

ЭФФЕКТЫ НЕЭРГОДИЧНОСТИ В ОДНОМЕРНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ

И. М. Суслов*

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы
Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 июля 2025 г.,
после переработки 28 июля 2025 г.
Принята к публикации 19 августа 2025 г.

Как известно, безразмерное ландауэровское сопротивление ρ одномерной неупорядоченной системы описывается логнормальным распределением. Среднее значение $\langle \rho \rangle$ для такого распределения не является репрезентативным, так как сильно отличается от типичного значения ρ_{typ} . Этот вывод требует некоторого пересмотра из-за эффектов неэргодичности. Если L — длина образца, K — число реализаций случайного потенциала, то результат при $L \rightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$ зависит от порядка перехода к пределу. Если предел $K \rightarrow \infty$ берется первым, то логнормальное распределение справедливо при произвольных L , если выполнено условие $\rho \gg 1$. Если же число реализаций K конечно, то ситуация при $L \rightarrow \infty$ эффективно описывается дельта-образным распределением, и $\langle \rho \rangle \approx \rho_{typ}$. Трансформация логнормального распределения в дельта-образное может наблюдаться при использовании экспериментальной методики, отработанной в контексте универсальных флуктуаций кондактанса. Эффекты неэргодичности оказываются существенными для выяснения причин расхождения теоретических предсказаний для параметров логнормального распределения с результатами численных экспериментов.

DOI: 10.7868/S3034641X25100078

распределением

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1–12], безразмерное ландауэровское сопротивление ρ [13–15] одномерной неупорядоченной системы¹⁾ описывается логнормальным

$$P(\rho) = \frac{1}{\rho\sqrt{4\pi Dn}} \exp\left\{-\frac{(\ln \rho - vn)^2}{4Dn}\right\}, \quad (1)$$

где n — число узлов в одномерной цепочке. Распределение (1) следует из уравнения эволюции, в котором дискретная координата n играет роль времени, и которое в терминах переменной $x = \ln \rho$ при условии $\rho \gg 1$ имеет вид обычного уравнения диффузии со скоростью дрейфа v и коэффициентом диффузии D . Согласно (1), типичное значение ρ экспоненциально возрастает с ростом длины системы, что является наблюдаемым следствием локализации состояний [17–20]. Результат (1) ($v = D$) получен в работах [1–6] в рамках приближения случайных фаз (применимого в глубине разрешенной зоны), подтвержден численно вблизи края исходной зоны и в области флуктуационных состояний [7–9] и аналитически выведен для произвольных энергий в работах автора [10–12].

обеспечивая исчезновения сопротивления в идеальной системе; но оно допускает однозначное обобщение на многоканальный случай [16], и потому используется многими авторами.

* E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

¹⁾ Вопрос о корректном определении проводимости конечных систем является не вполне тривиальным (см. Введение к работам [10, 16]. Это связано со спецификой формул теории линейного отклика: входящие в них δ -функции должны быть уширены на величину γ , которая устремляется к нулю лишь после перехода к термодинамическому пределу; такая процедура очевидно невозможна в конечных системах. Для преодоления этой трудности предложен довольно элегантный трюк [14]: конечная система присоединяется к массивным идеальным контактам, в которых и производится переход к термодинамическому пределу. Реализация этой процедуры в одномерных системах приводит к двум определениям сопротивления (в квантовых единицах h/e^2): определению по Ландауэру $\rho = |r/t|^2$ (t и r — амплитуды прохождения и отражения) и определению по Эконому–Суокуолису $\rho = 1/|t|^2$. Первое определение относится к четырех-контактной, второе к двух-контактной схеме измерений (см. подробнее в [16]. Второе определение физически менее удовлетворительно, не

Нетрудно показать, что моменты распределения $P(\rho)$ растут экспоненциально

$$\langle \rho^m \rangle \sim e^{\kappa_m n}, \quad \kappa_m = vm + Dm^2, \quad (2)$$

с показателями κ_m , квадратично зависящими от m . Отсюда следует очевидный вывод, что среднее значение $\langle \rho \rangle$ не является репрезентативным, так как сильно отличается от типичного значения ρ_{typ} , реализуемого в конкретном образце

$$\langle \rho \rangle \sim e^{(v+D)n}, \quad \rho_{typ} \sim e^{vn}. \quad (3)$$

Как показано ниже, этот (казалось бы бесспорный) вывод требует пересмотра, что связано с эффектами неэргодичности.

Согласно обычному определению, эргодичность означает, что усреднение по времени эквивалентно усреднению по ансамблю; в рассматриваемом случае роль времени играет одномерная координата n . Пусть L — длина образца в единицах постоянной решетки, а усреднение производится по $n \leq L$ с использованием K реализаций случайного потенциала. Как показано ниже, результат при $L \rightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$ зависит от порядка перехода к пределу. Логнормальное распределение справедливо для $\rho \gg 1$ при произвольных L , если предел $K \rightarrow \infty$ берется первым. Если же число реализаций K конечно, то результат при $L \rightarrow \infty$ не зависит от K и соответствует дельта-образному распределению $P(\rho)$,

$$\langle \rho^m \rangle \sim e^{mvn}, \quad (4)$$

так что поведение среднего $\langle \rho \rangle$ не отличается от такового для типичного значения ρ_{typ} . Трансформация логнормального распределения в дельта-образное в принципе является наблюдаемой при использовании экспериментальной методики, отработанной в контексте универсальных флуктуаций кондактанса (разд. 6).

Непосредственным поводом для настоящей работы явилось существенное расхождение теоретических предсказаний для параметров v и D логнормального распределения с результатами численных экспериментов²⁾ (разд. 2). Для выяснения причин такого различия мы предприняли численный анализ поведения моментов $\langle \rho^m \rangle$ для распределения $P(\rho)$. Эмпирически было установлено, что теоретические результаты воспроизводятся экспериментально для

²⁾ При появлении физических экспериментов (разд. 6) это расхождение приведет к противоречию между теорией и физическим экспериментом.

