ЖЭТФ, 2025, том 168, вып. 4 (10), стр. 530–536 © 2025

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В МОДЕЛИ ДВУПОРИСТОЙ РЕЗКО КОНТРАСТНОЙ СРЕДЫ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

***П. С. Кондратенко*** [a,b*], ***К. В. Леонов*** [a]

[a] *Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук 115191, Москва, Россия*

[b] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) 141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 14 июля 2025 г.,
после переработки 23 июля 2025 г.
Принята к публикации 23 июля 2025 г.

Разработана асимптотическая теория переноса примеси в модели статистически однородной резко контрастной двупористой среды с параметрами (скорость адвекции, коэффициент диффузии, а также характерные времена модели), имеющими крупномасштабные пространственные зависимости. Предполагается, что расстояние от основной области локализации примеси до точки наблюдения значительно превышает размер этой области. Результат для концентрации сведен к одномерным интегралам вдоль линии траектории концентрационного сигнала. Последняя определяется решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка для единичного вектора касательной к траектории.

**DOI:** 10.31857/S0044451025100098

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При аналитическом описании неклассических процессов переноса среда на больших пространственных масштабах часто предполагается в среднем однородной [1–5]. Между тем реальные среды обладают крупномасштабными неоднородностями. В такой ситуации даже классические процессы адвекции–диффузии требуют выполнения довольно трудоемких численных расчетов. Дополнительные, причем принципиальные, трудности возникают в случае неклассических процессов, для которых управляющие уравнения для концентрации являются интегродифференциальными, а входящие туда интегральные ядра в деталях остаются неизвестными.

С целью преодоления этих трудностей, в работе одного из авторов настоящей статьи [6] предложен новый подход, базирующийся на асимптотическом описании процессов переноса, который учитывает возможность крупномасштабной зависимости структурных характеристик среды от пространственных координат. Суть подхода базируется на двух моментах. Во-первых, согласно анализу, формирование концентрации на далеких расстояниях обусловлено коротковолновой частью механизма переноса. А во-вторых, асимптотики концентрации на далеких расстояниях носят экспоненциальный характер. Формально, таким образом, ситуация напоминает ту, которая имеет место в волновой оптике или квантовой механике, когда становится применимым приближение геометрической оптики или квазиклассическое приближение соответственно.

Асимптотический подход получил свое дальнейшее развитие в работах [7–9] применительно к классической диффузии и [10–12] по отношению к переносу примеси посредством диффузии и адвекции.

В настоящей работе представлена асимптотическая теория переноса примеси в важных для практических приложений статистически однородных резко контрастных средах, обладающих крупномасштабными неоднородностями. Примерами таких сред являются песчаные и глинистые геологические формации (см. [5, 13, 14]).

Дальнейшая структура статьи следующая. В разд. 2 дана постановка задачи. Раздел 3 посвя-

* E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru

щен выводу формулы для квазиэйконала — показателя экспоненты в выражении для концентрации. В разд. 4 получены соотношения для предэкспоненты. В разд. 5 найдены выражения для концентрации в различных пространственно-временных интервалах. В Заключении кратко подведены итоги.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Среда в модели статистически однородной резко контрастной (двупористой) среды, впервые предложенной в работах [15, 16], представляется в виде набора проницаемых каналов, проникающих во всю среду, и слабопроницаемых изолированных пористых блоков. Как каналы, так и блоки насыщены влагой. Средняя ширина канала намного меньше среднего размера блока, $a \ll b$. Механизм переноса примеси представляет собой адвекцию и диффузию в каналах, и диффузию внутри пористых блоков. На стенках каналов и порах в блоках имеет место сорбция примеси. Прямой перенос между блоками отсутствует, поскольку коэффициент диффузии в блоках мал по сравнению с таковым в каналах, а адвекции в блоках нет вовсе. Корреляционная длина в распределении характеристик среды имеет порядок размера блока $b$, типичная величина которого около 10 см [17].

