

СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ, СКРЫТЫЕ ПАРАМЕТРЫ И КВАНТОВАЯ КОРРЕЛИРОВАННОСТЬ ПАР ЭПР (ЭЙНШТЕЙНА – ПОДОЛЬСКОГО – РОЗЕНА) – БОМА – БЕЛЛА

*Н. К. Соловаров**

*Казанский физико-технический институт им. Е. К. Завойского,
ФИЦ Казанский научный центр Российской академии наук
420029, Казань, Россия*

Поступила в редакцию 29 сентября 2025 г.,
после переработки 29 сентября 2025 г.
Принята к публикации 21 октября 2025 г.

Предложен алгоритм разложения и получены разложения матриц плотности пар ЭПР – Бома – Белла в виде сумм четырех равновероятных пар матриц плотности квантово-коррелированных кубитов. Существование таких разложений для модельных в квантовой теории двухсоставных систем демонстрирует справедливость предположения Эйнштейна – Подольского – Розена о возможности статистического описания чистых состояний составных квантовых систем в модели скрытых переменных (параметров). Такими скрытыми параметрами оказались относительные фазы волновых функций кубитов. Предложена визуализация полученных разложений в виде коррелированных по азимутальным фазам векторов на сферах Блоха.

DOI: 10.7868/S3034641X25120045

1. ВВЕДЕНИЕ

Термин запутанность (entanglement), введенный Шредингером 90 лет назад (см. обзоры [1, 2]), стал в настоящее время синонимом следующего понятия: проявление прошлого взаимодействия разнесенных в пространстве квантовых объектов через коррелированность результатов их совместных измерений. Запутанность служит физическим основанием многочисленных направлений квантовой информатики [2–5]. В то же время определение запутанности и особенно мер запутанности остается дискуссионным как с физической (операционной, т. е. допускающей экспериментальную проверку) [5–9], так и с математической (геометрической, характеризующей свойства составных гильбертовых пространств) [10, 11] точки зрения. При этом основным дискуссионным вопросом остается старая проблема статистической интерпретации результатов

квантовых измерений, возвращающая к принципиальному вопросу Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР) о полноте квантовой теории [2–9, 12]. Можно констатировать, что лавинообразно растет число работ, относящихся к квантовой информатике, принимающих сформулированные Беллом характеристики запутанности [1, 2, 5–10]. Но одновременно проводится множество исследований, обосновывающих теоретическую и экспериментальную неопределенность этих положений [13–15], иногда в категоричной формулировке [16].

В настоящей работе на примере модельной в нерелятивистской квантовой теории синглетной пары ЭПР – Бома демонстрируется алгоритм разложения матрицы плотности двухсоставной квантовой системы в сумму тензорных произведений матриц плотности подсистем. Представлены результаты проведенных таким способом разложений для матриц плотности всех состояний Белла, тем самым продемонстрирована их сепарабельность (разделимость) с одновременным сохранением квантовой коррелированности (запутанности). Представлена визуализация полученных разложений в виде сумм четырех пар коррелированных по азимутальным фазам векторов на сферах Блоха.

* E-mail: nik.solovarov@gmail.com

2. РАЗДЕЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ ПАРЫ ЭПР – БОМА

Простейшему и основополагающему определению запутанности соответствует математическое утверждение о невозможности представления матрицы плотности двухсоставной квантовой системы $\hat{\rho}^{AB}$ (определенной в гильбертовом пространстве тензорного произведения пространств составляющих подсистем A, B) в виде суммы или интеграла тензорных произведений матриц плотности подсистем $\hat{\rho}^A, \hat{\rho}^B$ [1–5]:

$$\hat{\rho}^{AB} \neq \sum_{\lambda} P(\lambda) \hat{\rho}_{\lambda}^A \otimes \hat{\rho}_{\lambda}^B, \quad (1)$$

$$\hat{\rho}^{AB} \neq \int_{\lambda} P(\lambda) \hat{\rho}_{\lambda}^A \otimes \hat{\rho}_{\lambda}^B, \quad (2)$$

для систем с дискретным энергетическим спектром или непрерывным спектром соответственно. Для вероятностей $P(\lambda)$ справедливы соотношения: в (1) $\sum_{\lambda} P(\lambda)=1$, в (2) $\int_{\lambda} P(\lambda)=1$. При выполнении одного из равенств (1), (2) составная квантовая система считается сепарабельной, и по определению ЭПР – Бома (см. [1–4, 7, 9, 12]) она соответствует модели квантовой механики составных квантовых систем со скрытыми статистическими переменными (параметрами) λ . Вернер [12] проанализировал условия, при которых возможно описание составных квантовых систем в модели скрытых переменных, и назвал составные квантовые системы, для которых существуют равенства вида (1), (2), классически коррелированными, а запутанные состояния — ЭПР-коррелированными (или квантово-коррелированными).

