ЖЭТФ, 2025, том 168, вып. 3 (9), стр. 315–324 © 2025

ИСКУССТВЕННЫЙ ОДНООСНЫЙ КРИСТАЛЛ И УПРАВЛЕНИЕ РАСХОДИМОСТЬЮ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. А. Миронов, Е. А. Хазанов*

Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 20 мая 2025 г.,
после переработки 12 июня 2025 г.
Принята к публикации 13 июня 2025 г.

В параксиальном приближении, в линейном и нелинейном режимах исследованы электродинамические особенности распространения волновых пучков в плоскослоистой среде (метасреде), описываемой как одноосный кристалл с эффективными диэлектрическими характеристиками $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$. Особенности связаны с тем, что параметр анизотропии $K = \varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel$ искусственного кристалла может быть меньше нуля ($K < 0$). В этих условиях показано, что в процессе распространения волнового пучка в плоском слое метасреды вдоль оси кристалла, т. е. в вырожденном случае, когда показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн равны, происходит разделение гибридного волнового поля на обыкновенный и необыкновенный волновые пучки — собственные моды задачи. В явном виде оно проявляется на задней границе метасреды. «Обыкновенная» часть исходного коллимированного на входе в среду волнового пучка продолжает расфокусироваться в соответствии с обычной дифракцией, а «необыкновенная» фокусируется задней границей метасреды на расстоянии $|K|z_1$, где z_1 — толщина метасреды. В случае мощного излучения изменение знака параметра анизотропии K приводит к смене режима самовоздействия необыкновенного пучка в среде с фокусирующего на дефокусирующий. Однако необыкновенный пучок фокусируется задней границей метасреды, причем при мощности много больше критической мощности самофокусировки размер пучка в фокусе обратно пропорционален корню из мощности.

DOI: 10.31857/S0044451025090044

1. ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитные особенности сред определяются структурой поляризационного отклика вещества в поле. В классической оптике полезные практические применения находит искусственная анизотрония, вызываемая деформацией материала. Развитие нанотехнологий в последнее время позволяет синтезировать химическими, литографическими и другими методами наноструктуры с хорошо определяемыми формой и размерами. Многообразие наноструктур приводит к еще большему разнообразию их оптических свойств. Возникли новые разделы оптики, изучающие особенности распространения света в различных наноструктурированных и композитных средах [1–3]. Такие среды называют средами с искусственной анизотропией, искусственными кристаллами или фотонными кристаллами. Их электродинамические особенности определяются периодичностью диэлектрической проницаемости среды. Нахождение электродинамических характеристик таких кристаллов непростая задача, для решения которой приходится привлекать численные методы. Даже в одномерном случае, т. е. в периодической плоскослоистой среде, зонная структура среды определяется довольно сложным трансцендентным уравнением [1, 3]. Задача существенно упрощается, когда толщина слоев метасреды становится много меньше длины волны. В этом случае одномерный фотонный кристалл описывается эффективным тензором диэлектрической проницаемости, таким же как и одноосный кристалл. Плоские пластины из подобной метасреды нашли применение в качестве суперлинз для преодоления дифракционного предела и передачи изображения субволнового размера (см. обзор [4] и цитируемую там литературу).

Рассмотрим аналитически электродинамические особенности распространения волновых пучков че-

* E-mail: efimkhazanov@gmail.com

рез плоскую пластину метасреды в линейном и нелинейном режимах. В параксиальном приближении дифракция волнового пучка в такой среде является не просто анизотропной. В широкой области параметров метасреды для необыкновенного волнового пучка дифракционные коэффициенты вдоль и поперек оси искусственного кристалла оказываются разных знаков. В частности, это приводит к тому, что плоская граница между диэлектриком и такой метасредой действует как необычная линза (металинза). Она фокусирует расходящееся излучение и расфокусирует сходящееся, т. е. коренным образом меняет угловой спектр волнового поля. Эффект «отрицательной» дифракции существенным образом сказывается и на динамике самовоздействия лазерного излучения в метасреде с кубичной нелинейностью.

В следующем разделе на основе тензора эффективной диэлектрической проницаемости среды получим уравнения Гельмгольца для обыкновенного и необыкновенного волновых полей в виде, удобном для решения граничных задач. В последующих двух разделах рассмотрим новые структурные особенности в эволюции волнового поля, определяемые отрицательной дифракцией: фокусировку излучения плоским слоем метасреды в квазиоптическом приближении и подавление самофокусировки лазерного излучения в среде с кубичной нелинейностью.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим материал, изготовленный из плоских слоев, ориентированных перпендикулярно оси z, причем диэлектрическая проницаемость слоев чередуется, принимая последовательно значения ε_1 и ε_2 (рис. 1). Если толщина слоев много меньше длины волны λ , то материал можно описывать с помощью эффективного (усредненного по периоду структуры) тензора диэлектрической проницаемости [4, 5], который имеет такой же вид, как и тензор одноосного кристалла:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ — диэлектрические проницаемости вдоль и поперек оси z,

$$\begin{aligned} \varepsilon_\perp &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\ , \\ \varepsilon_\parallel^{-1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя (1), (2) в уравнение Максвелла, получаем систему уравнений Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + K\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (1-K)\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + k_0^2 \varepsilon_\perp E_x = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + K\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - (1-K)\frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + k_0^2 \varepsilon_\perp E_y = 0, \tag{4}$$