Уравнение переноса концентрации примеси $c(\mathbf{r},t)$, усредненной по объему порядка корреляционной длины, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[c(\mathbf{r},t)+\int\limits_0^t dt'\varphi(\mathbf{r},t-t')c(\mathbf{r},t')\right]+ \\ +\mathrm{div}\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})c(\mathbf{r},t)-D(\mathbf{r})\nabla c(\mathbf{r},t)\right]=0, \qquad (1)$$

$$c(\mathbf{r},0)=N\delta(\mathbf{r}).$$

Здесь $\mathbf{u}$ — средняя скорость адвекции, $D$ — коэффициент, учитывающий вклад молекулярной диффузии и дисперсии ($\sim ub$) (из-за извилистости каналов). Второй член в квадратных скобках в уравнении (1) отвечает за обмен примесью между каналами и блоками. Величина $N$ представляет собой полное число частиц примеси. Начало координат выбрано в точке локализации источника примеси в начальный момент времени (источник считается точечным). Предполагаем, что жидкая компонента среды является несжимаемой, так что уравнение непрерывности имеет вид

$$\mathrm{div}\mathbf{u}=0. \qquad (2)$$

В представлении Лапласа, $c_p(\mathbf{r})=\int_0^\infty dtc(\mathbf{r},t)e^{-pt}$, уравнение переноса (1) принимает вид

$$\Lambda_p(\mathbf{r})c_p(\mathbf{r})+\mathrm{div}\left(\mathbf{u}(\mathbf{r})c_p(\mathbf{r})-D(\mathbf{r})\nabla c_p(\mathbf{r})\right)=N\delta(\mathbf{r}), \qquad (3)$$

где

$$\Lambda_p(\mathbf{r})=p(1+\varphi_p(\mathbf{r})), \quad \varphi_p(\mathbf{r})=\int\limits_0^\infty dte^{-pt}\varphi(\mathbf{r},t). \qquad (4)$$

Функция $\Lambda_p(\mathbf{r})$ в предельных интервалах имеет вид

$$\Lambda_p(\mathbf{r})\cong\begin{cases} p, & p\gg t_a^{-1},\\ \sqrt{\frac{p}{t_a}}, & t_b^{-1}\ll p\ll t_a^{-1},\\ \sqrt{\frac{t_b}{t_a}}p, & p\ll t_b^{-1},\end{cases} \qquad (5)$$

где $t_a\sim a^2/4d$ — характерное время диффузии примеси из каналов в блоки до глубины порядка толщины каналов; $t_b\sim b^2/4d$ — характерное время установления равновесия по концентрации между каналами и блоками; $d$ — эффективный коэффициент диффузии в блоках. В соответствии с этими определениями имеет место неравенство $t_a\ll t_b$. Отметим, что в среде с крупномасштабными неоднородностями функция $\varphi(t)$ вместе с $t_a$ и $t_b$, а также величины $\mathbf{u}$ и $D$ являются функциями координат.

Нас будет интересовать концентрация на асимптотически далеких расстояниях от источника примеси, когда $r'\gg R(t)$, где $R(t)$ — размер основной области ее локализации в момент времени $t$, а $r'$ — расстояние от этой области до точки наблюдения $\mathbf{r}$. Тогда решение уравнения (3) представляется в форме

$$c_p(\mathbf{r})=A_p(\mathbf{r})e^{-\Gamma_p(\mathbf{r})}, \qquad (6)$$

где показатель экспоненты удовлетворяет неравенству $\Gamma_p(\mathbf{r})\gg 1$, благодаря которому в задаче возникает малый параметр

$$\xi=\left(|\nabla\Gamma_p|\min\{L,r'\}\right)^{-1},\ \xi\ll 1. \qquad (7)$$

Здесь $L$ — характерный линейный масштаб неоднородности среды, определяемый пространственной зависимостью величин $\mathbf{u}$, $D$, $t_a$ и $t_b$.

## 3. КВАЗИЭЙКОНАЛ

Подставляя выражение (6) в уравнение (3), в нулевом порядке по малому параметру $\xi$ получаем уравнение

$$\Lambda_p(\mathbf{r})+(\mathbf{u}(\mathbf{r})\nabla\Gamma_p(\mathbf{r}))-D(\mathbf{r})(\nabla\Gamma_p(\mathbf{r}))^2=0, \qquad (8)$$

представляющее собой уравнение в частных производных первого порядка, которое по своей форме аналогично уравнению эйконала в геометрической оптике [18]. Из уравнения (8) следует

$$\nabla\Gamma_p(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{F}_p(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{u}(\mathbf{r})}{2D(\mathbf{r})} + \boldsymbol{\nu} n_p(\mathbf{r}), \tag{9}$$

где

$$n_p(\mathbf{r}) = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{u}(\mathbf{r})}{2D(\mathbf{r})}\right)^2 + \frac{\Lambda_p(\mathbf{r})}{D(\mathbf{r})}}, \tag{10}$$

а $\boldsymbol{\nu}$ — вещественный безразмерный единичный вектор, $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$. Далее показатель экспоненты $\Gamma_p(\mathbf{r})$ в (6) будем называть квазиэйконалом.