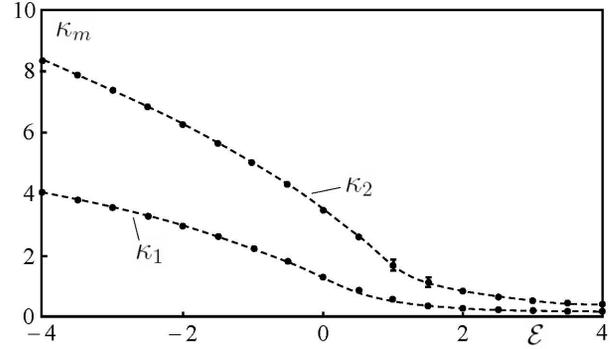


Рис. 1. Теоретические зависимости параметров κ_1 и κ_2 (в единицах $W^{2/3}$) от энергии ε в единицах $W^{4/3}$ (штриховые кривые) и результаты численных экспериментов (точки). Для обработки на линейную зависимость формулах (9) использовался интервал $30 \leq n \leq 100$ для $\varepsilon \leq 1$, тогда как при $\varepsilon > 1$ он расширился пропорционально ε ; последнее соответствует условию (18) с учетом зависимости $v \propto \varepsilon^{-1}$

не слишком больших размеров системы L при достаточно большом числе реализаций K . Последующий теоретический анализ обнаружил ярко выраженное нарушение эргодичности для таких степенных средних (разд. 3). При этом поведение логарифмических средних $\langle \ln^m \rho \rangle$ оказалось вполне эргодическим (разд. 4). Параметры v и D прямо связаны с такими средними, и их поведение также эргодично; однако, физический смысл этих параметров изменяется при перестановке порядка предельных переходов $L \rightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$. При конечных K и $L \rightarrow \infty$ параметр D уже не характеризует ширину распределения $P(\rho)$, которое отличается от логнормальной формы. В результате было установлено (разд. 5), что отличие v и D от теоретических предсказаний обусловлено различными причинами: в первом случае оно связано с перенормировкой энергии, тогда как во втором случае является прямым следствием неэргодичности.

Проблемы, связанные с существованием и нарушением эргодичности активно обсуждаются в различных областях физики (см. работы [21–33] и ссылки в них); в контексте теории локализации они обсуждались в [28–33].

2. ЗАВИСИМОСТЬ v И D ОТ ЭНЕРГИИ

Для определенности будем иметь в виду одномерную модель Андерсона, описываемую уравнением Шредингера

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} + V_n \Psi_n = E \Psi_n, \quad (5)$$

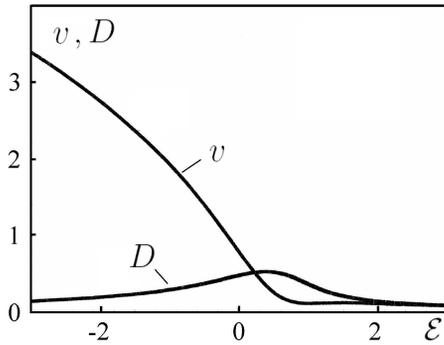


Рис. 2. Теоретические зависимости параметров v и D (в единицах $W^{2/3}$) от энергии \mathcal{E} в единицах $W^{4/3}$

где V_n — независимые случайные величины с нулевым средним и дисперсией W^2 , E — энергия, отсчитанная от центра зоны; все энергии измеряются в единицах интеграла перекрытия, который принят за единицу. Рассматривая уравнение (5) как рекуррентное соотношение, выражающее Ψ_{n+1} в терминах Ψ_n , Ψ_{n-1} , и задавая начальные условия на левом краю системы, нетрудно получить поведение вторых и четвертых моментов Ψ_n [10]: они возрастают экспоненциально по n , а соответствующие показатели κ определяются положительным корнем уравнений

$$\begin{aligned} \kappa(\kappa^2 + 4\mathcal{E}) &= 2W^2, \\ \kappa(\kappa^2 + 4\mathcal{E})(\kappa^2 + 16\mathcal{E}) &= 42W^2\kappa^2 + 96W^2\mathcal{E} \end{aligned} \quad (6)$$

с максимальной действительной частью; здесь \mathcal{E} — энергия, отсчитанная от нижнего края зоны. Согласно [10], уравнения (6) справедливы в пределе

$$\delta \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \delta/\epsilon^2 = \text{const},$$

где $\delta = ka_0$, $\epsilon^2 = W^2/(2ka_0)^2$, k — фермиевский импульс, a_0 — постоянная решетки; он реализуется для слабого беспорядка вблизи края исходной зоны и соответствует потенциалу типа «белый шум» [20]. В терминах \mathcal{E} и W этот предел выглядит как

$$\mathcal{E} \rightarrow 0, \quad W \rightarrow 0, \quad \mathcal{E}/W^{4/3} = \text{const},$$

что позволяет использовать приведенные координаты, в которых импульсы измеряются в единицах $W^{2/3}$, а энергии — в единицах $W^{4/3}$. Ландауэровское сопротивление ρ определяется комбинациями, квадратичными по Ψ_n , так что указанные показатели определяют поведение $\langle \rho \rangle$ и $\langle \rho^2 \rangle$; они обозначаются как κ_1 и κ_2 в соответствии с (2): их поведение

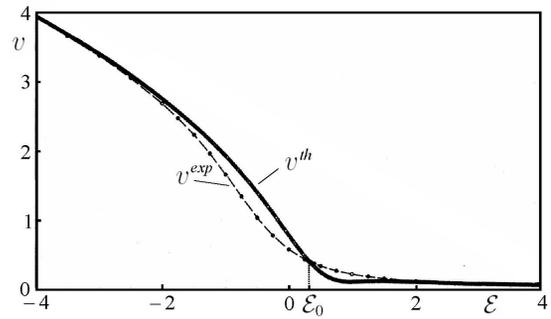


Рис. 3. Теоретические и экспериментальные зависимости для параметра v

показано на рис. 1. Согласно (2), знание показателей κ_m для двух различных значений m позволяет установить зависимость v и D от энергии (рис. 2).

Приведенные результаты нетрудно проверить в рамках численного эксперимента, полагая $V_n = Wp_n$, где p_n — последовательность случайных чисел с нулевым средним и единичной дисперсией, которую можно получить с помощью стандартных генераторов случайных чисел [34]; ниже использовалось гауссовское распределение для p_n и принималось значение $W = 0.01$. Проведенная проверка привела к неожиданным результатам: экспериментальные значения v и D , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \ln \rho \rangle &= v^{exp} n + c_1, \\ \langle (\ln \rho - v^{exp} n)^2 \rangle &= 2D^{exp} n + c_2, \end{aligned} \quad (7)$$

обнаружили поведение, отличное от теоретического (рис. 3, 4). Ландауэровское сопротивление ρ определяется квадратичной формой от Ψ_n и Ψ_{n+1} , и при строгом определении зависит от внешнего импульса в присоединенных идеальных контактах [10, 35]; однако эта зависимость влияет лишь на c_1 и c_2 . Фактически в качестве ρ можно использовать любую квадратичную форму; для определенности мы приняли комбинацию

$$\rho = \Psi_n^2 + \Psi_{n+1}^2, \quad (8)$$

которая нигде не обращается в ноль и использовалась во многих работах.

