и $\ln(1/\rho_m(4))$ критической области обозначены стрелками

выми нет (см. рис. 2), где мы можем визуальнo наблюдать реальную область совпадения. Условимся, как и в работе [24], диапазоном совпадения называть интервал аргумента $\ln(1/\rho)$, в котором различие этих зависимостей не превосходит 1%. Введем критерий близости этих кривых:

$$\Delta(\rho) = \frac{f_{num} - f_{theor}}{f_{theor}}, \quad (22)$$

где f_{num} и f_{theor} — численное (полученное методом мультипольного разложения) и теоретическое значения безразмерной проводимости f . Будем считать, что в интервале аргумента $\ln(1/\rho_c) \leq \ln(1/\rho) \leq \ln(1/\rho_m)$ величины f_{num} и f_{theor} совпадают, если выполняется условие

$$|\Delta(\rho)| \leq 0.01.$$

Это условие может быть применено и для производных от проводимости по ее аргументам. В случае, если вблизи порога применимости численного метода экспериментальная кривая пересекает теоретическую и уходит вниз, величина ρ_m отсчитывается от точки пересечения. Пример величины $\Delta(\rho)$ как функции $\ln(1/\rho)$ показан на рис. 3 для угла $\theta = 4\pi/24$. Стрелками обозначены границы $\ln(1/\rho_c(4))$ и $\ln(1/\rho_m(4))$ критической области.

Использование этого условия для определения границ критической области для данных настоящей работы приводит к значениям $\ln(1/\rho_c(n))$ и $\ln(1/\rho_m(n))$, приведенным в таблице для разных значений θ_n . В этой таблице $\rho_c(12) = h_c$ и

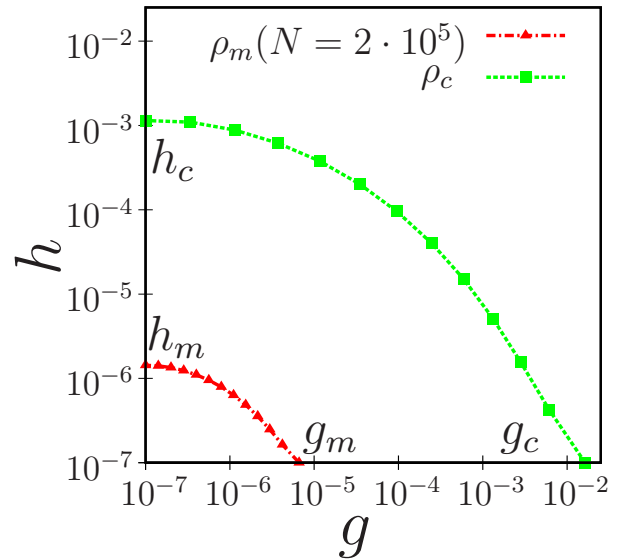


Рис. 4. Границы критической области в полярных координатах (ρ, θ) для переменных (g, h) , логарифмический масштаб для переменной ρ

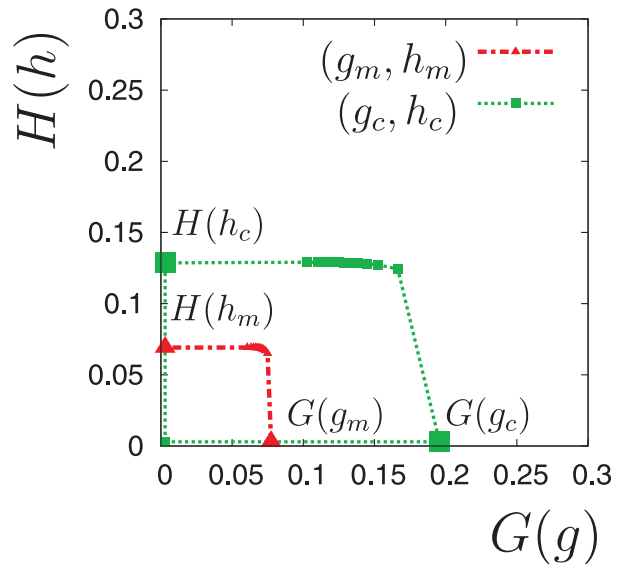


Рис. 5. Границы критической области в координатах $(G(g), H(h))$

$\rho_m(12) = h_m$, где h_c и h_m — точки на оси ординат h , введенные в работе [24]. Соответственно $\rho_c(0) = g_c$ и $\rho_m(0) = g_m$, где g_c и g_m — точки на оси абсцисс g из [25]. Из данных этих работ следует

$$\begin{aligned} \ln(1/h_c) &\simeq 6.8, & \ln(1/h_m) &\simeq 13.5, \\ \ln(1/g_c) &\simeq 4.1, & \ln(1/g_m) &\simeq 11.9. \end{aligned} \quad (23)$$