Решение уравнения (8), подобно описанному в [18], сводится к линейному интегралу вдоль траектории концентрационного сигнала — квазилуча:

$$\Gamma_p = \int\limits_0^{\mathbf{r}} (\mathbf{dl}\mathbf{F}_p), \quad \mathbf{dl} = \boldsymbol{\nu} dl, \tag{11}$$

где $dl$ — дифференциальный элемент длины вдоль квазилуча. Траектория квазилуча находится из вариационного принципа — аналога принципа Ферма:

$$\delta_l \Gamma_p = 0, \tag{12}$$

где символ $\delta_l$ обозначает вариацию квазиэйконала $\Gamma_p$ относительно траектории. Равенство (12) означает, что в первом порядке по бесконечно малому изменению траектории величина интеграла (11) остается неизменной. Аналогично работе [9], из равенства (12) находится уравнение для траектории:

$$[\boldsymbol{\nu}\mathrm{rot}\mathbf{F}_p] = 0. \tag{13}$$

## 4. ПРЕДЭКСПОНЕНТА

В первом порядке по малому параметру $\xi$ подстановка равенства (6) в уравнение (3) приводит к уравнению для предэкспоненты $A_p(\mathbf{r})$:

$$\frac{d}{dl}\ln\left(A_p^2(\mathbf{r})D(\mathbf{r})n_p(\mathbf{r})\right) + \mathrm{div}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}) = 0. \tag{14}$$

Его решение, которое удовлетворяет вытекающему из уравнения (1) условию

$$c_p(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\to 0} = \frac{N}{4\pi D(0) r}, \tag{15}$$

имеет вид

$$\begin{gathered} A_p(\mathbf{r}) = \frac{N}{4\pi D(0) l(\mathbf{r})}\sqrt{\frac{n_p(0)D(0)}{n_p(\mathbf{r})D(\mathbf{r})}}e^{-H(\mathbf{r})}, \\ H(\mathbf{r}) = \int\limits_0^{\mathbf{r}} dl\left(\frac{\mathrm{div}\boldsymbol{\nu}}{2} - \frac{1}{l}\right). \end{gathered} \tag{16}$$

При выводе выражения (16) были использованы следующие свойства, справедливые на малых расстояниях от источника примеси $l \ll L$, где все характеристики среды можно приближенно считать независимыми от координат и равными соответствующим значениям при $\mathbf{r} = 0$:

$$\boldsymbol{\nu}\big|_{\mathbf{r}\to 0} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{2}{r}.$$

## 5. АСИМПТОТИКИ КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИМЕСИ

Концентрация примеси как функция координат и времени получается из (6) путем обратного преобразования Лапласа:

$$c(\mathbf{r},t) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} A_p(\mathbf{r})\exp[-\Gamma_p(\mathbf{r}) + pt], \quad \mathrm{Re}\, a > 0.$$

Интеграл здесь благодаря неравенству $\Gamma_p(\mathbf{r}) \gg 1$ берется методом стационарной фазы. В итоге для концентрации получается выражение

$$c(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r},t)\exp[-\Gamma(\mathbf{r},t)], \tag{17}$$

где

$$\Gamma(\mathbf{r},t) = \Gamma_{p_0}(\mathbf{r},t) - p_0 t, \tag{18}$$

$$A(\mathbf{r},t) = \frac{A_{p_0}(\mathbf{r})}{\sqrt{2\pi|\Gamma''_{p_0}(\mathbf{r})|}}, \tag{19}$$

а $p_0 = p_0(\mathbf{r},t)$ — стационарная точка, определяемая из условия

$$\left.\frac{\partial\Gamma_p(\mathbf{r})}{\partial p}\right|_{p=p_0} = t, \tag{20}$$