Предложено несколько определений меры запутанности [1, 5, 10, 17, 18], причем исследования в этом направлении (для многосоставных систем) активно продолжаются [2, 19, 20]. Общепринято, что для двухсоставных двухуровневых систем максимально запутанными являются чистые состояния Белла $|\Psi^{\pm}\rangle$ и $|\Phi^{\pm}\rangle$ [17, 18], одним из которых (модельным в квантовой теории) является синглетное состояние ЭПР – Бома:

$$\begin{aligned} |\Psi^{-}\rangle &= |\Psi\rangle_{EPR-B} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2\rangle_A |-1/2\rangle_B - \\ &- |-1/2\rangle_A |1/2\rangle_B) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_A |0\rangle_B - |0\rangle_A |1\rangle_B) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_A \downarrow_B - \downarrow_A \uparrow_B), \end{aligned} \quad (3)$$

где $|\pm 1/2\rangle_{A,B}$ — собственные состояния спин-овых операторов $(\hat{J}_z)_{A,B}$ соответствующих под-

систем [1–3, 17, 18]. Во второй и третьей строках (3) показано соответствие различных обозначений этого состояния в квантовой информатике. Матрица плотности состояния ЭПР – Бома $\hat{\rho}^{(\Psi^{-})} = \hat{\rho}_{EPR-B} = (\langle \Psi^{-} | \Psi^{-} \rangle)$ в базисе тензорного произведения пространств собственных состояний операторов $(\hat{J}_z)_A \otimes (\hat{J}_z)_B$ равна [1, 3, 17, 18]

$$\hat{\rho}_{EPR-B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В матрице (4) каждый матричный элемент $\rho_{ij} = \rho_{kl,mn}$ ($i, j=1, 2, 3, 4$; $k, l, m, n=1, 2$) характеризуется четырьмя индексами, где первые два соответствуют собственным состояниям подсистемы A , а вторые два — подсистемы B . Для упрощения записи индексов матричных элементов используем обозначения, принятые в квантовой информатике для кубитов: $|1/2\rangle \leftrightarrow 1$, $|-1/2\rangle \leftrightarrow 0$. Тогда справедливо следующее соответствие индексов строк и столбцов матричных элементов матрицы плотности (4): $i, j \leftrightarrow k, l, m, n$; $11 \leftrightarrow 11, 11$; $12 \leftrightarrow 11, 10$; $13 \leftrightarrow 10, 11$; $14 \leftrightarrow 10, 10$; $21 \leftrightarrow 11, 01$; $22 \leftrightarrow 11, 00$; $23 \leftrightarrow 10, 01$; $24 \leftrightarrow 10, 00$; $31 \leftrightarrow 01, 11$; $32 \leftrightarrow 01, 10$; $33 \leftrightarrow 00, 11$; $34 \leftrightarrow 00, 10$; $41 \leftrightarrow 01, 01$; $42 \leftrightarrow 01, 00$; $43 \leftrightarrow 00, 01$; $44 \leftrightarrow 00, 00$. В противоположность общепринятому представлению о максимальной запутанности и несепарабельности (неразделимости) состояния ЭПР – Бома, для $\hat{\rho}_{EPR-B}$ (4) выполняется равенство вида (1):

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{EPR-B} &= \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\phi \pm \pi)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\phi \pm \pi)} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\phi \pm \pi)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\phi \pm \pi)} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} & 1 \end{pmatrix} + \right. \\ &+ \left. \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\phi \pm \frac{\pi}{2})} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\phi \pm \frac{\pi}{2})} & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\phi \mp \frac{\pi}{2})} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\phi \mp \frac{\pi}{2})} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\phi \mp \frac{\pi}{2})} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\phi \mp \frac{\pi}{2})} & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\phi \pm \frac{\pi}{2})} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\phi \pm \frac{\pi}{2})} & 1 \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где ϕ — начальный фазовый параметр в интервале $[0, \pi]$. Называем этот параметр начальным, имея в виду, что парадокс ЭПР сформулирован как динамическая задача с заданными начальными условиями.

