

АНАЛИЗ КВАНТОВОГО ПРЕИМУЩЕСТВА В ЗАДАЧЕ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА/АНТИПОИСКА ДВУХ ПАРТНЕРОВ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ

В. А. Томилин^{}, А. М. Ростом, Л. В. Ильичёв*

*Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 19 июля 2025 г.,
после переработки 7 октября 2025 г.
Принята к публикации 9 октября 2025 г.

Рассматривается задача о дискретных случайных блужданиях на плоскости двух участников, не имеющих средств связи и общих ориентиров, но обладающих ресурсом запутанных квантовых частиц. В зависимости от заранее определенного протокола их использования возможна модификация вероятности сближения/расхождения участников в результате последовательности шагов по отношению к аналогичным вероятностям, возникающим при обычном классическом случайном блуждании. Проведено сравнение эффективности квантовых и классического протокола по различным критериям и сформулированы условия, при которых использование квантовых протоколов дает преимущество.

DOI: 10.7868/S3034641X25120023

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые корреляции играют центральную роль в задачах квантовой обработки информации [1], изучении фундаментальных основ квантовой механики [2], а также в физике сильнокоррелированных систем [3]. Специфический вид чисто квантовых корреляций — запутанность — часто выступает в качестве ресурса, дающего превосходство в различных ситуациях, например, в задачах квантовой коммуникации [4, 5] и квантовой криптографии [6–8]. Весьма интересной областью, позволяющей лучше изучить фундаментальные свойства запутанности, является теория нелокальных квантовых игр¹⁾ [9]. Их особенностью является ограниченность или полное отсутствие средств коммуникации между участниками. Квантовые корреляции при этом являются необходимым ингредиентом, позволяющим в таких условиях достичь уровня согласованности действий, невозможного с использованием классических стратегий.

Примером может служить классическая игра Мермина – Переса [10, 11]. Настоящая работа посвящена относительно слабо исследованной разновидности квантовых игр, связанных с движением участников в пространстве. А именно, рассматривается задача о взаимном поиске (сосредоточении)²⁾ или антипоиске (рассредоточении) двух участников, A и B , на плоской поверхности в отсутствие знания начального местоположения друг друга, средств связи и общих ориентиров³⁾. В таком случае единственным вариантом действий являются блуждания наугад. Однако участники имеют доступ к ресурсу распределенной между ними запутанности в виде набора пронумерованных пар частиц со спином $1/2$ в синглетных состояниях, причем каждый участник обладает только одной частицей из каждой пары.

Будем полагать, что участники движутся дискретно, каждый раз сдвигаясь на расстояние l в случайных направлениях, определяемых следую-

²⁾ Предполагается, что при сближении на достаточно малое расстояние участники могут обнаружить друг друга визуально или еще каким-либо образом.

³⁾ В наиболее актуальной, как нам представляется, реализации данной игры участники представляют собой корабли или подводные лодки в некоторой области мирового океана. В таком случае важно также заранее уточнить отсутствие приборов инерциальной навигации на борту кораблей, чтобы соблюсти условие об отсутствии внешних ориентиров.

^{*} E-mail: 8342tomilin@mail.ru

¹⁾ Здесь и далее мы будем иметь в виду кооперативные квантовые игры, в которых коллектив участников сообща решает некоторую задачу.

щим образом. Сначала каждый из них выбирает направление случайного единичного вектора $\mathbf{n}_{A,B}$, имеющего равномерное распределение по азимутальному углу на плоскости. Затем участники осуществляют измерение удвоенных проекций спинов $\sigma_{A,B} \in \{1, -1\}$ своих частиц из одной синглетной пары вдоль выбранных случайных направлений. В зависимости от цели A и B используют одну из двух заранее согласованных стратегий: смещаются на $\sigma_A \mathbf{n}_A l$ и $-\sigma_B \mathbf{n}_B l$ для увеличения вероятности случайного сближения или на $\sigma_A \mathbf{n}_A l$ и $\sigma_B \mathbf{n}_B l$ для более быстрого (в среднем) взаимного удаления [12]. Эти утверждения доказываются расчетом среднеквадратичного расстояния между участниками после однократных совместных смещений:

$$\langle r'^2 \rangle_{\pm}^{(1)} = \sum_{\sigma_A, \sigma_B} \int [\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B + \sigma_A \mathbf{n}_A l \pm \sigma_B \mathbf{n}_B l]^2 \times \\ \times p(\sigma_A, \sigma_B | \mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B) \frac{d^2 \mathbf{n}_A}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{n}_B}{2\pi}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r}_{A,B}$ — начальные положения участников относительно выбранного начала координат на плоскости, а распределение вероятности исходов измерений над частицами синглетной пары дается выражением

$$p(\sigma_A, \sigma_B | \mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B) = \frac{1}{4} \left[1 - \sigma_A \sigma_B (\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_B) \right]. \quad (2)$$

Коэффициенты $1/2\pi$ отражают случайность выборов направлений $\mathbf{n}_A$ и $\mathbf{n}_B$.

При смещениях на $\sigma_A \mathbf{n}_A l$ и $-\sigma_B \mathbf{n}_B l$ соответственно (будем называть данный алгоритм квантовым протоколом «+») ⁴⁾

$$\langle r'^2 \rangle_+^{(1)} = r^2 + l^2, \quad (3)$$

а если смещение происходит на $\sigma_A \mathbf{n}_A l$ и $\sigma_B \mathbf{n}_B l$ (квантовый протокол «-»), то

$$\langle r'^2 \rangle_-^{(1)} = r^2 + 3l^2. \quad (4)$$

Здесь $r^2 = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)^2$. В ситуации полностью случайных блужданий в отсутствие корреляций спинов частиц (протокол «0») результат оказывается «средним» между (3) и (4):

$$\langle r'^2 \rangle_0^{(1)} = r^2 + 2l^2. \quad (5)$$

⁴⁾ Мы сохраняем обозначения, введенные в работе [12]. Они совпадают со знаками в записи вектора $\mathbf{r}'$ в (1) (см. также (10)), связывающего расположения участников после совершения последовательности шагов в рамках выбранного протокола.

Таким образом, можно утверждать, что *вероятность* сближения после одного шага выполнения квантового протокола «+» повышается по сравнению с классическим протоколом «0», т. е. он потенциально пригоден для решения задачи взаимного поиска. Аналогично, протокол «-» лучше решает задачу антипоиска.

Приведенные результаты несут очень скудную информацию об используемых стратегиях — они относятся к результатам только одного шага участников и касаются только среднеквадратичного расстояния между ними ⁵⁾. Остается неизвестной дисперсия конечного расстояния и ее зависимость от числа шагов. Еще более важная и детальная информация содержится в вероятностях сближения/расхождения, позволяющих определять шансы успеха используемых стратегий в сценариях различной длительности. Целью данной работы является построение и анализ полной модели, позволяющей сравнивать корреляции между расположениями участников при произвольной длине цепочки шагов.

2. МОДЕЛЬ

Для анализа относительного движения участников следует определить плотность вероятности $P^{(n)}(r'|r)$ оказаться на расстоянии r' друг от друга спустя n шагов протокола при условии, что начальное расстояние между участниками было равно r . В свою очередь, указанное распределение может быть получено из плотности вероятности $P^{(n)}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})$, учитывающей не только расстояние между агентами, но и угол $\varphi \doteq \angle(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, соединяющими их начальные и конечные положения соответственно:

$$P^{(n)}(r'|r) = r' \int_0^{2\pi} P^{(n)}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) d\varphi, \\ \int_0^\infty P^{(n)}(r'|r) dr' = 1. \quad (6)$$

Рассмотрим первый шаг классического протокола «0». Пусть в качестве случайных направлений смещения были выбраны векторы $\mathbf{n}_{A,B}$, ориентирован-

⁵⁾ Поскольку между параметрами последовательных смещений корреляции отсутствуют, выражения для среднеквадратичного расстояния $\langle r'^2 \rangle_{\pm,0}^{(n)}$ после n шагов отличаются от (3)–(5) множителем n перед l^2 .