и

$$\Gamma''_{p_0}(\mathbf{r}) = \left.\frac{\partial^2\Gamma_p(\mathbf{r})}{\partial p^2}\right|_{p=p_0}. \tag{21}$$

В последнем равенстве при вычислении второй производной по переменной Лапласа следует учитывать зависимость от $p$ не только подынтегрального выражения в (11), но и траектории квазилуча, вдоль которой ведется интегрирование. Исключения представляют интервалы между характерными временами задачи, когда зависимости квазиэйконала $\Gamma_p(\mathbf{r})$ от переменных $\mathbf{r}$ и $p$ факторизуются — в этом случае траектория квазилуча не зависит от переменной Лапласа и реализуются характерные режимы переноса, включая неклассические. Именно для таких интервалов получим далее замкнутые выражения для концентрации в координатно-временном представлении.

Для начала заметим, что помимо времен $t_a$ и $t_b$ (см. (5)) в нашей задаче есть еще одно характерное время $t_u = 4D/u^2$, определяющее момент, когда смещения примеси за счет диффузии $\sim \sqrt{4Dt_u}$ и, благодаря адвекции, $ut_u$ сравниваются по величине. При этом время $t_u$ может быть меньше или больше обоих времен $t_a$ и $t_b$, а может и оказаться между ними. Соответственно, учитывая, что $t_a \ll t_b$, существует всего шесть характерных интервалов, куда может попасть текущее время $t$. Далее рассмотрим отдельно три интервала, когда $t \ll t_u$, и столько же, когда $t \gg t_u$.

Помимо этих неравенств, мы будем также считать выполненными условия: $\sqrt{4Dt} \ll L$, $ut_u \ll L$.

### 5.1. Малые времена

Учитывая то, что в асимптотике $p_0(\mathbf{r},t)t > 1$ при $t \ll t_u$, согласно (9), (10) имеем выражение для градиента квазиэйконала

$$\nabla\Gamma_p(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nu} n_p(\mathbf{r}), \quad n_p(\mathbf{r}) \cong \sqrt{\frac{\Lambda_p(\mathbf{r})}{D(\mathbf{r})}}, \tag{22}$$

в котором возникает факторизация зависимостей от координат и переменой Лапласа:

$$n_p(\mathbf{r}) \cong \begin{cases} \sqrt{\dfrac{p}{D(0)}} m_1(\mathbf{r}), & p \gg t_a^{-1}, \\ \left(\dfrac{p}{D^2(0)t_a(0)}\right)^{1/4} m_2(\mathbf{r}), & t_b^{-1} \ll p \ll t_a^{-1}, \\ \sqrt{\dfrac{p}{\widetilde{D}(0)}} m_3(\mathbf{r}), & p \ll t_b^{-1}. \end{cases} \tag{23}$$

Здесь
$m_1(\mathbf{r}) = \sqrt{D(0)/D(\mathbf{r})}$, $m_2(\mathbf{r}) = [t_a(0)/t_a(\mathbf{r})]^{1/4} m_1(\mathbf{r})$, $m_3(\mathbf{r}) = \sqrt{\widetilde{D}(0)/\widetilde{D}(\mathbf{r})}$, $\widetilde{D} = \sqrt{t_a/t_b}D$.

Подставляя выражения (23) в (22), на основе (11) получим результат для $\Gamma_p(\mathbf{r})$:

$$\Gamma_p(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{p}{D(0)}}\psi_1(\mathbf{r}), \quad p \gg t_a^{-1}, \tag{24}$$

$$\Gamma_p(\mathbf{r}) = \left[\frac{p}{D^2(0)t_a(0)}\right]^{1/4} \psi_2(\mathbf{r}), \quad t_b^{-1} \ll p \ll t_a^{-1}, \tag{25}$$

$$\Gamma_p(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{p}{\widetilde{D}(0)}}\psi_3(\mathbf{r}), \quad p \ll t_b^{-1}, \tag{26}$$

где введена величина $\psi_i(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} dl m_i(\mathbf{r})$, $i = 1,2,3$.