3. ПРИЧИНА ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Для выяснения причины отклонений от теоретических зависимостей мы провели эксперименталь-

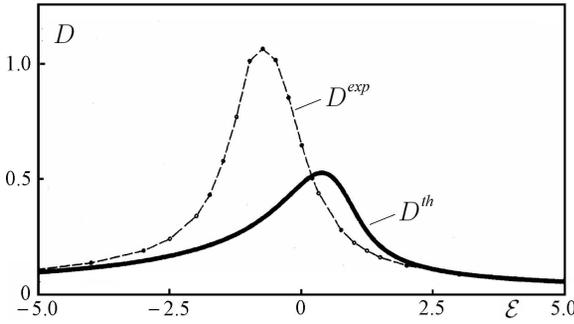


Рис. 4. Теоретические и экспериментальные зависимости для параметра D

ную проверку результатов для κ_1 и κ_2 , используя соотношения

$$\ln \langle \rho \rangle = \kappa_1 n + b_1, \quad \ln \langle \rho^2 \rangle = \kappa_2 n + b_2 \quad (9)$$

с усреднением по K реализациям случайного потенциала и обработкой на линейную зависимость от n [34]. При бессистемном проведении численных экспериментов не удается получить никаких устойчивых результатов ввиду их сильной зависимости от числа реализаций K и интервала обработки $N_{min} \leq n \leq N_{max}$. Эмпирически было установлено, что теоретические результаты воспроизводятся лишь для небольших размеров системы L и достаточно больших K . При надлежащем выборе условий эксперимента (см. подпись к рис. 1) воспроизводится правильное поведение κ_1 и κ_2 (точки на рис. 1), что соответствует реализации теоретических значений v и D для соответствующих интервалов обработки.

Причина сильной зависимости результатов от K и L легко выясняется. Среднее $\langle \rho^m \rangle$ при переходе к переменной $x = \ln \rho$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \langle \rho^m \rangle &= \int_0^\infty \rho^m P(\rho) d\rho = \int_{-\infty}^\infty e^{mx} P(x) dx = \\ &= \frac{e^{(vm+Dm^2)n}}{\sqrt{4\pi Dn}} \int_{-\infty}^\infty dx \exp \left\{ -\frac{[x - (v + 2Dm)n]^2}{4Dn} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

и подынтегральная функция $\Phi_m(x)$ соответствует гауссовскому распределению, сдвинутого на $2Dmn$ по сравнению с таким же распределением для $P(\rho)$ (рис. 5). Если $2Dmn$ достаточно велико, то актуальная область интегрирования лежит на хвосте исходного распределения $P(\rho)$; если число реализаций K ограничено, то в этой области будет мало экспериментальных точек, и вычисление $\langle \rho^m \rangle$ окажется неправильным.

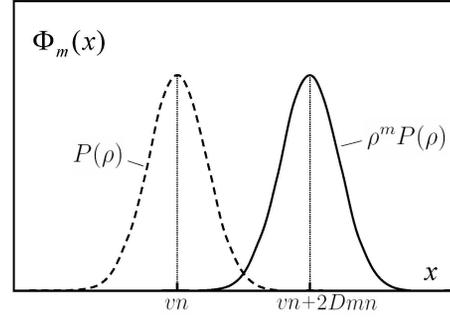


Рис. 5. Подынтегральная функция $\Phi_m(x)$ в формуле (10), соответствующая $\rho^m P(\rho)$ (сплошная кривая) и распределению $P(\rho)$ (штриховая кривая)

Если $P(x)$ — гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 , то интеграл по области $x > s\sigma$ при больших s дается оценкой

$$P_s = \int_{s\sigma}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-s^2/2}. \quad (11)$$

Если число реализаций K достаточно мало, $KP_s \lesssim 1$, то в области $x > s\sigma$ не будет ни одной экспериментальной точки. Если положить

$$K = e^M, \quad (12)$$

то ограниченность числа реализаций приводит к эффективному обрезанию гауссовского распределения на верхнем пределе $x_0 \approx \sqrt{2M\sigma^2}$. Для распределения (1) с учетом среднего возникает обрезание на масштабе

$$x_0 = vn + \Lambda, \quad (13)$$

$$\Lambda \approx \sqrt{4MDn}. \quad (14)$$

Введем усеченное среднее $\langle \rho^m \rangle_{x_0}$, определяемое выражением (10) с верхним пределом x_0 в интеграле. Если $\Lambda \gg 2Dmn$, т. е. $Dm^2n \ll M$, то наличие обрезания несущественно, и мы возвращаемся к результату (2). Если же $\Lambda \ll 2Dmn$, то полагая $x = x_0 - y$, имеем

$$\langle \rho^m \rangle_{x_0} = \frac{e^{vmn + D(m^2 - \tilde{m}^2)n}}{\tilde{m}\sqrt{4\pi Dn}} \int_0^\infty dy \exp \left\{ -y - \frac{y^2}{4D\tilde{m}^2n} \right\}, \quad (15)$$

где

$$\tilde{m} = m - \frac{\Lambda}{2Dn}. \quad (16)$$

Интеграл определяется областью $y \lesssim 1$, в которой член с y^2 мал ввиду $Dm^2n \gg M$, $\tilde{m} \approx m$, и пренебрежение им приводит к результату

$$\langle \rho^m \rangle_{x_0} \sim e^{m\tilde{v}n}, \quad \tilde{v} = v + \frac{\Lambda}{Dn} \approx v + \sqrt{\frac{4M}{Dn}}, \quad (17)$$

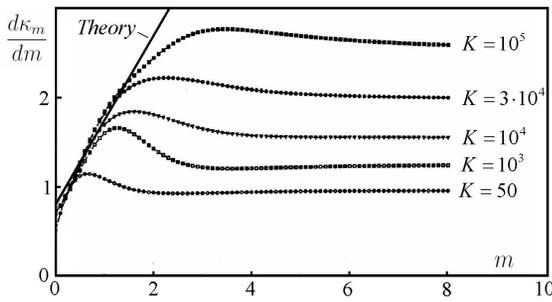


Рис. 6. Поведение производной $d\kappa_m/dm$ при $\mathcal{E} = 0$, $L = 100$ для различного числа реализаций K