ные вдоль азимутальных углов $\varphi_{A,B}$ относительно некоторой общей системы координат. Тогда

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + l\mathbf{n}_A - l\mathbf{n}_B. \quad (7)$$

В этом случае искомое распределение может быть вычислено аналитически:

$$\begin{aligned} P_0^{(1)}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_B}{2\pi} \delta^{(2)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r} - l\mathbf{n}_A + l\mathbf{n}_B) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(k|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) J_0^2(kl) k dk = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 \sqrt{4l^2|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2 - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^4}}, & |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq 2l; \\ 0, & |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| > 2l, \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

где J_n — функция Бесселя первого рода целого порядка n . Следует отметить, что возникающий интеграл с тремя функциями Бесселя одного порядка *автоматически* обращается в нуль при нарушении свойства треугольника для аргументов функций [13], т. е. даваемое этим интегралом выражение является универсально справедливым во всем диапазоне значений $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$. Условие в нижней строке фигурной скобки в (8), таким образом, лишь констатирует физически ясный результат о невозможности изменения расстояния между участниками больше чем на $2nl$ за n шагов. Это обстоятельство окажется важным в дальнейшем.

Рассматривая произвольное число шагов, характеризующихся векторами смещения $\mathbf{n}_{A,B}^{(i)}$, при помощи аналогичных рассуждений получаем

$$\begin{aligned} P_0^{(n)}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_A^{(n)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_B^{(n)}}{2\pi} \dots \\ &\dots \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_A^{(1)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_B^{(1)}}{2\pi} \delta^{(2)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r} - l \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_A^{(i)} + l \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_B^{(i)}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(k|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) J_0^{2n}(kl) k dk. \quad (9) \end{aligned}$$

В общем случае интеграл аналитически не вычисляется, однако, как и в случае (8), можно утверждать, что он обращается в нуль в диапазоне $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| > 2nl$ [13].

В случае использования квантовых протоколов связь между начальными и конечными положениями участников после n шагов дается выражениями

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + l \sum_{i=1}^n \sigma_A^{(i)} \mathbf{n}_A^{(i)} \pm l \sum_{i=1}^n \sigma_B^{(i)} \mathbf{n}_B^{(i)}, \quad (10)$$

где знаки совпадают с обозначениями квантовых протоколов. Чтобы получить выражения, аналогичные (8), необходимо дополнительно усреднить по распределению (2), а затем просуммировать по всем возможным исходам измерений:

$$P_\pm^{(n)}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(k|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) (J_0^2(kl) \pm J_1^2(kl))^n k dk. \quad (11)$$

По сравнению с (9) выражение усложняется ввиду наличия под знаком интеграла функций Бесселя различных порядков. Тем не менее и в этом случае можно показать, что полученный интеграл обращается в нуль вне физически допустимого диапазона $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq 2nl$ [14]⁶⁾. В случае $n = 1$ удается получить аналитические выражения:

$$\begin{aligned} P_+^{(1)}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) &= \begin{cases} \frac{2 - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2/2l^2}{\pi^2 \sqrt{4l^2|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2 - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^4}}, & |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq 2l; \\ 0, & |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| > 2l, \end{cases} \\ P_-^{(1)}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) &= \begin{cases} \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{2\pi^2 l^2 \sqrt{4l^2|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2 - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^4}}, & |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq 2l; \\ 0, & |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| > 2l. \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

Переход к распределениям $P_{0,\pm}^{(n)}(r'|r)$ осуществляется с помощью изменения порядка интегрирования по k и φ . При этом в силу отмеченного выше обращения в нуль интегралов с произведениями функций Бесселя для интегрирования по азимутальному углу φ можно взять интервал $(0, 2\pi)$. Лишь одна из функций Бесселя во всех рассматриваемых подынтегральных выражениях зависит от этого угла, и результирующий интеграл по φ сводится к известному интегралу Гегенбауэра [13]:

$$\int_0^{2\pi} J_0(k|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) d\varphi = 2\pi J_0(kr') J_0(kr). \quad (13)$$

⁶⁾ Главным условием обращения интеграла в нуль является тот факт, что функции Бесселя первого порядка входят в подынтегральные выражения в четных степенях. Необычное объяснение этого результата с физических позиций дано в [15], где похожие интегралы возникают при описании процессов переброса квазичастиц в кристаллических решетках.