Следовательно, утверждение о том, что синглетная пара ЭПР–Боба сепарабельна (разделима), соответствует предположению Эйнштейна–Подольского–Розена о возможности статистических скрытых переменных (параметров) в квантовой теории [4, 7, 12]. В рассматриваемом случае скрытыми параметрами оказались начальные относительные фазы кубитов $\phi, \phi \pm \pi, \phi \pm \pi/2, \phi \mp \pi/2$ и равная вероятность $P(\lambda) = 1/4$ четырех коррелированных по фазам начальных состояний подсистем. В противоречие с определением Вернера [12], коррелированность называем квантовой, поскольку она характеризует соотношения между принципиально квантовыми характеристиками подсистем — фазами. На коррелированность фаз волновых функций квантово-коррелированных (запутанных) систем указывалось в [21].

Равенство (5) выводится тремя последовательными шагами из системы 16 нелинейных алгебраических уравнений для матричных элементов матрицы (4):

$$\rho_{kl, mn} = \sum_{\lambda=1}^q P_{\lambda} a_{kl}^{\lambda} b_{mn}^{\lambda}, \quad (6)$$

где в правой части искомыми неизвестными величинами являются вероятности P_{λ} , их число q и матричные элементы матриц плотности подсистем $\hat{\rho}_{\lambda}^A, \hat{\rho}_{\lambda}^B \leftrightarrow a_{kl}^{\lambda}, b_{mn}^{\lambda}$ соответственно. Из условий эрмитовости и нормированности матриц плотности подсистем (т. е. их положительной определенности):

$$a_{kl}^{\lambda} = (a_{lk}^{\lambda})^*, \quad a_{kk}^{\lambda} + a_{ll}^{\lambda} = 1, \quad k \neq l,$$

$$b_{mn}^{\lambda} = (b_{nm}^{\lambda})^*, \quad b_{mm}^{\lambda} + b_{nn}^{\lambda} = 1,$$

следует, что независимыми неизвестными являются по четыре матричных элемента каждой пары λ . Из условия равенства числа неизвестных числу уравнений $(16/4 = 4)$ определяем число слагаемых: $q=4$. Обозначим четыре слагаемых греческими буквами: $\lambda \rightarrow \lambda, \mu, \nu, \vartheta$.

На первом шаге вывода рассмотрим четыре уравнения для матричных элементов главной диагонали матрицы (4) вида

$$\rho_{kk, mm} = \sum_{\lambda=\lambda, \mu, \nu, \vartheta} P_{\lambda} a_{kk}^{\lambda} b_{mm}^{\lambda}, \quad (7)$$

которые содержат только диагональные (неотрицательные) элементы матриц плотности подсистем. Такие суммы равны нулю для двух крайних элементов главной диагонали (при $k = m = 1$ или 0), если один из двух сомножителей (матричных элементов) каждого слагаемого в (6) равен нулю. Следовательно, $a_{kk}^{\lambda}, b_{mm}^{\lambda} = 1$ или 0 и $a_{kk}^{\lambda} = b_{mm}^{\lambda}$ при $k \neq m$. Из представления о равнозначности подсистем A, B полагаем равными вероятности возможных разделенных состояний, т. е. полагаем $P_{\lambda} = 1/4$. Выбираем из возможных вариантов $a_{11}^{\lambda} = 1, a_{11}^{\mu} = 1, a_{11}^{\nu} = 0, a_{11}^{\vartheta} = 0$ и, соответственно, $b_{00}^{\lambda} = 0, b_{00}^{\mu} = 0, b_{00}^{\nu} = 1, b_{00}^{\vartheta} = 1$. Только при подобном симметричном выборе (два из четырех элементов a_{kk}^{λ} равны 1 и два — нулю) выполняются равенства

$$1/2 = \sum_{\lambda=\lambda, \mu, \nu, \vartheta} (1/4) a_{kk}^{\lambda} b_{mm}^{\lambda}, \quad k \neq m,$$

для двух средних матричных элементов главной диагонали матрицы (4).