Из уравнения (13) с учетом (22) и (23) вытекает уравнение для единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$ касательной к траектории:

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}_i}{dl} = \frac{\nabla m_i(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\nu}_i(\boldsymbol{\nu}_i \nabla m_i(\mathbf{r}))}{m_i(\mathbf{r})}, \quad i = 1,2,3. \tag{27}$$

Таким образом, величина квазиэйконала для случая малых времен определяется выражением (11) (и, соответственно, выражениями (24)–(26)), в котором интегрирование происходит по траектории квазилуча, определяемой уравнением (27) для единичного вектора касательной к траектории.

Асимптотики концентрации примеси определяются тем, какому из интервалов в (5) принадлежит стационарное значение $p_0$ переменной Лапласа в (17). Подстановка (16) и (24)–(26) в (17) с учетом (18)–(21) приводит к следующим результатам, которые описывают первые по удаленности от источника примеси ступени асимптотик во временных интервалах:

$$c(\mathbf{r},t) = \frac{N}{[4\pi D(0)t]^{3/2}} \left[\frac{D(0)}{D(\mathbf{r})}\right]^{1/4} \frac{\psi_1(\mathbf{r})}{l(\mathbf{r})} \times \\ \times \exp\left[-\Gamma_1(\mathbf{r},t) - H_1(\mathbf{r})\right], \quad \Gamma_1(\mathbf{r},t) = \frac{\psi_1^2(\mathbf{r})}{4D(0)t} \tag{28}$$

при $t/\Gamma_1(\mathbf{r},t) \ll t_a$, $t_u$,

$$c(\mathbf{r},t) = \frac{N}{\sqrt{24\pi^3}D(0)tl(\mathbf{r})} \left[\frac{D(0)}{D(\mathbf{r})}\right]^{1/4} \left[\frac{t_a(\mathbf{r})}{t_a(0)}\right]^{1/8} \times \\ \times \sqrt{\frac{\Gamma_2(\mathbf{r},t)}{3}} \exp\left[-\Gamma_2(\mathbf{r},t) - H_2(\mathbf{r})\right], \\ \Gamma_2(\mathbf{r},t) = 3\left[\frac{\psi_2(\mathbf{r},t)}{4\sqrt{D(0)\sqrt{t_a(0)t}}}\right]^{4/3} \tag{29}$$

при $t_a \ll 3t/\Gamma_2(\mathbf{r},t) \ll t_b$, $t_u$,

$$c(\mathbf{r},t) = \frac{N}{[4\pi\widetilde{D}(0)t]^{3/2}} \left[\frac{\widetilde{D}(0)}{\widetilde{D}(\mathbf{r})}\frac{t_a(0)}{t_b(0)}\frac{t_a(\mathbf{r})}{t_b(\mathbf{r})}\right]^{1/4} \frac{\psi_3(\mathbf{r})}{l(\mathbf{r})} \times \\ \times \exp\left[-\Gamma_3(\mathbf{r},t) - H_3(\mathbf{r})\right], \quad \Gamma_3(\mathbf{r},t) = \frac{\psi_3^2(\mathbf{r})}{4\widetilde{D}(0)t} \tag{30}$$

при $t_b \ll t/\Gamma_3(\mathbf{r},t) \ll \sqrt{t_b/t_a}t_u$.

Заметим, что основное отличие в результатах модели с пространственно-зависимыми параметрами от модели с постоянными параметрами сводится к замене расстояний от источника примеси до точки наблюдения $\mathbf{r}$ соответствующими им длинами концентрационного пути — интегралами

$\psi_i(\mathbf{r})$ вдоль траектории концентрационных сигналов. Отсюда следует, что выражения (28), (29) и (30) отвечают режимам переноса, определяемым зависимостью от времени размера основной области локализации примеси $R(t)$: быстрой классической диффузии, $R(t) \sim [D(0)t]^{1/2}$, субдиффузии, $R(t) \sim [D(0)\sqrt{t_a(0)t}]^{1/2}$, и медленной классической диффузии, $R(t) \sim [\widetilde{D}(0)t]^{1/2}$, соответственно (см. [5]).

Оценки величины квазиэйконала $\Gamma(\mathbf{r}, t)$, в зависимости от отношения удаленности точки наблюдения $r'$ от основной области локализации примеси к размеру этой области $R(t)$, для относительно малых времен получаются из асимптотичеких формул (28)–(30): $\Gamma \sim [r'/R(t)]^2$ для режимов диффузии и $\Gamma \sim [r'/R(t)]^{4/3}$ для субдиффузии.