Таким образом, распределения $P_{0,\pm}^{(n)}(r'|r)$ можно выразить в квадратурах:

$$P_0^{(n)}(r'|r) = r' \int_0^\infty J_0(kr') J_0(kr) J_0^{2n}(kl) k dk,$$

$$P_{\pm}^{(n)}(r'|r) = r' \int_0^\infty J_0(kr') J_0(kr) (J_0^2(kl) \pm J_1^2(kl))^n k dk. \quad (14)$$

В области $|r' - r| > 2nl$ указанные выражения тождественно обращаются в нуль. Отметим, что тот же самый результат можно было получить, рассматривая шаги последовательно с помощью распределения $P_{0,\pm}^{(1)}(r'|r)$ и интегрируя по промежуточным положениям участников:

$$P_{0,\pm}^{(n)}(r'|r) = \int_0^\infty dr^{(n-1)} \dots$$

$$\dots \int_0^\infty dr^{(1)} P_{0,\pm}^{(1)}(r'|r^{(n-1)}) P_{0,\pm}^{(1)}(r^{(n-1)}|r^{(n-2)}) \dots$$

$$\dots P_{0,\pm}^{(1)}(r^{(1)}|r). \quad (15)$$

Этот результат непосредственно доказывается по индукции при помощи теоремы о свертке для беселевых функций (интеграл Неймана) [13]. В этом смысле для нахождения $P_{0,\pm}^{(n)}(r'|r)$ достаточно знать лишь $P_{0,\pm}^{(1)}(r'|r)$, однако выражения (14) существенно проще для практических вычислений.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Вид распределений $P_{\pm,0}^{(n)}(r'|r)$ как функций r' при различных n приведен на рис. 1. В целом, за исключением случая $n = 1$, все зависимости имеют ряд общих черт⁷⁾. При сильно разнесенных начальных положениях частиц ($r \gg l$) все распределения

⁷⁾ Визуальное отличие графиков для $n = 1$ (рис. 1а) от остальных связано с сингулярным характером распределений $P_{0,\pm}^{(1)}(r'|r)$ (см. (8), (12)). Из равенства r и r' следует равенство и самих векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ (т.е. участники в этом случае должны совершать смещения в одном и том же направлении). $P_{0,+}^{(1)}(r'|r)$ в этой точке сингулярны, а $P_{0,-}^{(1)}(r'|r)$ обращается в нуль, что и объясняет наличие резких пиков в центральной области графика. При $r' = 0$ умножение на r' в (6) обеспечивает стремление всех кривых к нулю. При $r' = 4l$ сингулярными являются $P_{0,-}^{(1)}(r'|r)$, что в результате интегрирования по углам приводит к конечным значениям $P_{0,-}^{(1)}(r'|r)$ в правой части графика.

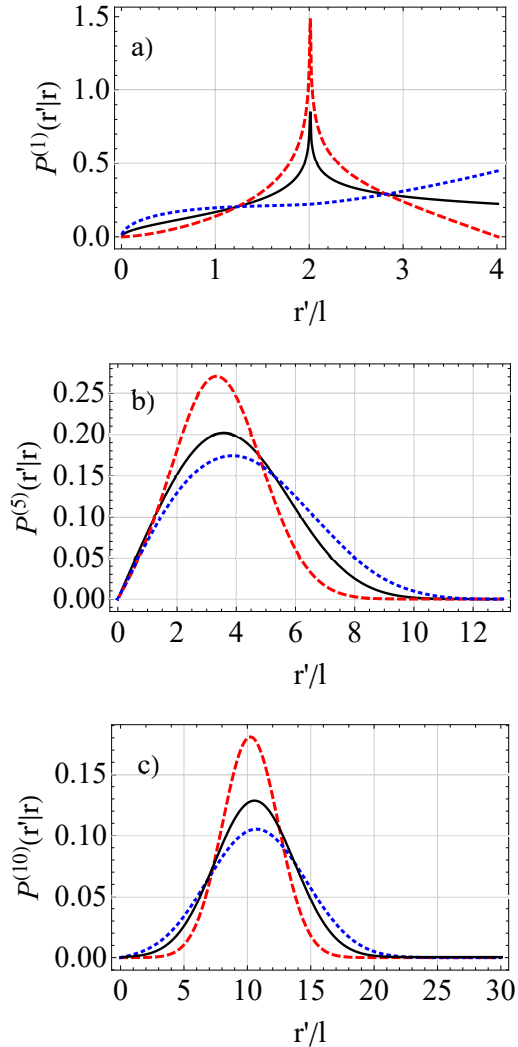


Рис. 1. Распределения $P_0^{(n)}(r'|r)$ (черные сплошные линии), $P_+^{(n)}(r'|r)$ (красные штриховые линии), $P_-^{(n)}(r'|r)$ (синие пунктирные линии) как функции r' : а) $n = 1, r = 2l$; б) $n = 5, r = 3l$; в) $n = 10, r = 10l$