Вторым шагом вывода рассмотрим систему из восьми уравнений вида

$$\begin{aligned} \rho_{kk, mn} &= \sum_{\lambda=\lambda, \mu, \nu, \vartheta} (1/4) a_{kk}^{\lambda} b_{mn}^{\lambda} = 0, \quad m \neq n; \\ \rho_{kl, mm} &= \sum_{\lambda=\lambda, \mu, \nu, \vartheta} (1/4) a_{kl}^{\lambda} b_{mm}^{\lambda} = 0, \quad k \neq l, \end{aligned} \quad (8)$$

которые содержат уже определенные на первом шаге диагональные элементы матриц плотности составных систем и искомые недиагональные элементы этих матриц. Получаем следующие соотношения для недиагональных элементов:

$$a_{kl}^{\lambda} = -a_{kl}^{\mu}, \quad a_{kl}^{\nu} = -a_{kl}^{\vartheta};$$

$$b_{mn}^{\lambda} = -b_{mn}^{\mu}, \quad b_{mn}^{\nu} = -b_{mn}^{\vartheta}.$$

Опять, используя представление о равнозначности подсистем, принимаем равными абсолютные величины (C) недиагональных матричных элементов:

$$a_{10}^{\lambda} = C e^{i\phi}, \quad a_{10}^{\mu} = C e^{i(\phi \pm \pi)},$$

$$a_{10}^{\nu} = C e^{i\alpha}, \quad a_{10}^{\vartheta} = C e^{i(\alpha \pm \pi)},$$

$$b_{10}^{\lambda} = C e^{i\beta}, \quad b_{10}^{\mu} = C e^{i(\beta \pm \pi)},$$

$$b_{10}^{\nu} = C e^{i\gamma}, \quad b_{10}^{\vartheta} = C e^{i(\gamma \pm \pi)}.$$

Третьим шагом вывода определим C и соотношения между фазовыми параметрами $\phi, \alpha, \beta, \gamma$ из четырех уравнений для матричных элементов побочной диагонали матрицы (4), подставляя в них определенные выше значения недиагональных элементов $a_{kl}^{\lambda}, b_{mn}^{\lambda}$. Получаем $C = 1/\sqrt{2}$, $\alpha = \phi \pm \pi/2$, $\beta = \phi \mp \pi$, $\gamma = \phi \mp \pi/2$.

В результате вычислены все матричные элементы четырех пар равновероятных начальных состояний разделенных подсистем A и B в (5).

Полученные разделенные матрицы плотности подсистем имеют нестандартный вид: диагональные матричные элементы равны 0 или 1 и одновременно не равны нулю недиагональные элементы, характеризующие наличие когерентностей кубитов и определяющие относительные фазы кубитов в каждой паре и между парами. Поэтому для всех разделенных матриц плотности $\text{Sp} \hat{\rho}_{A,B}^{\lambda,\mu,\nu,\vartheta} = 1$, но $\text{Sp}(\hat{\rho}_{A,B}^{\lambda,\mu,\nu,\vartheta})^2 = 2$, т.е. они не соответствуют ни условию для матриц плотности чистых состояний $\text{Sp}(\hat{\rho})^2 = \text{Sp} \hat{\rho} = 1$, ни условию для смешанных состояний ($\text{Sp} \hat{\rho}^2 < 1$) [18].

Необходимо отметить, что равенство (5) содержалось как промежуточный, не привлекавший внимания результат в [22] (формула (4.12)). Оно было получено исходя из полуклассического представления

(принятого в когерентной спектроскопии [23]) о магнитных моментах и их динамике, как о трехмерных объектах на сфере Блоха. При этом начальное, синглетное состояние пары спинов моделировалось как суперпозиция пар антисимметрично ориентированных трехмерных магнитных моментов.

3. РАЗДЕЛЕНИЕ ПАР БЕЛЛА

Изложенным выше методом получены разложения матриц плотности остальных трех состояний Белла: $\hat{\rho}^{(\Psi^+)}$, $\hat{\rho}^{(\Phi^\pm)}$. Они также представляют собой суммы четырех равновероятных коррелированных пар кубитов, отличающихся друг от друга соотношениями начальных относительных квантовых фаз. Приводим результаты разложений.