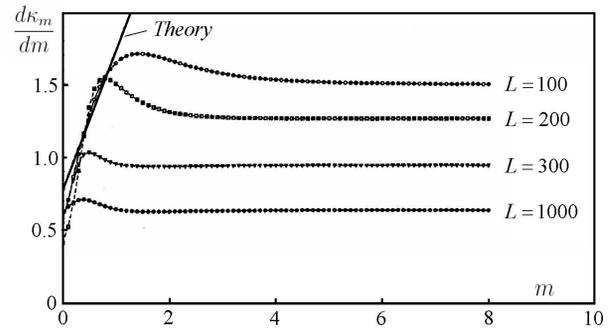


Рис. 7. Поведение производной $d\kappa_m/dm$ при $\mathcal{E} = 0$, $K=100$ для различных размеров системы L

так что коэффициент диффузии D эффективно исчезает, и возникает положительная добавка к скорости v , исчезающая при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, для правильного вычисления среднего $\langle \rho^m \rangle$ необходимо условие $\Lambda \gg 2Dmn$, сводящееся к $Dm^2n \ll M$. Учитывая, что логнормальное распределение справедливо при $\rho \sim e^{vn} \gg 1$ [4, 6, 10], получим интервал значений n ,

$$1 \lesssim vn \lesssim \frac{M}{m^2} \frac{v}{D}, \quad (18)$$

который должен использоваться для выявления линейной зависимости от n в выражениях типа (9); фактически экспериментальные точки на рис. 1 получены для интервала усреднения, выбранного в соответствии с этой оценкой, при визуальном контроле за качеством подгонки линейной зависимостью. Для флуктуационных состояний в глубине запрещенной зоны отношение v/D велико (см. рис. 2), и рабочий интервал оказывается достаточно широким. В глубине разрешенной зоны имеем $v = D$, а вблизи ее края $v \sim D$, и допустимый интервал для $m = 2$ оказывается довольно узким: так для $K = 10^4$ имеем $M \approx 10$ и $1 \lesssim vn \lesssim 2.5$; при этом увеличение K не слишком эффективно, так как M возрастает лишь логарифмически.

Для контроля справедливости логнормального распределения удобно использовать производную

$$\frac{d\kappa_m}{dm} = v + 2Dm, \quad (19)$$

которая находится в результате вычисления κ_m для двух близких значений $m_1 = m + \delta m$ и $m_2 = m - \delta m$; при использовании одинакового интервала обработки и одного и того же множества реализаций уменьшение δm не приводит к флуктуациям и потере точности.

Изменение производной (19) при увеличении числа реализаций K показано на рис. 6: легко видеть, что при $K \rightarrow \infty$ линейная зависимость распространяется на произвольные m , и возникает полноценное логнормальное распределение с теоретическими значениями v и D . Изменение величины (19) при росте длины системы L для фиксированного набора реализаций показано на рис. 7: в пределе $L \rightarrow \infty$ производная $d\kappa_m/dm$ стремится к константе, и возникает линейная зависимость $\kappa_m = vm$, соответствующая δ -образному распределению $P(\rho)$.

4. ТРАНСФОРМАЦИЯ ЛОГНОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Общая картина в плоскости (m, L) представлена на рис. 8. Сплошная кривая, соответствующая зависимости $L = M/Dm^2$ является условной границей, разделяющей логнормальное поведение $\kappa_m = vm + Dm^2$ и поведение $\kappa_m = \tilde{v}m$. При увеличении K эта кривая сдвигается вправо и при $K \rightarrow \infty$ обеспечивает логнормальное поведение при всех m и L . Однако этот сдвиг пропорционален логарифму K и происходит очень медленно. При любых практически достижимых K разделение на две области сохраняется.

Граница между двумя областями исчезает при $m \rightarrow 0$, что в частности относится к логарифмическим средним типа (7). Оценки параметра v для различных L и K (табл. 1) обнаруживают полную эргодичность, если L достаточно велико ($L \geq 200$). Предельное значение v , достигаемое при больших L для единственной реализации, воспроизводится при всех достижимых K : увеличение K приводит лишь к ускорению выхода на стационарное значение. Фак-

Таблица 1. Оценки параметра v при $\mathcal{E} = 0$ для различных длин системы L и числа реализаций K

K	$L = 100$	200	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
1	—	2.1239	0.6917	0.6749	0.5900	0.5716	0.5791	0.5790
10	0.4804	0.9335	0.5924	0.5844	0.5771	0.5768	0.5796	
10^2	0.6883	0.4208	0.5610	0.5809	0.5783	0.5798		
10^3	0.7459	0.5323	0.5653	0.5771	0.5798			
10^4	0.7216	0.5760	0.5775	0.5791				
10^5	0.7260	0.5777	0.5793					
10^6	0.7278	0.5750						

Таблица 2. Оценки параметра D при $\mathcal{E} = 0$ для различных длин системы L и числа реализаций K

K	$L = 100$	200	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
1	0.9059	1.3197	0.9678	0.3175	0.4508	1.2793	0.9245	0.2036
10	0.6000	1.1912	0.6417	0.7563	1.3435	1.8249	1.0330	
10^2	1.1080	0.8554	1.0597	1.2573	1.2351	1.2860		
10^3	0.7515	1.0846	1.3113	1.2225	1.2844			
10^4	0.7973	1.2404	1.2836	1.2930				
10^5	0.7834	1.2803	1.2741					
10^6	0.7792	1.2794						

тически табл. 1 наглядно демонстрирует, что усреднение по n эквивалентно усреднению по K : если интервал значений n увеличивается в 10 раз, то требуется в 10 раз меньшее значение K для достижения той же точности.

Оценки параметра D (табл. 2) обнаруживают аналогичное поведение, если число реализаций K не слишком мало; в противном случае возникают сильные флуктуации, препятствующие выходу на стационарное значение. Вопрос о возможности правильного определения D с использованием единственной реализации остается открытым.