имеют максимумы в точках, близких к r , и ширины порядка nl . При этом значения максимумов наибольшие в квантовом протоколе «+» и наименьшие в случае квантового протокола «-». Таким образом, исходя из общего вида функций, можно утверждать, что протокол «-» по крайней мере обеспечивает наиболее вероятное изменение взаимного расстояния между участниками.

Дальнейшие анализ и сравнение движения участников при применении различных протоколов блужданий требуют введения количественных критериев эффективности поиска/антипоиска. Наиболее простой вариант — это одновременное сравнение среднего расстояния между A и B $\langle r' \rangle_{0,\pm}^{(n)}$

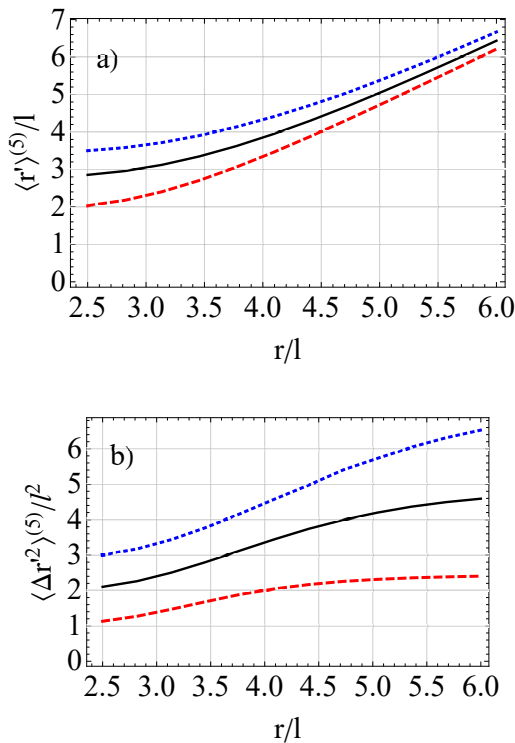


Рис. 2. Средние расстояния между участниками после $n = 5$ шагов (а) и его квадратичные дисперсии (б) как функции начального расстояния r для классических случайных блужданий (черные сплошные линии), квантового протокола «+» (красные штриховые линии) и квантового протокола «-» (синие пунктирные линии)

и его дисперсии $\langle \Delta r'^2 \rangle_{0,\pm}^{(n)}$ в результате последовательности из n шагов. Это позволит определить наиболее вероятную область локализации участников и, таким образом, оценить пригодность протоколов для тех или иных целей. Результаты вычислений представлены на рис. 2а. С увеличением начального расстояния различие r' и r становится малым, что согласуется с простыми геометрическими соображениями. Из приведенных графиков (их общий вид не меняется при увеличении числа шагов в последовательности) следует, что выводы, сделанные в [12] в результате анализа одного шага, остаются в целом справедливыми и для более длинных последовательностей шагов. Как при классических случайных блужданиях, так и при реализации квантовых протоколов расстояние между участниками в среднем увеличивается, однако использование квантовых корреляций позволяет замедлить либо ускорить расхождение. Это также подтверждается сравнением дисперсий (рис. 2б) — более медленное расхождение в случае протокола «+» сопровождается также меньшей дисперсией.