Обратим также внимание на то, что формулы (28)–(30) пригодны для описания многоступенчатой пространственной структуры асимптотики концентрации, возникающей из-за смены режимов переноса во времени (см. [5]). Действительно, пусть текущее время лежит в интервале $t_a \ll t \ll t_b$. Тогда формула (29) описывает ближнюю по удаленности от основной области локализации примеси ступень. При фиксированном времени с ростом пространственного аргумента благодаря возрастанию величины квазиэйконала $\Gamma_2(\mathbf{r}, t)$ неравенство в (29) нарушается, а его место займет неравенство из формулы (28). Это означает, что формула (29) описывает вторую ступень асимптотики, и, таким образом, асимптотика концентрации при $t_a \ll t \ll t_b$ является двухступенчатой. Аналогичным образом асимптотика концентрации при $t \gg t_b$ является трехступенчатой — первая, вторая и третья ступени описываются формулами (30), (29) и (28) соответственно.

### 5.2. Большие времена

На больших временах, когда основной вклад в перенос примеси дает адвекция, траектория квазилуча должна быть близкой к линии тока. Последняя по определению является линией, в каждой точке которой касательная совпадает по направлению со скоростью адвекции. В этом случае единичный вектор касательной к квазилучу можно представить в виде

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_0 + \delta\boldsymbol{\nu}, \quad |\delta\boldsymbol{\nu}| \ll 1, \tag{31}$$

где

$$\boldsymbol{\nu}_0 = \frac{\mathbf{u}}{u}. \tag{32}$$

При этом благодаря равенству $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$ с точностью до поправки второго порядка малости имеем

$$(\boldsymbol{\nu}_0 \delta\boldsymbol{\nu}) = 0. \tag{33}$$

Переменная Лапласа, отвечающая большим временам, удовлетворяет неравенству

$$\Lambda_p t_u \ll 1, \tag{34}$$

для которого выражение градиента квазиэйконала (9), (10) можно приближенно записать в виде

$$\nabla\Gamma_p(\mathbf{r}) \cong -\frac{\mathbf{u}}{2D} + \boldsymbol{\nu}\frac{u}{2D} + \boldsymbol{\nu}_0 \delta n_p, \tag{35}$$

где

$$\delta n_p \cong \frac{\Lambda_p}{u} - \frac{D\Lambda_p^2}{u^3}, \quad |\delta n_p| \ll \frac{u}{2D}. \tag{36}$$

С учетом соотношений (33)–(36) выражение для $\Gamma_p(\mathbf{r})$ принимает вид

$$\Gamma_p(\mathbf{r}) = \Gamma_p^{\parallel}(\mathbf{r}) + \Gamma_p^{\perp}(\mathbf{r}), \tag{37}$$

где

$$\Gamma_p^{\parallel}(\mathbf{r}) = \int\limits_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \left( \frac{\Lambda_p}{u} - \frac{D\Lambda_p^2}{u^3} \right), \tag{38}$$

$$\Gamma_p^{\perp}(\mathbf{r}) = \int\limits_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \frac{u - (\mathbf{u}\boldsymbol{\nu})}{2D} \cong \int\limits_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \frac{u}{4D} (\delta\boldsymbol{\nu})^2. \tag{39}$$

Величина $dl$ в (38), (39) и далее является дифференциальным элементом длины вдоль линии тока, вектор $\mathbf{r}^{\parallel}$ обозначает проекцию точки наблюдения $\mathbf{r}$ на линию тока. Другими словами, принадлежащая линии тока точка $\mathbf{r}^{\parallel}$ соответствует минимальному расстоянию от точки наблюдения $\mathbf{r}$.

Далее найдем малую добавку к единичному вектору касательной к траектории квазилуча $\delta\boldsymbol{\nu}$, которая определяет отклонение траектории квазилуча от линии тока. Подстановка выражения (31) в уравнение (13) в первом порядке по малой величине $\delta\boldsymbol{\nu}$ приводит к уравнению

$$[\boldsymbol{\nu}_0 \mathrm{rot}\mathbf{N}] = 0, \tag{40}$$

где вектор $\mathbf{N}$ определен равенством

$$\mathbf{N} = \frac{u}{2D}\delta\boldsymbol{\nu}. \tag{41}$$

Раскрывая левую часть уравнения (40) с учетом условия (33), приходим к уравнению

$$\frac{dN_i}{dl} + a_{ik}(l)N_k = 0, \quad (\boldsymbol{\nu}_0\mathbf{N})|_{l=0} = 0, \tag{42}$$