На этом этапе можно выразить скепсис в отношении актуальности проводимого анализа: если поведение v и D вполне эргодично, то этого достаточно для установления логнормального распределения, а вычисление средних типа $\langle \rho^m \rangle$ не представляет интереса. В действительности это не так ввиду следующего. В разд. 3 мы предполагали, что $P(\rho)$ отличается от логнормального распределения лишь обрубанием далеких хвостов, и пришли к неизбежному нарушению эргодичности, которое подтверждается экспериментально (рис. 6, 7). Но если эргодичность в

принципе нарушается, то нет логических оснований полагать, что распределение $P(\rho)$ сохраняет логнормальную форму в правой части рис. 5, где предсказания теории ненадежны. Оно может испытывать более глубокую трансформацию, чем простое обрубание хвостов; при этом изменяется и смысл параметров v и D .

Заметим, что изменение m при фиксированных L и K соответствует одной и той же функции распределения — меняется лишь усредняемая величина. Введем характеристическую функцию распределения $P(\rho)$

$$F_\rho(t) = \int d\rho e^{it\rho} P(\rho), \quad (20)$$

которая является производящей функцией моментов

$$F_\rho(t) = \langle e^{it\rho} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^m}{m!} \langle \rho^m \rangle. \quad (21)$$

Если все моменты $\langle \rho^m \rangle$ известны, то соотношение (21) определяет характеристическую функцию, после чего $P(\rho)$ находится в результате обратного пре-

образования Фурье. Как ясно из рис. 6, 7, ограничение числа реализаций радикально изменяет поведение моментов, что приводит к существенной трансформации распределения $P(\rho)$.

Фактически вид функции распределения при больших n может быть установлен, исходя из экспериментальных данных. Как ясно из рис. 7, для больших L производную $d\kappa_m/dm$ можно заменить на константу \tilde{v} для $m \gtrsim m_0$, где значение m_0 достаточно мало. Для целочисленных значений m можно положить

$$\kappa_m = \tilde{v}m + \kappa_0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

что позволяет восстановить все целочисленные моменты

$$\langle \rho^m \rangle = e^{\kappa_m n} = e^{\tilde{v}mn + \kappa_0 n}, \quad (23)$$

и подстановка в (21) дает

$$\begin{aligned} F_\rho(t) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(it)^m}{m!} e^{\kappa_0 n} (e^{\tilde{v}n})^m = \\ &= 1 - e^{\kappa_0 n} + e^{\kappa_0 n} \exp(it e^{\tilde{v}n}). \end{aligned} \quad (24)$$

Зависимость κ_0 от n заранее неизвестна, но результаты указывают, что величина $e^{\kappa_0 n} \equiv a$ оказывается порядка единицы. Тогда распределение $P(\rho)$ имеет вид

$$P(\rho) = (1 - a)\delta(\rho) + a\delta(\rho - e^{\tilde{v}n}). \quad (25)$$

Использование δ -функций носит несколько условный характер, и в действительности они должны быть размыты до ширины порядка единицы. В частности, вместо $\delta(\rho)$ следует использовать некоторую функцию $P_0(\rho)$, локализованную в области $\rho \lesssim 1$.

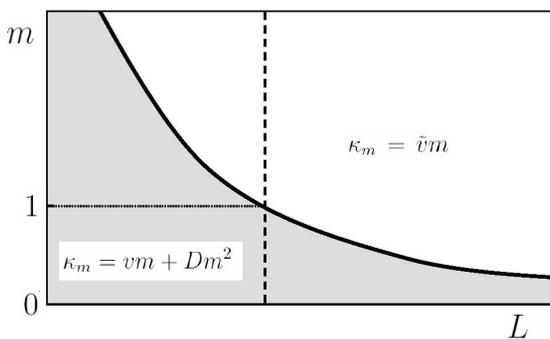


Рис. 8. Сплошная кривая в плоскости (m, L) соответствует зависимости $L = M/Dm^2$ и является условной границей, разделяющей логнормальное поведение $\kappa_m = vm + Dm^2$ и поведение $\kappa_m = \tilde{v}m$. Вертикальная штриховая линия является условной границей между логнормальным и дельта-образным распределениями

Ее появление физически вполне объяснимо. Уравнение эволюции для $P(\rho)$ [4, 6, 10] в области $\rho \lesssim 1$ не сводится к обычному уравнению диффузии при переходе к переменной $x = \ln \rho$, поэтому небольшая часть вероятности «застревает» в области $\rho \lesssim 1$ и убывает с ростом n существенно медленнее, чем в интервале $1 \ll \rho \ll e^{\tilde{v}n}$. При переходе к переменной $x = \ln \rho$ имеем распределение

$$P(x) = (1 - a)P_0(x) + a\delta(x - \tilde{v}n) \quad (26)$$

с характеристической функцией

$$F(t) = (1 - a)F_0(t) + ae^{it\tilde{v}n}.$$

Как ясно из первой строчки в (10), вычисление $\langle \rho^m \rangle$ сводится к замене $it \rightarrow m$ в определении характеристической функции $F(t)$, откуда

$$\langle \rho^m \rangle = (1 - a)F_0(-im) + ae^{m\tilde{v}n} \equiv e^{\kappa_m n}. \quad (27)$$

Зависимость от m в первом члене мало существенна по сравнению с сильной зависимостью от m второго члена, и можно положить $F_0(-im) \approx F_0(0) = 1$ ввиду нормированности на единицу функции $P_0(x)$ в соотношении (26). В результате имеем поведение κ_m при больших n

$$\kappa_m = \frac{1}{n} \ln [(1 - a) + ae^{m\tilde{v}n}]. \quad (28)$$

Производя разложение при малых m , имеем

$$\kappa_m = a\tilde{v}m + \frac{1}{2}a(1 - a)n\tilde{v}^2 m^2 \equiv vm + Dm^2. \quad (29)$$

Поскольку экспериментальные значения v и D стремятся к постоянному пределу при $n \rightarrow \infty$, то

$$1 - a = \frac{2D}{v\tilde{v}n} \quad (30)$$

и параметр a стремится к единице по закону $1/n$. Соответственно для \tilde{v} получим

$$\tilde{v} = v + \frac{2D}{vn}, \quad (31)$$

что соответствует постоянному значению величины Λ в уравнении (17). Это означает, что хвосты логнормального распределения обрезаются не на масштабе \sqrt{Dn} , как это предполагалось в разд. 3, а на масштабе порядка единицы. Таким образом, логнормальное распределение превращается в дельта-образное с шириной порядка единицы, что соответствует эффективному исчезновению коэффициента диффузии. При этом экспериментальное значение D не имеет прежнего физического смысла и