Построим график для границ критической области в плоскости (g, h) . Точки из таблицы образуют

на плоскости часть границы в виде дуги. Эта граница критической области от g_c до h_c изображена в координатах (ρ, θ) на рис. 3 зеленой линией (для переменной ρ использована логарифмическая шкала). Результат бинарного приближения справедлив внутри этой области, а метод мультипольного разложения применим всюду выше дуги h_m, g_m . Критическая область, в которой результаты мультипольного разложения и бинарного приближения совпадают, находится между нижней и верхней линиями на рис. 3.

В плоскости (g, h) (в квадрате со стороной, равной 1) критическая область в нормальном масштабе помещается в квадратике со стороной порядка 10^{-3} , так что ее детальное рассмотрение затруднительно. В свою очередь площадка, где не применим численный метод, занимает область линейного размера порядка 10^{-6} . Для того чтобы свести области столь разного масштаба в единую картину, введем следующие координаты, связанные с исходными g и h :

$$\begin{aligned} G(g) &= \left[1 + \ln \left(\frac{1}{g} \right) \right]^{-1}, \\ H(h) &= \left[1 + \ln \left(\frac{1}{h} \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $G(0) = H(0) = 0$ и $G(1) = H(1) = 1$. Формулами (24) исходный квадрат со стороной, равной 1 в плоскости (g, h) , отображается на такой же квадрат в плоскости (G, H) . При этом точка фазового перехода по-прежнему находится в начале координат ($G = 0, H = 0$), а структура всей критической области становится наблюдаемой. В этих координатах в плоскости (G, H) имеем следующую картину, изображенную на рис. 4.

Метод мультипольного разложения применим вне области, ограниченной красной штрихпунктирной линией на рис. 4. Критическая область находится внутри многоугольника, ограниченного зеленой пунктирной линией. Ломаная линия от $H(h_m)$ до $G(g_m)$ представляет собой порог применимости численного метода при заданном размере N подсистемы величин ξ_n . Внутренность многоугольника, ограниченного красной линией, для численного счета при заданном $N = 2 \cdot 10^5$ недоступна. Таким образом, сравнение аналитического выражения для проводимости, полученного в рамках бинарного приближения, с численными данными возможно только в части критической области, ограниченной на рис. 4 зеленой и красной линиями.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе сравниваются результаты вычисления эффективной проводимости модели Рэля методом мультипольного разложения и теоретическим методом бинарного приближения. Сравнение проведено в плоскости параметра g (доля площади включений) и параметра h (отношение проводимости компонент). Вычисления проводились вдоль лучей ($g = \rho \cos \theta_n, h = \rho \sin \theta_n$), определяемых парой переменных (ρ, θ_n) , $\theta_n = \pi n/24$ в полярной системе координат. В плоскости (g, h) вычислена граница критической области, состоящая из внешней линии $g_c, h_c, 0$ и внутренней линии $g_m, h_m, 0$. В области, расположенной между линиями, результаты теоретического подхода и мультипольного разложения совпадают. Вне линии $g_c, h_c, 0$ (вне критической области) теоретический метод бинарного приближения неприменим. В области внутренней линии $g_m, h_m, 0$ перестает работать метод мультипольного разложения для системы размером $N = 2 \cdot 10^5$.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема 122041400110-4).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh, Phil. Mag. S **34**, №211, 481 (1892).
2. W. T. Perrins, D. R. McKenzie, and R. C. McPhedran, Proc. R. Soc. Lond. A **369**, 207 (1979).
3. R. C. McPhedran, Proc. R. Soc. Lond. A **408**, 31 (1986).
4. R. C. McPhedran and G. W. Milton, Proc. R. Soc. Lond. A **411**, 313 (1987).
5. R. C. McPhedran, L. Poladian, and G. W. Milton, Proc. R. Soc. Lond. A **415**, 185 (1988).
6. V. V. Mityushev and Z. Angew. Math. Mech. **77**, 115 (1997).
7. N. Rylko, J. Eng. Math. **38**, 1 (2000).
8. Y. A. Godin, J. Math. Phys. **53**, 063703 (2012).