где

$$a_{ik}(l) = (\delta_{il} - \nu_{0i}\nu_{0l})\frac{\partial \nu_{0k}}{\partial x_l}.$$

Решение уравнения (42) для $\delta\boldsymbol{\nu}$ должно удовлетворять условию

$$\int\limits_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl\delta\boldsymbol{\nu}(l) = \mathbf{r}^{\perp}, \quad \mathbf{r}^{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}^{\parallel}.$$

Также предполагаем, что кратчайшее расстояние от точки наблюдения до линии тока удовлетворяет условию $\left|\mathbf{r}^{\perp}\right| \ll L$.

Стоит отметить, что решение уравнения (42) для $\delta\boldsymbol{\nu}$ (и, следовательно, выражение для поперечной компоненты квазиэйконала $\Gamma_p^{\perp}(\mathbf{r})$ из (39)) не зависит от переменной Лапласа $p$.

Для вычисления предэкспоненты $A_p$ воспользуемся равенством (16), приближенным выражением

$$n_p(\mathbf{r}) \cong \frac{u}{2D},$$

а также вытекающим из (32) соотношением

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\nu}_0 = -\frac{d\,\ln u}{dl}.$$

В итоге уравнение (14) приобретает вид

$$\frac{d\,\ln A_p}{dl} = -\frac{1}{2}\mathrm{div}\delta\boldsymbol{\nu}, \tag{43}$$

решение (43) приводит к следующему результату:

$$\begin{gathered} A_p(\mathbf{r}) = \frac{N}{4\pi D(0)l(\mathbf{r})}\exp\left[-H(\mathbf{r}^{\parallel})\right], \\ H(\mathbf{r}^{\parallel}) = \int\limits_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl\left(\frac{1}{2}\mathrm{div}\delta\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{l}\right). \end{gathered} \tag{44}$$

Подчеркнем, что, несмотря на свое обозначение $A_p$, эта величина оказалась независящей от переменной Лапласа $p$.

Асимптотики концентрации примеси в случае больших времен также будут определяться тем, какому из интервалов в (5) принадлежит стационарное значение $p_0$ переменной Лапласа. Подставляя выражения (37) и (44) в (17), с учетом (38), (39) и (5) приходим к следующим результатам. При

$$t_u \ll \frac{t}{4\Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t)} \ll \frac{t_a^2}{t_u}$$

имеем

$$\begin{gathered} c\,(\mathbf{r}, t) = \frac{N\exp\left[-\Gamma^{\perp}(\mathbf{r}) - \Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) - H(\mathbf{r}^{\parallel})\right]}{(4\pi)^{3/2}D(0)l(\mathbf{r})\sqrt{\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl\frac{D}{u^3}}}, \\ \Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) = \frac{\left(\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} \frac{dl}{u} - t\right)^2}{4\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl\frac{D}{u^3}}. \end{gathered} \tag{45}$$

При

$$t_a,\, t_u \ll \frac{t}{4\Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t)} \ll t_b$$

имеем

$$\begin{gathered} c(\mathbf{r}, t) = \frac{N\left[\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} \frac{dl}{\sqrt{D_u}}\right]\exp\left[-\Gamma^{\perp}(\mathbf{r}) - \Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) - H(\mathbf{r}^{\parallel})\right]}{(4\pi t)^{3/2}\,D(0)l(\mathbf{r})}, \\ \Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) = \frac{1}{4t}\left(\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} \frac{dl}{\sqrt{D_u}}\right)^2. \end{gathered} \tag{46}$$

При

$$\frac{t}{4\Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t)} \gg \frac{\sqrt{t_b^3 t_a}}{t_u},\ \sqrt{\frac{t_b}{t_a}}t_u$$

имеем

$$\begin{gathered} c\,(\mathbf{r}, t) = \frac{N\exp\left[-\Gamma^{\perp}(\mathbf{r}) - \Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) - H(\mathbf{r}^{\parallel})\right]}{(4\pi)^{3/2}D(0)l(\mathbf{r})\sqrt{\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl\frac{\widetilde{D}}{\widetilde{u}^3}}}, \\ \Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) = \frac{\left(\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} \frac{dl}{\widetilde{u}} - t\right)^2}{4\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl\frac{\widetilde{D}}{\widetilde{u}^3}}. \end{gathered} \tag{47}$$