Хотя блуждания носят случайный характер, тем не менее любопытно оценить вероятности после цепочки шагов обнаружить участников в некоторой заранее заданной области. Это особенно важно для задачи поиска, так как для нее желательно собраться на как можно меньшем расстоянии друг от друга. Вероятность оказаться в определенной области $\mathcal{D}$ спустя n шагов равна

$$\text{Prob}_{0,\pm}^{(n)}(r, \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} P_{0,\pm}^{(n)}(r'|r) dr'. \quad (16)$$

В качестве области $\mathcal{D}$ можно рассматривать следующие варианты:

- 1) сближение как таковое ($\mathcal{D}_{con} = [0, r]$) либо расхождение как таковое ($\mathcal{D}_{div} = [r, r + 2nl]$);
- 2) для задачи поиска — вероятность встречи, т. е. вероятность оказаться в радиусе прямой видимости l_{vis} ($\mathcal{D}_{vis} = [0, l_{vis}]$);
- 3) для задачи антипоиска — вероятность оказаться в области шириной l_{div} на правом «крыле» распределений $P_{0,\pm}^{(n)}(r'|r)$ ($\mathcal{D}_{div} = [2nl - l_{div}, 2nl]$), т. е. удалиться на расстояние, близкое к максимально возможному.

Рассмотрим сначала задачу взаимного поиска участников в течение фиксированного числа шагов n и будем полагать, что начальное расстояние между участниками достаточно велико — $r \approx 2nl$. Дистанцию прямой видимости l_{vis} разумно выбрать равной длине шага протокола l . При таких условиях можно пренебречь вероятностью встречи участников до окончания всей последовательности шагов, т. е. можно использовать распределения (16), однако обратной стороной этих предположений является малая вероятность этой встречи в целом.

На рис. 3а представлены вероятности сближения как такового⁸). Видно, что в терминах этого критерия общие соотношения между квантовыми и классическими протоколами такие же, как в терминах среднего и дисперсии: протокол «+» обеспечивает выигрыш в вероятности сближения, а протокол «-» — в вероятности расхождения. Относительный выигрыш в вероятности сближения/расхождения по сравнению с классическими случайными блужданиями может достигать 100 %.

Рассмотрим теперь эффективность протоколов в терминах вероятностей встречи, проиллюстрированных на рис. 3б. Как видно, при достаточно больших начальных расстояниях r квантовый протокол «-» превосходит как классический протокол, так и

⁸) Нет необходимости рассматривать отдельно вероятность расхождения как такового, поскольку $\mathcal{D}_{con} = \overline{\mathcal{D}}_{div}$.

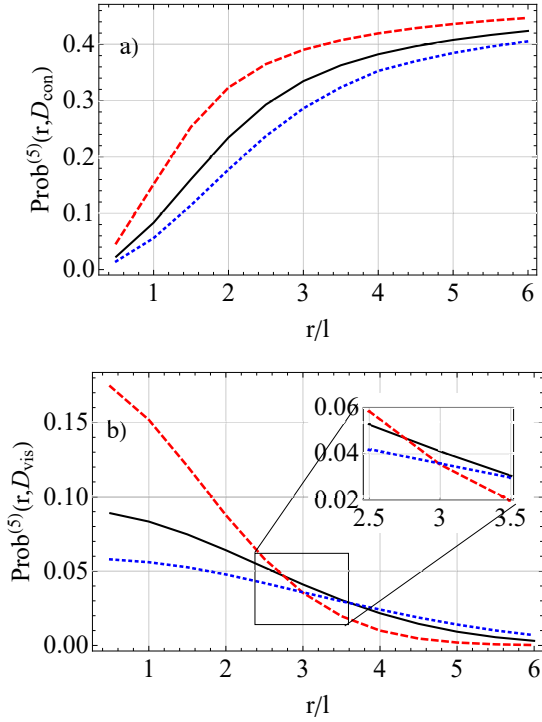


Рис. 3. Вероятности сближения на любое расстояние $r' < r$ (a) и на дистанцию прямой видимости $l_{vis} = l$ (b) после последовательности из $n = 5$ шагов как функции начального расстояния r для классических случайных блужданий (черные сплошные линии), квантового протокола «+» (красные штриховые линии) и квантового протокола «-» (синие пунктирные линии). На рис. b в окрестности $r = 3l$ оба квантовых протокола не дают преимущества по сравнению с классическим