где $K = \varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel$ — параметр анизотропии среды. Уравнения (3), (4) имеют хорошо известные дисперсионные соотношения для обыкновенной и необыкновенной плоских волн:

$$\begin{aligned} &k_\parallel^2 + k_\perp^2 - k_0^2\varepsilon_\perp = 0, \\ &\frac{k_\parallel^2}{\varepsilon_\perp} + \frac{k_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} - k_0^2 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $k_\perp$, $k_\parallel$ — компоненты волнового вектора вдоль и поперек оси одноосного кристалла, $k_0 = \omega/c$, ω — частота волны, c — скорость света. Выражения (5) можно получить, например, представляя тригонометрические функции, содержащиеся в точном трансцендентом уравнении [1], в ряд и ограничиваясь квадратичными слагаемыми волновых векторов. Заметим, что эти дисперсионные соотношения следуют в рассматриваемом здесь приближении (размеры слоев много меньше длины волны излучения) из соответствующих формул, полученных Рытовым при исследовании электромагнитных волн в плоскослоистых средах с периодически меняющимся показателем преломления [6] и приведенных в книгах [1, 3] в приложении к фотонным кристаллам.

Наиболее интересен случай, когда одна из сред, пусть вторая, имеет диэлектрическую проницаемость меньше нуля ($\varepsilon_2 < 0$). Среды с $\varepsilon < 0$, в которых колебания свободных электронов определяют оптические свойства наноструктур, относятся к плазмоподобным [2]. Они широко используются в наноплазмонике. Разные знаки у ε_1 и ε_2 означают разные знаки у $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$, поскольку $\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel = \varepsilon_1\varepsilon_2$, что следует из (2). В свою очередь, разные знаки у $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ означают, что эллипсоидальная поверхность волновых векторов (или показателя преломления) в классической оптике анизотропных сред принципиальным образом меняется. При $\varepsilon_\perp < 0$, $\varepsilon_\parallel > 0$, как нетрудно видеть из (5), она представляет собой однополостный гиперболоид, при $\varepsilon_\perp > 0$, $\varepsilon_\parallel < 0$ — двухполостный. Кроме того, в этом случае параметр анизотропии среды $K = \varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel$ становится отрицательным. В данной работе мы в основном будем рассматривать именно этот случай: распро-

странение пучка через плоский слой метасреды (металинзы) в условиях отрицательной дифракции, т. е. при $K < 0$.

Чтобы разделить систему (3), (4) на два отдельных уравнения для обыкновенного и необыкновенного пучков, нужно избавиться от смешанных производных. Для этого продифференцируем (3) по x, а (4) по y и сложим эти уравнения и, наоборот, продифференцируем (3) по y, а (4) по x и вычтем. С учетом уравнений Максвелла получим для обыкновенного и необыкновенного пучков соответственно

$$\frac{\partial^2 H_{zo}}{\partial z^2} + \Delta_\perp H_{zo} + k_0^2 \varepsilon_\perp H_{zo} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 E_{ze}}{\partial z^2} + K\Delta_\perp E_{ze} + k_0^2 \varepsilon_\perp E_{ze} = 0, \tag{7}$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Если $K < 0$, то в (7) перед лапласианом появляется знак «минус», что эквивалентно смене знака дифракции для необыкновенного пучка.

Для решения граничных задач удобны уравнения для непрерывных на границе компонент полей, поэтому уравнения (6), (7) пригодны лишь для описания эволюции волновых пучков, распространяющихся перпендикулярно оптической оси кристалла. Для искусственных кристаллов (для метасреды) в этом случае требуются толстые образцы, содержащие неразумно большое количество слоев. Рассмотрим практически более интересный случай распространения пучка вдоль оптической оси (ось z направлена поперек слоев). Для плоских волн ($\Delta_\perp = 0$) в этом случае разница между обыкновенной и необыкновенной волнами исчезает, поскольку обе имеют одинаковые показатели преломления. Однако для пучков разница принципиальна, поскольку уравнения (6), (7) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 E_{xo}}{\partial z^2} + \Delta_\perp E_{xo} + k_0^2 \varepsilon_\perp E_{xo} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 E_{xe}}{\partial z^2} + K\Delta_\perp E_{xe} + k_0^2 \varepsilon_\perp E_{xe} = 0, \tag{9}$$

причем связь компонент поля E_x и E_y различна для обыкновенного E_o и необыкновенного E_e пучков и определяется из условий $E_z = 0$ и $H_z = 0$:

$$\frac{\partial E_{yo}}{\partial y} = -\frac{\partial E_{xo}}{\partial x}\ , \ \frac{\partial E_{ye}}{\partial x} = \frac{\partial E_{xe}}{\partial y}\ . \tag{10}$$

Заметим, что (10) содержит z в виде параметра. В силу симметрии задачи уравнения (8), (9) имеют место и для E_y-компоненты поля. Переходя от поля E_x к медленно меняющейся комплексной амплитуде Ψ, подставим в (8), (9) $E_{xo,e} = \Psi_{o,e}(x, y, z)e^{ik_0\sqrt{\varepsilon_\perp}z}$ и получаем «укороченные» уравнения в безразмерных переменных $z_n = k_0 z/2\sqrt{\varepsilon_\perp}$, $x_n = k_0\sqrt{\varepsilon_\perp}x$, $y_n = k_0\sqrt{\varepsilon_\perp}y$ (индекс «n» опущен),

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \Psi_o}{\partial z} + \Delta_\perp \Psi_o = 0, \\ i\frac{\partial \Psi_e}{\partial z} + K\Delta_\perp \Psi_e = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

описывающие эволюцию обыкновенного и необыкновенного волновых пучков соответственно. Несмотря на формальную схожесть этих уравнений, они имеют разные решения в зависимости от знака коэффициента дифракции K, что будем называть отрицательной дифракцией. Это связано с кардинальным изменением структуры поверхности волновых векторов. В рамках параксиального описания отрицательность коэффициента дифракции ($K < 0$) означает, что эволюция необыкновенного волнового пучка происходит как бы в обратном направлении (z заменяется на $-z$). Особенно заметно это сказывается на структуре волнового фронта волнового пучка. При изменении знака K меняется кривизна фазового фронта, что приводит к смене режима распространения излучения с фокусирующего на дефокусирующий и наоборот. В следующих разделах рассмотрим эту особенность метасреды более детально.