9. B. Ya. Balagurov and V. A. Kashin, JETP **90**, 850 (2000) [Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **117**, 978 (2000)].
10. B. Ya. Balagurov, *Electrophysical Properties of Composites. Macroscopic Theory* [in Russian], URSS, Moscow (2015) [Б. Я. Балагуров, *Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория*, URSS, Москва (2015)].
11. N. F. Mott, Proc. Phys. Soc. A **62**, 416 (1949).
12. W. F. Brinkman and T. M. Rice, Phys. Rev. B **2**, 4302 (1970).
13. M. Imada, A. Fujimori, and Y. Tokura, Rev. Mod. Phys. **70**, 1039 (1998).
14. S. Torquato, *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*, Vol. 16, New York, Springer (2002).
15. V. Z. Kresin, Y. N. Ovchinnikov, and S. A. Wolf, Phys. Rep. **43**, 231 (2006).
16. S. S. Seidov, K. K. Kesharpu, P. I. Karpov, and P. D. Grigoriev, Phys. Rev. B **98**, 014515 (2018).
17. R. Rösslhuber, A. Pustogow, E. Uykur, A. Böhme, A. Löhle, R. Hübner, J. A. Schlueter, Y. Tan, V. Dobrosavljević, and M. Dressel, Phys. Rev. B **103**, 125111 (2021).
18. S. I. Pesotskii, R. B. Lyubovskii, G. V. Shilov, V. N. Zverev, S. A. Torunova, E. I. Zhilyaeva, and E. Canadell, Magnetochemistry **8**, 152 (2022).
19. S. S. Seidov, V. D. Kochev, and P. D. Grigoriev, Phys. Rev. B **108**, 125123 (2023).
20. F. Kagawa, K. Miyagawa, and K. Kanoda, Nature **436**, 534 (2005).
21. B. Ya. Balagurov, JETP **130**, 562 (2020) [Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **157**, 669 (2020)].
22. B. Ya. Balagurov, JETP **132**, 463 (2021) [Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **159**, 553 (2021)].
23. B. Ya. Balagurov, JETP **134**, 249 (2022) [Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **161**, 358 (2022)].
24. B. Ya. Balagurov and O. A. Vasilyev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **167**, 586 (2025) [Б. Я. Балагуров, О. А. Васильев, ЖЭТФ **167**, 586 (2025)].
25. B. Ya. Balagurov and O. A. Vasilyev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **168**, 357 (2025) [Б. Я. Балагуров, О. А. Васильев, ЖЭТФ **168**, 357 (2025)].
26. *Handbook of Mathematical Functions*, ed. by M. Abramowitz and I. A. Stegun, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55 (1964) [*Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979)].

Numerical Investigation of the Conductivity of the Two-Dimensional Rayleigh Model with the Phase Transition Metal–Insulator. Boundaries of the Critical Region

*B. Ya. Balagurov**, *O. A. Vasilyev***

Emanuel Institute of Biochemical Physics of the Russian Academy of Sciences
119334, Moscow, Russia

*E-mail: byabalagurov@mail.ru

**E-mail: ol.vasilyev@mail.ru

Received December 10, 2025

Revised February 12, 2026

Accepted March 16, 2026

Abstract

We study the effective conductivity of a two-dimensional Rayleigh model using the numerical method of multipole expansion. The Rayleigh model represents an isotropic conducting matrix with periodically arranged circular inclusions of reduced conductivity. Both the conductivity itself and its derivatives have been determined over a wide range of inclusion concentration and component conductivity ratios. It is shown that in the critical region (near the metal–dielectric phase transition point), the computed values of conductivity and its derivatives coincide with acceptable accuracy with corresponding results obtained by the binary approximation approach. The comparison of numerical and analytical results allows to determining the boundaries of the critical region. The range of validity of the multipole expansion method is also determined.

Keywords: composite materials, effective conductivity, phase transitions, multipole expansion, binary approximation

Funding. This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education, Russian Federation (Research theme state registration No. 122041400110-4).

Conflict of interest. The authors of this work declare that they have no conflict of interest.

Authors' contribution. The contribution of the authors is equal.