квантовый протокол «+». Качественное объяснение этого эффекта таково: несмотря на большее среднее расстояние между участниками в результате выполнения протокола «-», его дисперсия также увеличивается. В результате вероятность оказаться в области малых r' повышается по сравнению с протоколом «+» и классическим протоколом. Таким образом, более сильные флуктуации в квантовом протоколе «-» компенсируют увеличение среднего расстояния между участниками. При уменьшении начального расстояния различие между средними конечными расстояниями $\langle r' \rangle^{(n)}$ в различных протоколах становится более выраженным (см. рис. 2a), а различие флуктуаций, наоборот, уменьшается (см. рис. 2b). Поэтому при малых начальных расстояниях квантовый протокол «+» более эффективен для задачи поиска. Примечательно, что между двумя областями, в которых наиболее эффективен тот или иной квантовый протокол, существует промежуточная область (на рис. 3b это небольшая окрестность

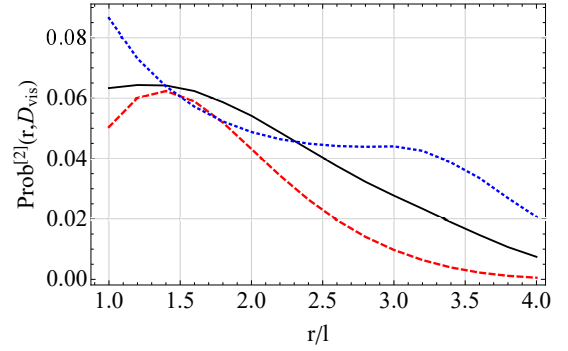


Рис. 4. Вероятности сближения на дистанцию прямой видимости $l_{vis} = l$ на втором шаге как функции начального расстояния r для классических случайных блужданий (черная сплошная линия), квантового протокола «+» (красная штриховая линия) и квантового протокола «-» (синяя пунктирная линия)

$r = 3l$, более подробно представленная на вставке), в которой оба протокола проигрывают классическим случайным блужданиям.

Анализ вероятностей встречи при малых начальных расстояниях⁹⁾ требует дополнительных соображений. Дело в том, что в этом случае существует неучтенная в (16) вероятность того, что участники окажутся в заданной области $\mathcal{D}_{vis}$ раньше, чем за n шагов. Пусть минимально необходимое для этого при заданном r количество шагов равно n_{min} . К примеру, для сближения на l_{vis} оно, очевидно, составляет целую часть числа $(r - l_{vis})/2l$ (с округлением вверх). В этом случае следует дополнительно рассчитать вероятность того, что попадание в заданную область $\mathcal{D}$ произойдет в *точности* на шаге с номером n :

$$\text{Prob}_{0,\pm}^{[n]}(r, \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} dr^{(n)} \int_{\overline{\mathcal{D}}} dr^{(n-1)} \dots \int_{\overline{\mathcal{D}}} dr^{(1)} P_{0,\pm}^{(1)}(r^{(n)} | r^{(n-1)}) \dots P_{0,\pm}^{(1)}(r^{(1)} | r), \quad (17)$$

где область $\overline{\mathcal{D}}$ дополняет $\mathcal{D}$ до полной области определения функции $P_{0,\pm}^{(n)}(r' | r)$. С учетом того, что впервые указанное событие может произойти не ранее шага с номером n_{min} , можно привести (17) к виду

⁹⁾ Имеются в виду расстояния $r > l_{vis}$, поскольку в ином случае участники обнаружат друг друга сразу же.

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{0,\pm}^{[n]}(r, \mathcal{D}) = & \int_{\overline{\mathcal{D}}} dr^{(n)} \int_{\overline{\mathcal{D}}} dr^{(n-1)} \dots \\ & \dots \int_{\overline{\mathcal{D}}} dr^{(n_{\min}+1)} \int_{\overline{\mathcal{D}}} dR P_{0,\pm}^{(1)}(r^{(n)}|r^{(n-1)}) \dots \\ & \dots P_{0,\pm}^{(1)}(r^{(n_{\min}+1)}|R) P_{0,\pm}^{(n_{\min})}(R|r). \end{aligned} \quad (18)$$

В случае $n = n_{\min}$ это выражением совпадает с (17), но при $n > n_{\min}$ оно оказывается скорректированным в меньшую сторону. Результаты вычисления для наиболее простого случая двух шагов приведены на рис. 4. Основное отличие от вероятностей, приведенных на рис. 3 — иное поведение функций при малых r . Наиболее выгодным оказывается использование протокола «−», несмотря на установленное более быстрое расхождение в терминах среднего расстояния. Кроме того, как и в рассмотренном выше случае сходимости в результате цепочки шагов, имеется область, в которой оба квантовых протокола проигрывают классическому.