3. ПЛОСКАЯ МЕТАЛИНЗА

Рассмотрим граничную задачу распространения волнового пучка вдоль оси z (рис. 1 *a*).

Коэффициенты отражения обыкновенной и необыкновенной плоских волн, падающих на переднюю границу метасреды, одинаковы и определяются $\varepsilon_\perp$. В этой вырожденной ситуации для простоты рассмотрим безотражательное приближение, которое строго реализуется при $\varepsilon_\perp = 1$. Это сравнительно легко реализовать, особенно в системе чередующихся слоев разной толщины. Пусть на плоский слой метасреды падает гауссов пучок единичной амплитуды $E_x(z = 0)$, поляризованный вдоль оси x:

$$E_x(z = 0) = \Psi_e(x, y, z = 0) + \\ + \Psi_o(x, y, z = 0) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2}}, \tag{12}$$

$$E_y(z = 0) = E_{yo}(x, y, z = 0) + E_{ye}(x, y, z = 0) = 0. \tag{13}$$

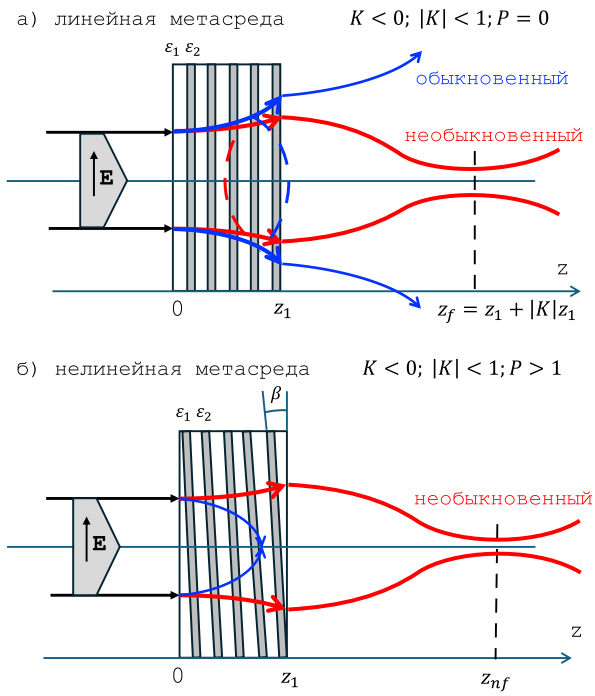

Рис. 1. Качественное представление распространения линейно поляризованного излучения при квазипродольном распространении через метасреду толщиной z_1 в линейном (*а*) и нелинейном (*б*) режимах. Падающий пучок распадается на обыкновенный (синий) и необыкновенный (красный) волновые пучки. Штриховые красная и синяя линии показывают волновой фронт. Обыкновенный пучок расфокусируется в линейном режиме и коллапсирует в сильнонелинейном режиме. Необыкновенный пучок фокусируется метасредой в обоих режимах, но на разных расстояниях — на расстоянии z_f в линейном режиме и z_{nf} в нелинейном

Далее воспользуемся методом Фурье. Полагая $\Psi_{o,e}\ e^{i\kappa_{o,e}z+i\mathbf{kr}}$, находим из уравнений (11) дисперсионные соотношения для необыкновенной и обыкновенной волн в параксиальном приближении:

$$\begin{aligned} \kappa_o &= -\left(k_x^2 + k_y^2\right), \\ \kappa_e &= -K\left(k_x^2 + k_y^2\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Из (10) находим необходимые соотношения между компонентами Фурье полей, которые будем обозначать теми же буквами, что сами поля, но с аргументом $\mathbf{k}$ вместо $\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} E_{yo}(\mathbf{k}, z) &= -\frac{k_x}{k_y}\Psi_o(\mathbf{k}, z), \\ E_{ye}(\mathbf{k}, z) &= -\frac{k_y}{k_x}\Psi_e(\mathbf{k}, z). \end{aligned} \tag{15}$$

Из (12), (13) получаем граничные условие для $\Psi(\mathbf{k})$ при $z = 0$:

$$\begin{aligned} &\Psi_o(z=0,\mathbf{k}) + \Psi_e(z=0,\mathbf{k}) = 2a^2\, e^{-\frac{k^2a^2}{2}}, \\ &k_x^2\Psi_o(z=0,\mathbf{k}) = k_y^2\Psi_e(z=0,\mathbf{k}), \end{aligned} \tag{16}$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Отсюда находим

$$\Psi_{o,e}(z=0,\mathbf{k}) = \frac{2a^2k_{y,x}^2}{k^2}\, e^{-\frac{k^2a^2}{2}}. \tag{17}$$

Эволюция волновых пучков в метасреде определяется дисперсионными соотношениями (14):

$$\Psi_o(x,y,z) = 2a^2 \int \frac{k_y^2}{k^2}\, e^{-\frac{k^2(a^2+2iz)}{2}+i\mathbf{kr}} d\mathbf{k}, \tag{18}$$

$$\Psi_e(x,y,z) = 2a^2 \int \frac{k_x^2}{k^2}\, e^{-\frac{k^2(a^2+2iKz)}{2}+i\mathbf{kr}} d\mathbf{k}. \tag{19}$$