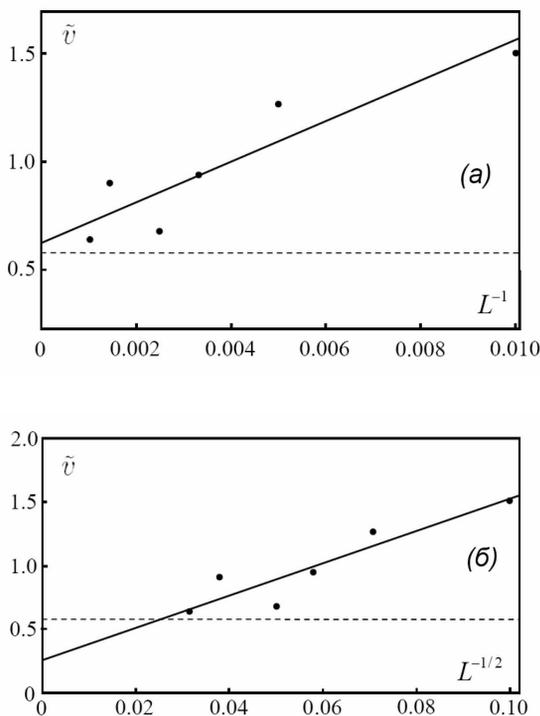


Рис. 9. а — Экстраполяция по закону $\tilde{v} - v \propto L^{-1}$ дает значение v , в пределах точности совпадающее с таковым из табл. 1 (горизонтальная штриховая линия). б — Экстраполяция по закону $\tilde{v} - v \propto L^{-1/2}$ приводит к заведомо неприемлемому результату. Сплошные прямые линии соответствуют подгонке по методу наименьших квадратов

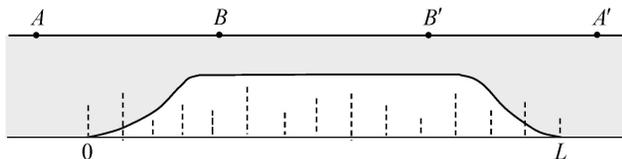


Рис. 10. Из-за флуктуационного сдвига края разрешенной зоны, происходящего в глубине системы, значение фермиевского импульса в промежутках между рассеивателями не совпадает с его значением в идеальных контактах. Вблизи границ системы возникает медленное переходное поведение на масштабе длины локализации ξ

не характеризует ширину распределения³⁾: это всего лишь коэффициент при m^2 в разложении κ_m при малых m .

Экстраполяция \tilde{v} к пределу $n \rightarrow \infty$ по закону $1/n$ согласуется с наблюдаемым значением v

³⁾ Распределение (26) при условии (30) имеет среднее значение $\langle x \rangle = vn$, тогда как его дисперсия определяется первым членом и не имеет отношения к ширине второго.

(рис. 9 а). Зависимость \tilde{v} от L подвержена существенным флуктуациям, и подгонка зависимостью $\tilde{v} - v \propto L^{-1}$ не слишком высокого качества; однако попытка экстраполяции по закону $\tilde{v} - v \propto L^{-1/2}$ приводит к заведомо неприемлемым результатам (рис. 9 б).

5. ЗАВИСИМОСТЬ v ОТ МАСШТАБА РАССТОЯНИЙ И ПЕРЕНОРМИРОВКА ЭНЕРГИИ

При малых L экспериментальные оценки v и D отличаются от общей тенденции (табл. 1, 2), что связано с переходом к теоретическим значениям (рис. 6). Для зависимости v и D от масштаба расстояний имеются физические основания.

Как уже указывалось (см. Примечание 1), корректное определение проводимости конечных систем требует присоединения к системе массивных идеальных контактов и явного включения их в составную систему. Обычно предполагаются «естественные» идеальные контакты, изготовленные из того же материала, но без примесей. При этом считается само собой разумеющимся, что фермиевский импульс в промежутках между рассеивателями такой же, как в идеальных контактах. Это действительно так при небольшом числе рассеивателей, но ситуация изменяется при переходе к макроскопической системе. Наличие случайного потенциала приводит к флуктуационному сдвигу края разрешенной зоны, который в бесконечной системе соответствует изменению начала отсчета энергии и не имеет существенных последствий. Однако при наличии идеальных контактов происходит плавное изменение положения разрешенной зоны (рис. 10), так что фермиевский импульс k медленно изменяется (на масштабе длины локализации ξ) от значения в идеальных контактах до постоянного значения в глубине системы. Для оптических систем [12, 36] ситуация выглядит даже более прозрачной: если волна из идеальной части волновода переходит в неупорядоченную часть, то беспорядок приводит не только к пространственным флуктуациям, но и к изменению среднего показателя преломления; поскольку частота волны остается неизменной, то неизбежно изменяется ее волновой вектор.

Из сказанного ясно, что ситуация существенно изменяется при переходе от малых к большим масштабам. При $L \ll \xi$ перенормировка энергии несущественна, и фермиевский импульс совпадает со своим значением в идеальных контактах. Напротив,

при $L \gg \xi$ можно пренебречь краевыми эффектами, и актуально значение фермиевского импульса в глубине системы. Теоретические значения v реализуются на малых масштабах и следовательно определяются затравочной энергией \mathcal{E} , тогда как экспериментальные значения соответствуют большим масштабам и связаны с перенормированной энергией \mathcal{E}_{ren} ; ниже приводятся более формальные аргументы в пользу этого. Согласно [10–12], параметры уравнений эволюции определяются фермиевским импульсом k и являются регулярными функциями k^2 ; их связь с энергией не имеет значения. Энергетические зависимости v^{exp} и v^{th} (рис. 3) пересекаются в точке $\mathcal{E}_0 \approx 0.3$, которая интерпретировалась в [11] как новое положение края зоны, сдвинутого за счет флуктуаций; при этом $k^2 = 0$. Тогда различие между v^{exp} и v^{th} может быть объяснено перенормировкой массы. Пусть

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{k^2}{2m_0}, \quad \mathcal{E}_{ren} = \frac{k^2}{2m_{\mathcal{E}}}, \quad (32)$$

где $m_{\mathcal{E}}$ зависит от энергии; тогда

$$\mathcal{E}_{ren} = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) \frac{m_0}{m_{\mathcal{E}}}. \quad (33)$$

Теоретические значения v и D определяются поведением вторых и четвертых моментов Ψ_n , которое может быть получено непосредственно из уравнения Шредингера (5) (см. Приложение 1 в работе [10]), содержащего лишь затравочную энергию \mathcal{E} . Ввиду регулярности по k^2 имеем для v^{th} при малых k

$$v^{th} = v(k^2) = v_0 + v'_0 k^2 = v_0 + v'_0 \cdot 2m_0 \tilde{\mathcal{E}}, \quad (34)$$

где $\tilde{\mathcal{E}}$ отсчитывается от сдвинутого края зоны.