Разложение матрицы плотности $|\Psi^+\rangle$ -состояния Белла:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(\Psi^+)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} & 1 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \pm \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \pm \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \pm \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \pm \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \mp \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \mp \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \mp \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \mp \pi/2)} & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \pm \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \pm \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \pm \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \pm \pi/2)} & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Разложение матрицы плотности $|\Phi^-\rangle$ -состояния Белла:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(\Phi^-)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\phi \pm \pi)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(-\phi \pm \pi)} & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \pm \pi)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \pm \pi)} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \mp \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \mp \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\phi \mp \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(-\phi \mp \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \pm \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \pm \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\phi \pm \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(-\phi \pm \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Разложение матрицы плотности $|\Phi^+\rangle$ -состояния Белла:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(\Phi^+)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \pm \pi)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \pm \pi)} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\phi \pm \pi)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(-\phi \pm \pi)} & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \mp \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \mp \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\phi \mp \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(-\phi \mp \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\phi \pm \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\phi \pm \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\phi \pm \pi/2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(-\phi \pm \pi/2)} & 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

4. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ

Физический смысл полученных разложений состояний Белла становится понятнее при их визуализации. В иллюстративных, педагогических и исследовательских целях предложено много вариантов визуализации запутанных квантовых систем [11, 24, 25]. Для рассматриваемых случаев сепарабельных (но квантово-коррелированных) систем удобно использовать предложенное в [24] представление коррелированных кубитов с помощью двух сфер Блоха.

На рис. 1 изображены последовательные слагаемые суммы (5) в соответствии с [24]. Каждая пара суммы представляется антисимметрично относительно центра направленными векторами на сфере Блоха. Начальный фазовый параметр ϕ определен в плоскости xu системы координат, в которой проведено квантование рассматриваемой квантовой системы, т.е. соответствует азимутальному углу сферической системы координат. В модели Боме направлению оси z соответствует направление постоянного магнитного поля, в котором происходит распад синглетной пары электронных спинов.

На рис. 2–4 изображены разложения трех других состояний Белла.

Из разложений (5), (9)–(11) и рис. 1–4 можно сделать вывод об интерференционной природе разделимости и квантовой коррелированности пар Белла. Действительно, разложения выглядят как суммы пар волн с одинаковой амплитудой и компенсирующими друг друга фазами. Для одиночных квантовых объектов с дискретным спектром (электронов, атомов, молекул...) существование квантовой когерентности (недиагональных элементов матрицы

плотности) в когерентной спектроскопии [23] физически отождествляется с суперпозиционным переходным состоянием в процессе излучения или поглощения. При этом протяженный по времени процесс излучения или поглощения резонансных фотонов соответствует модели Гейзенберга, когда магнитные (или электрические) моменты перехода в каждый момент времени имеют определенную пространственную ориентацию. При полуклассическом рассмотрении (в приближении классического поля) фазы моментов перехода атомов определяются фазой внешнего резонансного поля.

В случае пар Белла начальная (опорная) фаза ϕ разделенных кубитов является свободным (неопределенным) параметром, а их квантовые когерентности и относительные фазы характеризуют начальные стационарные состояния. Следовательно, физическое содержание так определенной квантовой когерентности отличается от общепринятого. Эта квантовая когерентность характеризует волновую (квантовую) природу запутанных частиц. Поэтому экспериментальные проявления разделимости (сепарабельности) состояний Белла в таких системах возможны при наблюдении интерференционных эффектов от разделенных кубитов. Заметим, что в квантовой информатике распространено представление о сложности экспериментального наблюдения квантовой коррелированности синглетной пары ЭПР – Боме [1], а большинство экспериментов по наблюдению квантовой коррелированности проведены с фотонами.

Для запутанных фотонов (квантовых объектов с непрерывным энергетическим спектром) связь запутанности с коррелированностью фаз их волновых