Вычисляя эти интегралы в цилиндрической системе координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $k_x = k\cos\theta$, $k_y = k\sin\theta$, приходим к явным выражениям для автомодельной структуры полей:

$$\begin{aligned} \Psi_o \approx{}& \frac{e^{-\frac{r^2}{2(a^2+2iz)}}}{a^2+2iz} + \frac{2\cos 2\varphi}{r^2}\times \\ &\times\left[1 - \left(1 + \frac{r^2}{a^2+2iz}\right) e^{-\frac{r^2}{2(a^2+2iz)}}\right], \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \Psi_e \approx{}& \frac{e^{-\frac{r^2}{2(a^2+2iKz)}}}{a^2+2iKz} - \frac{2\cos 2\varphi}{r^2}\times \\ &\times\left[1 - \left(1 + \frac{r^2}{a^2+2iKz}\right) e^{-\frac{r^2}{2(a^2+2iKz)}}\right], \end{aligned} \tag{21}$$

из которых видно, что исходная симметрия волнового пучка нарушается. Исследование распределения полей в приосевой области $\left(r^2 \ll a^2\right)$,

$$\Psi_o \approx 1 - \frac{a^2+2iz}{2\left(a^4+4z^2\right)}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2\right), \tag{22}$$

$$\Psi_e \approx 1 - \frac{a^2+2iKz}{2\left(a^4+4K^2z^2\right)}\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right), \tag{23}$$

показывает, что характерные размеры пучков вдоль осей x и y несколько различаются и возрастают в процессе распространения излучения с разным темпом в необыкновенном $a_e^2 = \sqrt{a^4+4K^2z^2}$ и обыкновенном $a_o^2 = \sqrt{a^4+4z^2}$ пучках (рис. 1 *а*). Однако ни a_o, ни a_e не зависят от знака K. Характерная особенность метасреды с $K < 0$ проявляется в структуре фазового фронта. Как нетрудно видеть из (22), (23) и общих выражений (20), (21), кривизны фазовых

фронтов (на рис.1 *a* показаны штриховыми синей и красной линиями) обыкновенного и необыкновенного волновых пучков имеют разные знаки. Это приводит к тому, что при выходе из металинзы ($z \geq z_1$, где z_1 — толщина одноосного кристалла) обыкновенный волновой пучок продолжает расфокусироваться, поскольку параметр анизотропии для него равен единице ($K = 1$) и волновое поле (20) непрерывно на границе $z = z_1$. В автомодельном режиме поведение необыкновенного волнового пучка, как видно из (21), определяется комплексным «радиусом» пучка $a^2 + 2iKz$. В силу непрерывности этого радиуса на границе $z = z_1$, на которой параметр K меняется скачком от $K = K$ до $K = 1$, выражение для комплексного радиуса при $z \geq z_1$ принимает вид $a^2 + 2iKz + 2i(z - z_1)$. Отсюда следует, что ширина становится действительной величиной, равной ее значению на передней границе, а фаза плоской — в фокальной точке при

$$z_f = (1 + |K|)\, z_1. \tag{24}$$

Это означает что фокус металинзы расположен на расстоянии $|K|z_1$ от задней границы одноосного кристалла (рис. 1 *a*).

Рассмотренная металинза (плоский слой среды с отрицательным коэффициентом дифракции) заметно отличается от обычных оптических линз. Она, как поляроид, делит волновой пучок на два. Обыкновенный волновой пучок эволюционирует, как в изотропной среде. Линзовые свойства среды проявляются для необыкновенного волнового пучка и связаны с преобразованием углового спектра излучения на границах среды. Ситуация становится совсем необычной в случае неколлимированного излучения, когда в преобразовании углового спектра одинаковое участие принимают обе границы среды. Заметим, что непрерывность фазы поля приводит к фокусировке металинзой сходящегося падающего излучения. В случае расходящегося излучения металинза является дефокусирующей, если длина кристалла меньше фокусного расстояния передней границы метасреды, и фокусирующей в обратном случае.

Приведенное выше исследование показывает, что коэффициенты возбуждения обыкновенного и необыкновенного пучков в рассматриваемой векторной задаче определяются структурой компоненты поля $E_y(x, y, z)$ на границе $z = 0$. Поскольку специфические особенности здесь связаны с поведением необыкновенного пучка, естественно возникает вопрос о классе полей $E_y(x, y, z)$, для которых коэффициент возбуждения максимален. Из условия связи (10) между поперечными компонентами поля видно, что выражения для них могут быть записаны в виде производных от некоторой функции $\Phi(x, y)$,

$$E_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad E_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{25}$$

эволюция которой описывается тем же уравнением:

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial z} + K\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{26}$$

Здесь особый интерес представляют автомодельные волновые пучки (собственные моды). Так в классе волновых пучков Гаусса–Эрмита [1],

$$\Phi_n = \frac{1}{a(z)} H_n\left(\frac{x}{a(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2(z)} + \right.$$
$$\left. + iK\frac{\partial a}{\partial z}\frac{x^2 + y^2}{4a(z)} - i(2n+1)z'\right), \tag{27}$$