Экспериментальные значения v определяются логнормальным распределением, которое можно получить лишь при использовании трансфер-матрицы в волновом представлении [10–12], не имеющей прямой связи с уравнением Шредингера⁴⁾. Если трансфер-матрица связывает точки A и A' , находящиеся в идеальных контактах (рис. 10), то при малых L будет происходить медленный переходный процесс, связанный с изменением положения края зоны. Такой переходный процесс будет отсутствовать, если трансфер-матрица связывает точки B и B' , находящиеся в глубине системы вдали

⁴⁾ В частности, ее можно ввести и в оптике, где нет уравнения Шредингера. Такая трансфер-матрица близка к единичной для слабого рассеивателя, что позволяет выводить дифференциальные уравнения эволюции. Трансфер-матрица в координатном представлении [12], непосредственно связанная с уравнением Шредингера, не обладает таким свойством.

от ее краев (рис. 10): тогда трансфер-матрица будет определяться перенормированной энергией \mathcal{E}_{ren} . Из сказанного ясно, что v^{exp} является такой же функцией k^2

$$v^{exp} = v(k^2) = v_0 + v'_0 k^2 = v_0 + v'_0 \cdot 2m_{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{E}}, \quad (35)$$

но с другой зависимостью от энергии. Из (34) и (35) имеем

$$\frac{v^{th} - v_0}{v^{exp} - v_0} = \frac{m_0}{m_{\mathcal{E}}} \quad (36)$$

и подстановка в (33) позволяет установить связь перенормированной энергии с затравочной

$$\mathcal{E}_{ren} = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) \frac{v^{th} - v_0}{v^{exp} - v_0}. \quad (37)$$

Написанные выражения справедливы при малых k^2 . Однако производная dv/dk^2 мало меняется в области, где различие v^{th} и v^{exp} является существенным; поэтому формула (37) приближенно сохраняется. За пределами этой области отклонение производной dv/dk^2 от константы становится значительным, но при этом несущественна перенормировка массы, так что возникает соотношение $\mathcal{E}_{ren} = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)$, которое согласуется с (37) при $v^{th} = v^{exp}$. Таким образом, формула (37) обеспечивает гладкую интерполяцию между двумя режимами и позволяет получить связь между \mathcal{E}_{ren} и \mathcal{E} (рис. 11), исходя из различия v^{th} и v^{exp} (рис. 3).

Как уже указывалось, экспериментальные значения D в области больших n не имеют физического смысла: фактически, отличие D^{exp} от D^{th} индуцируется отличием v^{exp} от v^{th} . Действительно, при малых L и больших K производная dk_m/dm име-

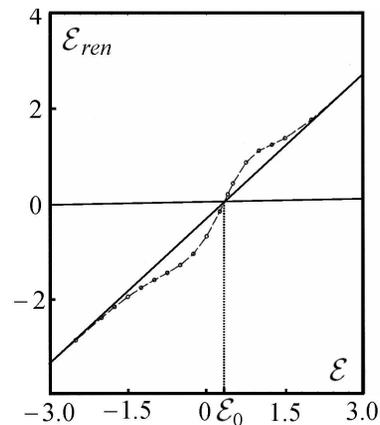


Рис. 11. Связь перенормированной энергии \mathcal{E}_{ren} с затравочной энергией \mathcal{E} , следующая из-за различия v^{th} и v^{exp} (рис. 3)

ет хорошо развитый линейный участок, согласующийся с теорией (рис. 6). По мере увеличения L линейный участок сужается, но значения при $m \sim 1$ по-прежнему близки к теоретическим. Экспериментальные значения v и D определяются логарифмическими средними и соответствуют малым m . Если значение v при $m = 0$ уменьшается по сравнению с теоретическим, то увеличивается наклон кривых на рис. 7 и значение D автоматически возрастает; напротив, увеличение v приводит к уменьшению D . Такая антикорреляция очевидна из сопоставления рис. 3 и рис. 4.

В работах [11, 12, 36, 37] с точкой \mathcal{E}_0 связывался необычный фазовый переход, не сопровождаемый сингулярностями в сопротивлении ρ и по видимому наблюдаемый лишь в оптических системах [12, 36]. Если трансфер-матрица вводится между точками B и B' в глубине системы, то при изменении энергии происходит переход от истинной трансфер-матрицы при $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$ к псевдо-трансфер-матрице при $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$ [10, 11]. Его можно зарегистрировать, изучая распределение фаз внутри системы, что позволяют современные оптические методы [12, 36]. Ввиду пространственных флуктуаций дна зоны реальная сингулярность возникает лишь в термодинамическом пределе (как для обычных фазовых переходов [38, 39]), когда расстояние между B и B' неограниченно возрастает и истинное положение края зоны может быть установлено однозначно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При обычном определении эргодичности (усреднение по времени эквивалентно усреднению по ансамблю) никак не конкретизируется, о какой усредняемой величине идет речь. Фактически можно говорить об эргодичности в сильном смысле (эквивалентность для любых средних), или в слабом смысле (эквивалентность для некоторых средних). Как ясно из вышеизложенного, в одномерной локализации эргодичность нарушена для степенных средних $\langle \rho^m \rangle$, но сохраняется для логарифмических средних $\langle \ln^m \rho \rangle$.