Наконец, можно было бы рассмотреть вероятность того, что расстояние между участниками окажется в заданном интервале $\mathcal{D}$ в любой момент выполнения протокола блужданий:

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{0,\pm}^{\{n\}}(r, \mathcal{D}) = & 1 - \int_{\overline{\mathcal{D}}} dr^{(n)} \dots \\ & \dots \int_{\overline{\mathcal{D}}} dr^{(1)} P_{0,\pm}^{(1)}(r^{(n)}|r^{(n-1)}) \dots P_{0,\pm}^{(1)}(r^{(1)}|r). \end{aligned} \quad (19)$$

Это наиболее актуально для случая длинных последовательностей шагов или малых начальных расстояний. Однако, поскольку при использовании любого протокола расстояние между частицами в среднем увеличивается, увеличение числа шагов в протоколе не приведет к существенному повышению вероятности встречи. Поэтому по крайней мере в контексте задачи поиска анализ выражения (19) не принесет существенно новой информации по сравнению с анализом в терминах критериев (16) и (17). Что касается задачи антипоиска, то для нее квантовый протокол «−» во всех случаях является наиболее эффективным, поскольку обеспечивает наиболее быстрое увеличение среднего расстояния между участниками.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проанализировали два квантовых протокола в задаче о случайных блужданиях двух участников с точки зрения вероятностей их сближения

или расхождения. Несмотря на достаточно простые соотношения между изменениями среднего квадрата расстояний за один шаг для квантовых протоколов (один из них, протокол «−», дает более быстрое расхождение по сравнению с классическими блужданиями, а другой, протокол «+» — более медленное, причем на ту же самую величину), анализ более длинных последовательностей шагов обнаруживает ряд нетривиальных соотношений. Если задаться целью определения вероятности обнаружить участников в определенном диапазоне расстояний спустя определенное число шагов, то в зависимости от начального расстояния может быть эффективен тот или иной квантовый протокол. Протокол «+» оказывается более эффективным при небольших начальных расстояниях между участниками, а протокол «−» — при больших по сравнению с длиной шага. При этом существует промежуточный интервал значений начального расстояния, при которых оба протокола могут проигрывать по эффективности обычным случайным блужданиям. В то же время при рассмотрении задачи о наиболее эффективном удалении друг от друга выбор в пользу квантового протокола «−» всегда обеспечивает выигрыш в терминах как вероятности расхождения в целом, так и удаления на максимально возможное расстояние.

Более быстрое либо более медленное движение участников может быть интерпретировано как движение по поверхности с ненулевой эффективной кривизной [12]. Построенная модель анализа цепочек шагов позволяет поставить вопрос об изменении этой эффективной кривизны в процессе движения. Это открывает новые перспективы для построения нового «геометрического» подхода к анализу квантовых корреляций.

Финансирование. Работа выполнена в рамках Государственного задания (проект 124041700105-5) в Институте автоматизации и электрометрии СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
2. N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, and S. Wehner, Rev. Mod. Phys. **86**, 419 (2014).
3. K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, and V. Vedral, Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012).
4. C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).

5. D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurte, and A. Zeilinger, *Nature* **390**, 575 (1997).
6. A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
7. M. Hillery, V. Buzek, and A. Berthiaume, *Phys. Rev. A* **59**, 1829 (1999).
8. C. H. Bennett and G. Brassard, *Proc. IEEE Int. Conf. on Computers, Systems and Signal Processing* (IEEE, 1984), pp. 175–179 (1984).
9. G. Brassard, A. Broadbent, and A. Tapp, *Found. Phys.* **35**, 1877 (2005).
10. N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 803 (1993).
11. A. Peres, *Phys. Lett. A* **151**, 107 (1990).
12. A. M. Rostom, V. A. Tomilin, and L. V. Il'ichov, *Chinese J. Phys.* **90**, 1095 (2024).
13. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1949).
14. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 2, *Специальные функции*, Физматлит, Москва (2003).
15. J. Covey and D. L. Maslov, arXiv:2408.08155v3 (2024).