где H_n — полиномы Эрмита, $a^2(z) = a_0^2 + 4K^2 z^2/a_0^2$, $z' = \int dz/a^2(z)$, a_0 — ширина волнового пучка в фокусе при $z = z_f$. При $n = 0$ с учетом $H_0 = 1$ получаем радиально-симметричную моду необыкновенного пучка:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{x}{a^2}\left(1 - 2iK^3\frac{z}{a_0^2}\right)\Phi_0\,, \\ E_y &= -\frac{y}{a^2}\left(1 - 2iK^3\frac{z}{a_0^2}\right)\Phi_0\,. \end{aligned} \tag{28}$$

При $n = 1$ с учетом $H_1 = x/a(z)$ получаем собственную моду дипольного типа [1)]:

$$\begin{aligned} E_x &= \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - 2iK^3\frac{z}{a_0^2}\right)\right)\frac{\Phi_0}{a}\,, \\ E_y &= -\frac{xy}{a^2}\left(1 - 2iK^3\frac{z}{a_0^2}\right)\frac{\Phi_0}{a}\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Заметим, что (29) отличается от (21).

Другой класс широко используемых решений этого уравнения — моды Лагерра–Гаусса [7, 8]. Они описывают вихревые лазерные пучки, комплексная амплитуда которых имеет азимутальную зависимость вида

$$\Phi_m(r, \varphi, z)\ \Psi_m\left(\frac{r}{a(z)}, z\right) e^{im\varphi}. \tag{30}$$

Интенсивность таких пучков является радиально-симметричной функцией, поэтому в

[1)] На существование дипольной моды обратил внимание Е. Д. Господчиков.

полярной системе координат для компонент полей (25) следуют соотношения

$$E_x = -\cos\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},$$
$$E_y = -\sin\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}. \quad (31)$$

Отсюда можно составить выражение

$$E_{x,e} + iE_{y,e} = -\left(\frac{\partial\Psi_{e,m}}{\partial r} + \frac{m}{r}\Psi_{e,m}\right)e^{i(m-1)\varphi}. \quad (32)$$

Все приведенные выше собственные моды необыкновенного пучка распространяется в автомодельном режиме через металинзу и фокусируется в условиях отрицательной дифракции ($K < 0$) на расстоянии $L_f = |K|z_1$ от задней границы кристалла. Аналогичное выражение,

$$E_{x,o} + iE_{y,o} = i\left(\frac{\partial\Psi_{o,m}}{\partial r} + \frac{m}{r}\Psi_{o,m}\right)e^{i(m-1)\varphi}, \quad (33)$$

можно получить и для собственной моды обыкновенного пучка и сделать те же выводы относительно ее расходимости, что и выше.

4. САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ИСКУССТВЕННОМ ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ

В оптике нелинейный отклик кристалла определяется симметрией кристаллической решетки и при строгом описании довольно сложным (тензорным) образом зависит от поля. Рассматриваемый искусственный одноосный кристалл состоит из набора локально изотропных сред, каждая из которых обладает кубической нелинейностью. Это обстоятельство, по крайней мере на первом этапе, позволяет упростить описание самовоздействия излучения в метасреде. Нетривиальное преобразование углового спектра излучения в метасреде представляется особенно важным в теории самовоздействия волновых полей. Дело в том, в что в оптике кубическая нелинейность среды приводит к коллапсу излучения с мощностью, превышающей критическую мощность самофокусировки, и последующим негативным последствиям (разрушению структуры материала и т. д.). Критическая мощность — характерный параметр нелинейной среды [9, 10]. Его физический смысл: если мощность излучения равна критической мощности, то нелинейная самофокусировка становится сравнима с дифракционным расплыванием пучка. Ситуация усугубляется еще и развитием мелкомасштабной самофокусировочной неустойчивости (см. работы [9–11] и ссылки в них).

В рассматриваемом нами далее случае квазипродольного распространения самовоздействие линейно поляризованного (как и в линейной задаче (9) вдоль x) необыкновенного волнового пучка в среде с кубической нелинейностью описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + K\Delta_\perp E_x + k_0^2\varepsilon_\perp E_x + \\ + \alpha k_0^2\varepsilon_\perp\left(|E_x|^2 + |E_y|^2\right)E_x = 0. \quad (34)$$

Коэффициент кубической нелинейности α в одноосном кристалле определяется аддитивно, в соответствии со структурой $\varepsilon_\perp$, вкладами как от диэлектрической, так и от плазмоподобной частей метасреды. Хорошо известно, что в металлах в оптическом диапазоне кубическая нелинейность на несколько порядков слабее, чем в диэлектриках. Поскольку это связано с высокой концентрацией свободных зарядов, можно ожидать, что вклад в кубическую нелинейность и других плазмоподобных сред можно не учитывать. Таким образом, величина α определяется диэлектрической частью метасреды и является положительной величиной, как и в нелинейной оптике обычных диэлектриков.

В параксиальном приближении здесь мы, как обычно, не учли в силу малости вклад z-компоненты поля в нелинейность. Компонента поля E_y связана с E_x локально соотношением (10), которое выделяет необыкновенный волновой пучок из полного волнового поля. В случае строго продольного (вдоль оси z) распространения излучения в численных расчетах в качестве граничных условий естественно использовать волновые пучки Гаусса – Эрмита (27). Однако, как нетрудно видеть, нелинейная линза, которая формируется в полном поле $|E_x|^2 + |E_y|^2$ необыкновенного волнового пучка, является сильно аберрационной, и методами теории самовоздействия для получения аналитических соотношений здесь воспользоваться не удается.