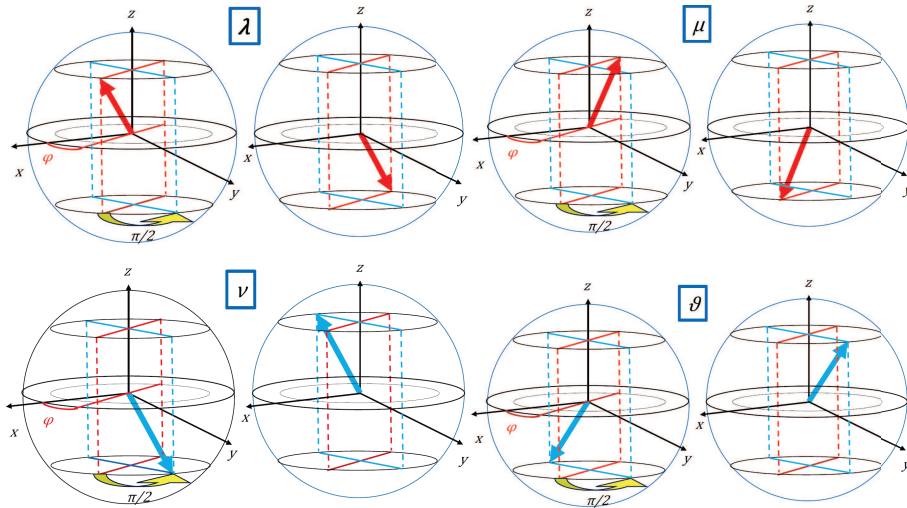


Рис. 1. Изображение синглетной пары ЭПР–Боме, т.е. $|\Psi^-\rangle$ -состояния Белла, разделенного на четыре равновероятные пары квантово-коррелированных кубитов. Начальная фаза ϕ , задающая направление вектора опорной (красной) оси относительно координатной оси x , определена в плоскости xy . Синяя ось перпендикулярна опорной. Обозначения пар греческими буквами ($\lambda, \mu, \nu, \vartheta$) соответствуют обозначениям последовательных слагаемых суммы (5)

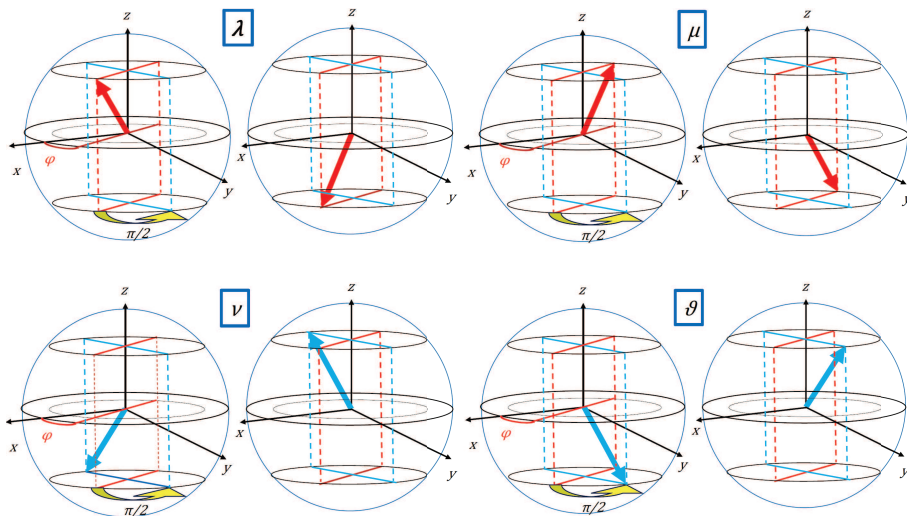


Рис. 2. Изображение $|\Psi^+\rangle$ -состояния Белла, разделенного на четыре равновероятные пары квантово-коррелированных кубитов. Обозначения такие же, как на рис. 1

функций общепринята [21]. Экспериментальные методы измерения коррелированности пар фотонов обсуждаются в работах [2, 4].

Во многих работах запутанность составных квантовых систем противопоставляется сепарабельности [1–5, 17, 18, 20]. Разделенные разложения (5), (9)–(11) противоречат такому представлению, поскольку сепарабельность и квантовая коррелированность (запутанность) сосуществуют. Таким образом, полученные разложения соответствуют решению Вернера [12], указавшего на возможность

описания квантово-коррелированных (запутанных) систем в модели скрытых переменных (параметров).