Во избежание недоразумений заметим, что в текущей литературе обсуждаются сильное и слабое нарушение эргодичности [21–23], понимаемые в другом смысле. Под сильным нарушением понимается ситуация, при которой некоторая часть конфигурационного пространства оказывается недоступной из-за бесконечных барьеров (как в спиновых стек-

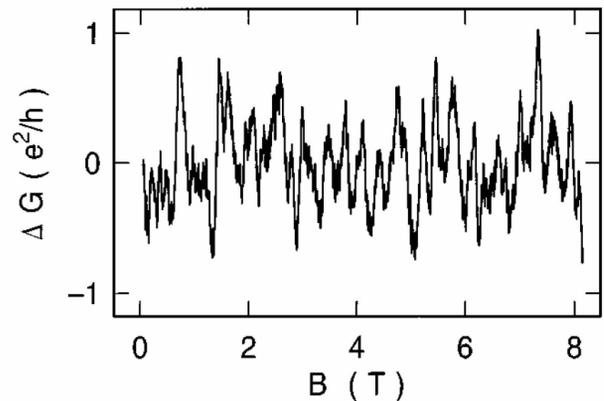


Рис. 12. Кондактанс тонкой проволоочки из Au как функция магнитного поля [44]

лах). При слабом же нарушении все конфигурационное пространство остается в принципе достижимым, но нарушается эквивалентность усреднения по времени и ансамблю. В математической литературе говорят об эргодичности первого порядка (эквивалентность двух усреднений для первого момента), второго порядка (эквивалентность для первых двух моментов) и т. д. Некоторое упорядочение терминологии представляется вполне актуальным.

Исследование эффектов неэргодичности оказалось весьма существенным для выяснения причин расхождения теоретических предсказаний для параметров v и D логнормального распределения с результатами численных экспериментов. Как выяснилось, это различие обусловлено разными причинами: в первом случае оно связано с перенормировкой энергии, тогда как во втором случае является прямым следствием неэргодичности.

Трансформация логнормального распределения в дельта-образное в принципе является наблюдаемой: соответствующая экспериментальная методика отработана в контексте универсальных флуктуаций кондактанса [40–45]. Последние обычно наблюдаются в виде аperiodических осцилляций в магнитосопротивлении тонких проволоочек при изменении магнитного поля B [44] (рис. 12) (см. обзоры [46–47]). Картина флуктуаций выглядит случайной, но полностью воспроизводится при повторных прохождениях по магнитному полю. Она характеризует конкретную реализацию случайного потенциала и полностью меняется после отогрева образца до достаточно высокой температуры, при которой примеси получают подвижность и возникает новая примесная конфигурация. Действуя подобным

образом, можно получить достаточно большое множество реализаций случайного потенциала в одном и том же образце, что позволяет в принципе исследовать эволюцию как моментов ландауэровского сопротивления ρ , так и всю функцию распределения $P(\rho)$. В частности, в работе [45] использовалось 20 реализаций случайного потенциала для отслеживания эволюции двух первых моментов кондактанса. Как ясно из рис. 7, уже при наличии $K = 100$ реализаций эффекты неэргодичности являются ярко выраженными.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Мельников, ФТТ **23**, 782 (1981).
2. A. A. Abrikosov, Sol. St. Comm. **37**, 997 (1981).
3. N. Kumar, Phys. Rev. B **31**, 5513 (1985).
4. B. Shapiro, Phys. Rev. B **34**, 4394 (1986).
5. P. Mello, Phys. Rev. B **35**, 1082 (1987).
6. B. Shapiro, Phil. Mag. **56**, 1031 (1987).
7. L. I. Deych, D. Zaslavsky, and A. A. Lisyansky, Phys. Rev. Lett. **81**, 5390 (1998).
8. L. I. Deych, A. A. Lisyansky, and B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **84**, 2678 (2000); Phys. Rev. B **64**, 224202 (2001).
9. L. I. Deych, M. V. Erementchouk, and A. A. Lisyansky, Phys. Rev. Lett. **90**, 126601 (2001).
10. И. М. Суслов, ЖЭТФ **156**, 950 (2019).
11. И. М. Суслов, ЖЭТФ **162**, 750 (2022).
12. И. М. Суслов, ЖЭТФ **165**, 233 (2024).
13. R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957); Phil. Mag. **21**, 863 (1970); Z. Phys. **68**, 217 (1987).
14. E. N. Economou and C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **46**, 618 (1981).
15. P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).
16. И. М. Суслов, ЖЭТФ **142**, 1020 (2012).
17. P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
18. N. F. Mott and W. D. Twose, Adv. Phys. **10**, 107 (1961) [УФН **79**, 691 (1963)].
19. Н. Мотт, Э. Дэвис, *Электронные процессы в некристаллических веществах*, Мир, Москва (1982).
20. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
21. A. A. Budini, Phys. Rev. E **94**, 022108 (2016).
22. A. Figueiredo, Z. T. Oliveira Jr, T. M. Rocha Filho, R. Matsushita, and M. A. Amato, arXiv: 1208.4878,
23. A. Deger and A. Lazarides, Phys. Rev. B **109**, L220301 (2024).
24. S. Franz, arXiv: cond-mat/0212091.
25. W. W. H and D. Radicevic, arXiv: 1701.08777.
26. R. Swietek, M. Hopjan, C. Vanoni, A. Scardicchio, and L. Vidmar, arXiv: 2412.15331.
27. A. Avella, F. Mancini, and E. Plekhanov, Condens. Matter Phys. **9**, 485 (2006).
28. P. Markos and B. Kramer, Sol. St. Comm. **90**, 615 (1994).
29. A. De Luca and A. Scardicchio, Europhys. Lett. **101** (2013) 37003.
30. A. De Luca, B. L. Altshuler, V. E. Kravtsov, and A. Scardicchio, Phys. Rev. Lett. **113**, 046806 (2014).
31. A. L. Burin, Phys. Rev. B **91**, 094202 (2015).
32. X. Li, S. Ganeshan, J. H. Pixley, and S. D. Sarma, Phys. Rev. Lett. **115**, 186601 (2015).
33. G. De Tomasi and I. M. Khaymovich, Phys. Rev. Lett. **124**, 200602 (2020).
34. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Wetterling, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press (1992).
35. P. Markos, Acta Physica Slovaca **56**, 561 (2006).
36. S. I. Bozhevolnyi and I. M. Suslov, Phys. Scr. **98**, 065024 (2023).
37. I. M. Suslov, Phil. Mag. (accepted), arXiv: 2407.03371.
38. К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и ϵ -разложение*, Мир, Москва (1975).
39. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).

-
40. Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985).
41. Б. Л. Альтшулер, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **42**, 291 (1985).
42. P. A. Lee and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985).
43. P. A. Lee, A. D. Stone, and Y. Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987).
44. S. Washburn and R. A. Webb, Adv. Phys. **35**, 375 (1986).
45. D. Mailly and M. Sanquer, J. Phys. (France) I **2**, 357 (1992).
46. *Mesoscopic Phenomena in Solids, North-Holland*, ed. by B. L. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb, Amsterdam (1991).
47. C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).