В теории самовоздействия волновых пучков [12] хорошо известно, что самофокусировка излучения имеет место при условии

$$\alpha K > 0. \quad (35)$$

Отсюда при отрицательной дифракции ($K < 0$) следует ожидать дифракционного расплывания

необыкновенного волнового пучка в среде с фокусирующей кубической нелинейностью. Заметим, что в случае продольного (строго вдоль z) распространения излучения аналитическое рассмотрение задачи сильно усложняется. Для упрощения ситуации предположим, что излучение распространяется под небольшим углом к оси z квазипродольно (см. рис. 1 *б*). Полагая в (34) $E_x = \Psi(x,y,z)\, e^{i\kappa_z z + i\kappa_x x}$, приходим к следующему уравнению для описания эволюции поля в среде:

$$2ik_z\frac{\partial\Psi}{\partial z}+2ik_xK\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+K\Delta\Psi+k_0^2\varepsilon_\perp|\Psi|^2\Psi=0. \tag{36}$$

Здесь мы считаем $\alpha=1$, а продольное k_z и поперечное k_x волновые числа связаны дисперсионным соотношением $k_z^2+Kk_x^2=k_0^2\varepsilon_\perp$. В (36) предполагается, что излучение распространяется под небольшим углом $\beta = k_x/k_z \approx k_x/(k_0\varepsilon_\perp)$ к оси z (квазипродольно). Однако угол β должен быть достаточно большой, чтобы пучки обыкновенной и необыкновенной волн пространственно разделились. При этом из (10) в параксиальном приближении получаем

$$E_{ye}=\frac{1}{k_x}\frac{\partial E_{xe}}{\partial x}\ll E_{xe},$$

и, следовательно, кубическая нелинейность среды определяется лишь x-компонентой поля.

Вводя новые переменные $\xi = k_z x - Kk_x z$, $\eta = k_z z + k_x z$, приведем (36) к обычному в квазиоптике виду:

$$2i\frac{k_0^2\varepsilon_\perp}{k_z}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}+Kk_0^2\varepsilon_\perp\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}+K\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+k_0^2\varepsilon_\perp|\Psi|^2\Psi=0. \tag{37}$$

При получении (37) мы пренебрегли второй производной по эволюционной переменной η, как это обычно делается в параксиальном приближении. Переходя в (37) к безразмерным переменным $z_n = k_z\frac{\eta}{2}k_0^2\varepsilon_\perp$, $y_n = k_0\sqrt{\varepsilon_\perp}y, x_n = \xi$ (индекс «n» опущен), окончательно получаем

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z}+K\Delta\Psi+|\Psi|^2\Psi=0. \tag{38}$$

Для наглядного описания структурных особенностей эволюции необыкновенного волнового пучка в условиях отрицательной дифракции ($K<0$) воспользуемся безаберационным приближением [12]. Предположим, что волновой пучок при $z=0$ аксиально симметричный и имеет гауссову форму:

$$\Psi=\frac{\sqrt{P}}{a(z)}e^{-\frac{r^2}{2a^2(z)}+i\varphi(z)r^2}, \tag{39}$$

т. е. характеризуется двумя параметрами: шириной волнового пучка $a(z)$ и обратной кривизной фазового фронта $\varphi(z)$, которые меняются по мере его распространения в направлении z. Здесь и далее r, $a(z)$ и $\varphi(z)$ будем считать нормированными на длину волны. Мощность пучка P является интегралом задачи. Подставляя (39) в (38), нетрудно получить уравнения для эволюции параметров пучка:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}=\frac{4K(K-P)}{a^3}, \tag{40}$$

$$\varphi(z)=-\frac{1}{4Ka(z)}\frac{\partial a}{\partial z}, \tag{41}$$

где мощность излучения P измеряется в критических мощностях самофокусировки в обычной среде с $K=1$. В линейном случае ($P\ll 1$) эти уравнения являются точными. В нелинейном режиме самовоздействие описывается посредством аппроксимации нелинейного слагаемого в (38) вблизи оси системы параболой с соответствующими интенсивности излучения параметрами. Видно, что при $K<0$ происходит смена режима самовоздействия, и уравнение (40) описывает самодефокусировку волнового пучка. Специфику задачи отражает уравнение (41) для $\varphi(z)$. Оно существенным образом зависит от знака K. Фактически, наряду с непрерывностью ширины волнового пучка

$$a_1\left(z=z_b\right)=a_2\left(z=z_b\right), \tag{42}$$

Данное выражение является граничным условием на границе раздела сред $z=z_b$ с разными коэффициентами дифракции:

$$\frac{\partial a_1\left(z=z_b\right)}{\partial z}\frac{1}{K_1}=\frac{\partial a_2\left(z=z_b\right)}{\partial z}\frac{1}{K_2}. \tag{43}$$

Именно соотношение (43) описывает необычные линзовые свойства плоской границы между обычной средой ($K=1$) и метасредой с $K<0$.

В случае коллимированного $\varphi(z=0)=0$ на передней границе нелинейной метасреды пучка шириной $a(z=0)=a_0$ дальнейшая эволюция волнового пучка описывается при $K<0$ уравнениями (40), (41). Решив их, на задней границе $z=z_1$ находим

$$\begin{aligned} a^2\left(z_1\right)&=a_0^2+\frac{4|K|\left(|K|+P\right)z_1^2}{a_0^2},\\ \varphi\left(z=z_1\right)&=-\frac{|K|\left(|K|+P\right)z_1}{Ka_0^2a^2\left(z_1\right)}. \end{aligned} \tag{44}$$

В изотропной среде при $z\geq z_1$ гауссовы пучки (39) являются точным решением линейного уравнения (38) при $K=1,\ P=0$. При этом для эволюции