Решение задач разложения матриц плотности Белла (5), (9)–(11) является математически неполным без доказательства их единственности. Свободный параметр — опорная начальная фаза волновых функций кубитов ϕ — считается в квантовой механике экспериментально неопределимой и поэтому несущественной величиной. Единственность этого параметра в полученных решениях стала следствием выбора числа слагаемых ($q = 4$) исходя из ра-

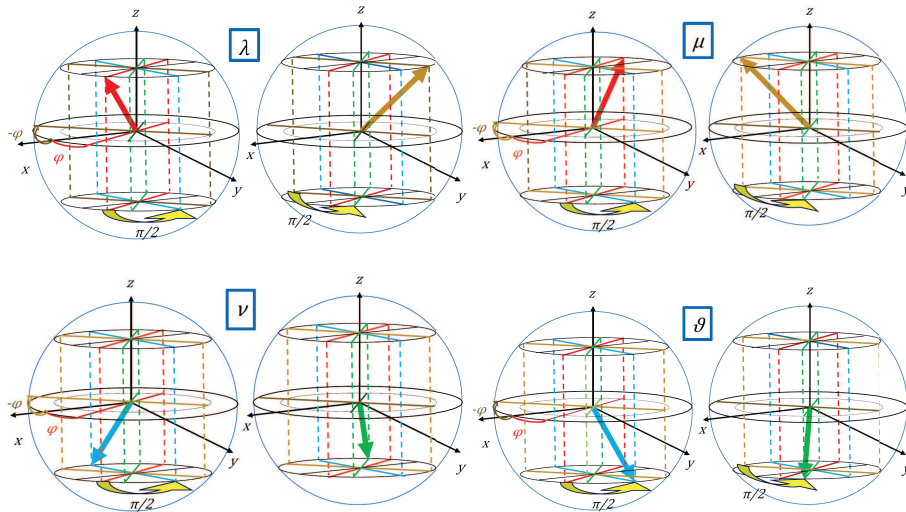


Рис. 3. Изображение $|\Phi^-\rangle$ -состояния Белла, разделенного на четыре равновероятные пары квантово-коррелированных кубитов. Обозначения опорной (красной) и синей осей такие же, как на рис. 1, 2. Коричневая ось повернута на угол $-\phi$ относительно оси x . Зеленая ось перпендикулярна коричневой. Для $|\Phi^\pm\rangle$ начальная фаза ϕ определена в интервале $(0, \pi)$. Рисунки 3 и 4 соответствуют первому (верхнему) значению знака фазы ($\pm$) в выражениях разложений

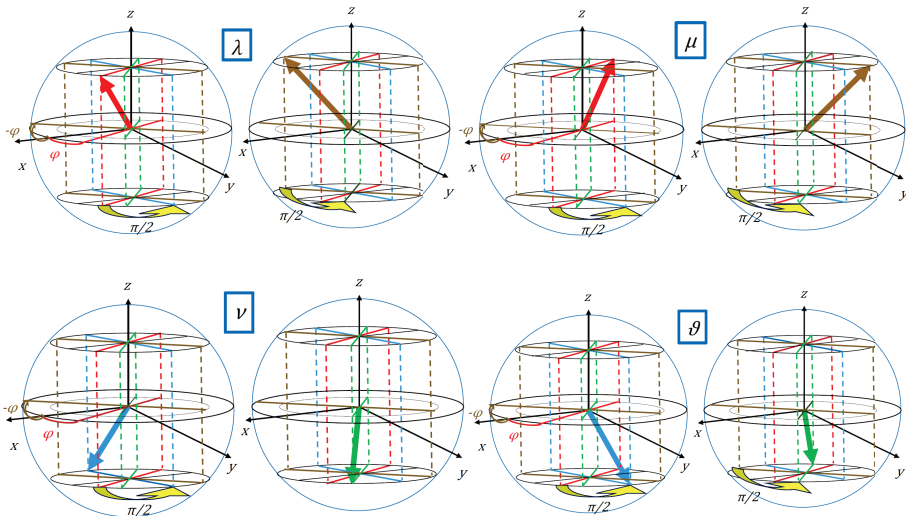


Рис. 4. Изображение $|\Phi^+\rangle$ -состояния Белла, разделенного на четыре равновероятные пары квантово-коррелированных кубитов. Обозначения такие же, как на рис. 3

венства числа уравнений числу неизвестных в сумме (6). Методом полной математической индукции (последовательным увеличением q , начиная с $q = 1$) легко показать, что разделенные решения возможны только для четных q и минимальное значение q , при котором существует решение, равно 4. При $q > 4$ возникает множество решений с несколькими свободными начальными фазовыми параметрами $\phi(q)$, каждый из которых определен в интервале $[0, \pi]$. Такие решения соответствуют состояниям кубитов с несколькими произвольными (неопределен-

ными) начальными фазами, которые не могут проявляться в интерференционных экспериментах, поэтому полученные решения с $q = 4$ являются единственными физически значимыми.