В формулах (46) и (47) использованы следующие обозначения:

$$D_u = u^2 t_a,\ \ \widetilde{u} = \sqrt{\frac{t_a}{t_b}}u.$$

Выражения (45), (46) и (47) свидетельствуют о том, что в продольном относительно линии тока направлении реализуются режимы быстрой классической адвекции–диффузии, квазидиффузии (был впервые открыт в [19]) и медленной классической адвекции–диффузии соответственно, что согласуется с известными результатами для случая среды с постоянными параметрами [15]. Перенос в поперечном направлении происходит в режиме классической диффузии.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итогом работы является асимптотическая теория переноса примеси в модели статистически однородной резко контрастной (двупористой) среды.

Предполагается, что скорость адвекции, коэффициент диффузии и временные параметры, характеризующие среду, являются переменными по пространству параметрами.

На расстояниях, значительно превосходящих размер основной области локализации примеси в данный момент времени, задача сведена сначала к уравнению в частных производных первого порядка, а затем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющих траекторию концентрационного сигнала. Выражения для концентрации представлены в квадратурах вдоль траектории концентрационного сигнала.

Рассмотрены шесть характерных временных интервалов, куда может попасть текущее время $t$. Асимптотическое поведение концентрации в случае относительно малых времен, когда переносом примеси за счет адвекции можно пренебречь, соответствует режимам быстрой классической диффузии, субдиффузии и медленной классической диффузии, а в случае больших времен, когда адвекция доминирует над диффузией, реализуются режимы быстрой адвекции–диффузии, квазидиффузии и медленной адвекции–диффузии.

Точность асимптотической теории обеспечивается наличием малого параметра $\xi$ (формула (7)). Проведенные в работе [9] численные расчеты диффузии примеси в неоднородной среде показали, что даже в основной области локализации примеси погрешность результатов, полученных на основе асимптотической теории, не превышает 25 %. С удалением от основной области локализации точность результатов, благодаря уменьшению параметра $\xi$, значительно возрастает.

Ожидается, что разработанная здесь асимптотическая теория приведет к экономии на несколько порядков расчетного времени в сравнении с прямым численным решением интегродифференциального уравнения в частных производных второго порядка с параметрами, зависящими от пространственных координат.

Полученные результаты могут быть использованы для проведения оценок надежности захоронений радиоактивных отходов в геологических средах.

**Благодарности.** Авторы выражают глубокую благодарность Л. В. Матвееву за плодотворное обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА


**1**. J.-P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).

**2**. M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64**, 961 (1992).

**3**. D. ben-Avraham and S. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000).

**4**. Л. М. Зеленый, А. В. Милованов, УФН **174**, 809 (2004).

**5**. Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, УФН **189**, 691 (2019).

**6**. П. С. Кондратенко, Письма в ЖЭТФ **106**, 581 (2017).

**7**. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, ЖЭТФ **157**, 703 (2020).

**8**. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, Ю. Н. Обухов, ЖЭТФ **159**, 719 (2021).

**9**. P. S. Kondratenko, A. L. Matveev, and A. D. Vasiliev, Eur. Phys. J. B **94**, 50 (2021).

**10**. П. С. Кондратенко, А. В. Мухаряпова, ЖЭТФ **162**, 737 (2022).

**11**. P. S. Kondratenko, Ann. Phys. **447**, 169002 (2022).

**12**. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, Л. В. Матвеев, ЖЭТФ **167**, 876 (2025).

**13**. H. H. Gerke and M. Th. van Genuchten, Water Resour. Res. **29**, 305 (1993).

**14**. Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина, Приклад. матем. мех. **24**, 852 (1960).

**15**. Л. В. Матвеев, ЖЭТФ **142**, 943 (2012).

**16**. L. V. Matveev, Phys. A: Stat. Mech. Appl. **406**, 119 (2014).

**17**. E. Bonnet, O. Bour, N. E. Odling et al., Rev. Geophys. **39**, 347 (2001).

**18**. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2005), с. 421.

**19**. К. В. Чукбар, ЖЭТФ **109**, 1335 (1996).