параметров гауссова пучка шириной $b(z)$ и фазой $\varphi_2(z)$ получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = \frac{4}{b^3}, \qquad \varphi_2(z) = -\frac{1}{4b}\frac{\partial b}{\partial z} \tag{45}$$

типа (40), (41). Решение уравнения (45) удобно записать в виде

$$b^2(z) = b_0^2 + \frac{4\left(z - z_{nf}\right)^2}{b_0^2}, \qquad \varphi_2(z) = -\frac{z + z_{nf}}{b_0^2 b^2(z)}, \tag{46}$$

где b_0 — ширина пучка в фокусе, z_{nf} — координата нелинейного фокуса (нелинейная фокальная длина металинзы), см. рис. 1 *б*. Из граничных условий (42), (43) на задней границе нелинейной метасреды ($z = z_1$) получаем

$$b_0^2 = a_0^2 \frac{a_0^4 + 4|K|\left(|K| + P\right) z_1^2}{a_0^4 + 4\left(|K| + P\right) z_1^2}, \qquad z_{nf} - z_1 = \frac{\left(|K| + P\right) b_0^2}{a_0^2} z_1. \tag{47}$$

При $P \gg |K|$, т. е. для мощностей, заметно превышающих критическую мощность самофокусировки, формулы (47) несколько упрощаются:

$$b_0^2 = a_0^2 \frac{1 + |K| P \frac{z_1^2}{L_f^2}}{1 + P^2 \frac{z_1^2}{L_f^2}}, \qquad z_{nf} - z_1 = P \frac{1 + |K| P \frac{z_1^2}{L_f^2}}{1 + P^2 \frac{z_1^2}{L_f^2}} z_1, \tag{48}$$

где $L_f = a_0^2/2$ — длина фокальной области. В практически важном случае «тонких» слоев метасреды ($z_1 \ll L_f$) и умеренных мощностей излучения ($|K| \ll P \ll L_f/z_1$) волновой пучок фокусируется металинзой на расстоянии

$$z_{nf} - z_1 = P z_1. \tag{49}$$

Размер b_0 волнового пучка в перетяжке, как следует из (48), равен первоначальному ($b_0 = a_0$). С ростом мощности величина b_0 уменьшается:

$$b_0 = a_0 \sqrt{\frac{|K|}{P}}. \tag{50}$$

Иными словами, интенсивность излучения в фокусе будет возрастать пропорционально P^2. При $P \gg \left(L_f/z_1\right)^2$ фокус металинзы расположен на том же расстоянии, что и в линейной задаче (24): $z_{nf} = z_f$. Слишком сильные фокусирующие свойства нелинейной металинзы можно ослабить и даже получить на выходе коллимированный волновой пучок. Перспективным здесь представляется использование расходящихся на входе волновых пучков. В частности, в силу структуры параболического уравнения начальное комплексно сопряженное распределение волнового пучка на выходе из металинзы в рассмотренной выше задаче преобразуется в коллимированный волновой пучок.

Достаточно очевидный вывод о смене режима самовоздействия в условиях отрицательной дифракции, которая проявляется в метасреде для необыкновенного волнового пучка, в результате проведенного исследования приводит к возможности распространения через металинзу лазерного излучения с мощностью, заметно превышающей критическую мощность самофокусировки обыкновенного волнового пучка. Известный недостаток плоских слоев метасреды при передаче субволновых деталей изображения, связанный с короткофокусностью металинз в нелинейном режиме превращается в достоинство.

4.1. Обсуждение материалов для создания искусственного кристалла в приложении к подавлению оптической самофокусировки

Ввиду ограниченности экспериментальных данных и сложности проблемы сделать определенные выводы относительно практического использования рассматриваемых метасред не представляется возможным. Это требует более детального исследования. Далее приведем оценки на основе известных нам данных. Характерный структурный масштаб неоднородностей среды в нанооптике составляет 10–100 нм. В случае длин волн короче телекоммуникационной ($\lambda = 1.5$ мм) для создания метасред используют металлы (золото, серебро и др.). Они имеют диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_m = -10 \ldots -30$ и сравнительно небольшую мнимую часть $\operatorname{Im}\varepsilon_m \cong 1$. Поскольку в оптическом диапазоне диэлектрические проницаемости сред порядка единицы, приходится использовать дополнительную возможность, связанную с различными толщинами слоев в наноструктуре. В результате соответствующего обобщения вместо (2) получаем

$$\varepsilon_\perp = \frac{L_d\varepsilon_1 + L_m\varepsilon_2}{L_d + L_m}, \quad \varepsilon_\parallel = \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{L_m + L_d}{L_d\varepsilon_2 + L_m\varepsilon_1}, \tag{51}$$

где L_d и L_m — толщины диэлектрического и металлического слоев. Для волновых пучков, распростра-

няющих вдоль оси кристалла в безотражательном режиме ($\varepsilon_\perp = 1$), коэффициент анизотропии

$$K = -\frac{L_m\left(\varepsilon_1 + |\varepsilon_2|\right)\left(\varepsilon_1 - 1 - |\varepsilon_2|\right)}{\left(L_d + L_m\right)\varepsilon_1\,|\varepsilon_2|\left(\varepsilon_1 - 1\right)} \qquad (52)$$

остается положительным, поскольку трудно реализовать условие $\varepsilon_1 > 1 + |\varepsilon_2|$, и самофокусировка не подавляется. Однако это условие сравнительно легко выполнить, если вместо металла в наноструктурированной среде использовать исследованные в [13–15] нанокомпозиты на основе титана. В них эффективную диэлектрическую проницаемость металла в оптическом диапазоне удается уменьшить более чем в три раза. Перспективным здесь представляется использование полуметаллов (висмута, сурьмы и т. д.), у которых диэлектрическая проницаемость в этом диапазоне заметно меньше. Однако нам неизвестно, чтобы их применяли в нанооптике.