Заметим, что полученные разности фаз в парах разделенных состояний Белла $(\pm\pi, \pm\pi/2)$ в экспериментах с коррелированными фотонами соответствуют предельным случаям, когда квантовая коррелированность и классическая коррелированность совпадают по величине [21].

На рис. 1–4 хорошо видны различия в симметрии начальных фазовых соотношений в квантово-коррелированных парах разделенных состояний Белла. Проявляются два типа симметрии начальных фаз:

1) поворотная симметрия четвертого порядка относительно оси квантования z для $|\Psi^\mp\rangle$,

2) поворотная симметрия второго порядка относительно оси квантования z для $|\Phi^\mp\rangle$.

Макроскопические аналоги и физическое содержание такой фазовой коррелированности нам неизвестны.

5. ВЫВОДЫ

1. Модельные в квантовой теории состояния пар ЭПР–Боме–Белла разделимы, квантово коррелированы, допускают предполагаемое Эйнштейном–Подольским–Розеном статистическое описание в модели скрытых параметров.

2. Скрытыми параметрами для состояний ЭПР–Боме–Белла являются принципиально квантовые фазовые характеристики подсистем.

3. Принятые в настоящее время определения запутанности составных квантовых систем и мер запутанности необходимо пересматривать с учетом фазовых характеристик составляющих подсистем.

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Казанского физико-технического института им. Е. К. Завойского. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Благодарности. Автор признателен В. Ф. Тарасову и А. М. Шегеде за стимулирующие обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
2. M. Erhard, M. Krenn, and A. Zeilinger, *Nat. Rev. Phys.* **2**, 365 (2020).
3. С. Я. Килин, УФН **169**, 507 (1999) [S. Ya. Kilin, *Phys.-Usp.* **42**, 435 (1999)].
4. M. D. Reid, P. D. Drummond, W. P. Bowen et al., *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1727 (2009).
5. N. Friis, G. Vitagliano, M. Malik, and M. Huber, *Nat. Rev. Phys.* **1**, 72 (2019).
6. Д. Н. Клышко, УФН **168**, 975 (1998) [D. N. Klyshko, *Phys.-Usp.* **41**, 885 (1998)].
7. H. M. Wiseman, S. J. Jones, and A. C. Doherty, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 140402 (2007).
8. N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio et al., *Rev. Mod. Phys.* **86**, 839 (2014).
9. M. Genovese, *Phys. Rep.* **413**, 319 (2005).
10. G. Adesso, Th. R. Bromley, and M. Cianciaruso, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49**, 47300 (2016).
11. I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge Univ. Press (2017).
12. R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
13. M. Żukowski and Č. Brukner, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47**, 424009 (2014).
14. J. Fulton, R. Y. Teh, and M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **110**, 022218 (2024).
15. M. J. W. Hall, *Phys. Rev. A* **110**, 022209 (2024).
16. A. Aiello, arXiv:quant-ph/2406.03028.
17. J. Preskill, *Lecture Notes on Quantum Computation*, <http://theory.caltech.edu/preskill/ph229/notes/chap4.pdf> Quantum Entanglement
18. Н. В. Никитин, *Курс МГУ. Матрица плотности* (2019), <https://teach-in.ru/course/density-matrix>.
19. M. Plodzień, J. Chwedeńczuk, M. Lewenstein, and G. Rajchel-Mieldzioć, *Phys. Rev. A* **110**, 032428 (2024).
20. F. Shi, L. Chen, G. Chiribella, and Q. Zhao, *Phys. Rev. Lett.* **134**, 050201 (2025).
21. G. Meissner, S. Danioko, and P. Villarreal, *J. Appl. Math. Phys.* **12**, 3237 (2024).
22. N. K. Solovarov, arXiv:quant-ph/0304142.
23. Дж. Макомбер, *Динамика спектроскопических переходов*, Мир, Москва (1979) [J. D. Macomber, *The Dynamics of Spectroscopic Transitions*, J. Wiley & Sons, New York–London–Sydney–Toronto (1976)].
24. S. Filatov and M. Auzinsh, arXiv:quant-ph/2403.10587.
25. J. Bley, E. Rexigel, A. Arias et al., *Phys. Rev. Research* **6**, 023077 (2024).