Для $\lambda > 1.5$ мкм имеется методика создания тонких пленок материалов на окиси цинка [16]. В результате допирования окиси цинка галлием, алюминием и другими элементами концентрацию носителей можно увеличить до 10^{21} см$^{-3}$. Диэлектрические проницаемости таких плазмоподобных материалов по модулю могут быть даже меньше, чем у диэлектриков. В работе [16] одиночные слои допированной окиси цинка толщиной до 400 нм использовались для исследования возбуждения и распространения в них поверхностных волн. Поскольку поверхностные волны существуют при $|\varepsilon_2| \geq 1$, условие отрицательной дифракции $\varepsilon_1 > 1 + |\varepsilon_2|$ в этом диапазоне сравнительно легко реализовать.

Общей проблемой наноструктуированных и композитных сред является наличие (в большинстве случаев) у эффективной диэлектрической проницаемости мнимой части, сравнимой с действительной. Это требует дополнительного исследования. В частности, в [17] предложена и реализована схема плазмон-инжекционной компенсации потерь в метаматериале. Что же касается подавления самофокусировки, то его эффективность даже возрастает. Это видно их структуры уравнений (36), (38), в которых коэффициент анизотропии K становится комплексным. В результате эволюция поля становится, независимо от знака K, скорее диффузионной, чем волновой.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описание плоскослоистой среды как одноосного кристалла с эффективными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ позволило установить и исследовать аналитически в параксиальном приближении электродинамические особенности распространения волновых пучков в такой среде. В отличие от одноосных кристаллов классической оптики рассматриваемая метасреда является не просто сильноанизотропной, а при определенных условиях имеет отрицательный параметр анизотропии $K = \varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel$. Проявление этой особенности искусственного кристалла проиллюстрировано при решении задачи прохождения волнового поля через плоский слой метасреды в линейном и нелинейном режимах.

В линейном случае распространения волнового пучка вдоль оси кристалла, т. е. когда показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн одинаковы, пучок разделяется, как в обычном одноосном кристалле, на обыкновенный и необыкновенный волновые пучки. Важно, что каждый из этих пучков содержит обе поперечные компоненты электрического поля, т. е. эти пучки нельзя разделить поляризатором. На выходе из плоского слоя «обыкновенная» часть коллимированного на входе пучка продолжает дифракционным образом расфокусироваться. Напротив, «необыкновенная» часть волнового пучка при параметре анизотропии $K < 0$ фокусируется задней границей метасреды на расстоянии $|K|z_1$, где z_1 — толщина метасреды. Таким образом, искусственный кристалл с $K < 0$ является оптическим прибором для выделения необыкновенного пучка — собственной моды задачи.

Отрицательная дифракция необыкновенных волновых пучков коренным образом меняет характер самовоздействия их в метасреде с фокусирующей кубической нелинейностью. Для необыкновенного пучка изменение знака K означает смену режима самовоздействия с фокусирующего на дефокусирующий. Это особенно важно в оптике, где кубическая нелинейность среды является фокусирующей. Смена режима самовоздействия исследована при квазипродольном распространении мощного излучения через слой метасреды, когда обыкновенный и необыкновенный пучки пространственно разделены. Показано, что необыкновенный волновой пучок с мощностью, заметно превышающей критическую мощность самофокусировки, хотя и дефокусируется внутри метасреды, фокусируется задней границей искусственного кристалла на таком же расстоянии, как и в линейном случае, но размер пучка в фокусе гораздо меньше, чем в линейном случае.

Благодарности. Авторы признательны Е. Д. Господчикову и А. Г. Литваку за полезные обсуждения затронутых в работе вопросов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН (проекты FFUF-2023-0002, FFUF-2024-0038).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Новотный, Б. Хехт, *Основы нанооптики*, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2009).

2. В. В. Климов, *Наноплазмоника*, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2010).

3. Е. С. Андрианов, А. П. Виноградов, А. В. Дорофеенко и др., *Квантовая наноплазмоника*: учебное пособие, Интеллект, Долгопрудный (2015).

4. К. В. Барышникова, С. С. Харинцев, П. А. Белов и др., УФН **192**, 386 (2022).

5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2015).

6. С. М. Рытов, ЖЭТФ **29**, 605 (1955).

7. *Квантовое изображение*, под ред. М. И. Колобова, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2009).

8. В. В. Котляр, А. А. Ковалев, *Вихревые лазерные пучки*, Новая техника, Самара (2012).

9. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **3**, 471 (1966).

10. J. H. Marburger, Progr. Quant. Electron. **4**, 35 (1975).

11. Е. А. Хазанов, С. Ю. Миронов, Ж. Муру, УФН **189**, 1173 (2019).

12. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, ИПФ РАН, Нижний Новгород (1997).

13. S. S. Kharintsev, A. V. Kharitonov, A. M. Alekseev et al., Nanoscale **11**, 7710 (2019).

14. S. S Kharintsev, Opt. Lett. **44**, 5909 (2019).

15. S. S. Kharintsev, A. V. Kharitonov, A. R. Gazizovet et al., ACS Appl. Mater. Interfaces **12**, 3862 (2020).

16. S. Kalushniak, S. Sadofev, and E. Hennenberger. Phys. Rev. Lett. **112**, 137401 (2014).

17. A. Ghoshrov, W. Adams, X. Zhang et al., Opt. Lett. **43**, 1810 (2018).