ЖЭТФ, 2025, том 168, вып. 2 (8), стр. 156–163

ОПЕРАТОР ДЕВИАЦИИ ЧАСТОТЫ И ШИРИНА СПЕКТРОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ДИССИПАЦИЕЙ

А. С. Чиркин *

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 апреля 2025 г.
после переработки 3 апреля 2025 г.
Принята к публикации 3 мая 2025 г.

Изложено последовательное обоснование предложенного оператора девиации частоты для узкополосного фотонно-волнового пакета, который, в отличие от ранее введенных операторов частоты, не является функционалом. В качестве примера его применения выполнены расчеты ширины спектров параметрически связанных нелинейных колебаний с двукратным соотношением частот. С помощью развитого подхода получены выражения для ширин спектров колебаний с учетом потерь на обеих взаимодействующих частотах. Разработанный в настоящей работе подход можно использовать для анализа ширин спектров колебаний более сложных физических систем, в том числе связанных колебаний разной физической природы.

DOI: 10.31857/S0044451025080036

1. ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с принципом квантовой физики принято считать, что каждому измеряемому (наблюдаемому) параметру можно сопоставить эрмитов оператор. Хорошо известны операторы, соответствующие координате, импульсу, угловому моменту, стоксовым параметрам, квадратурным компонентам, числу фотонов и т. п. Что касается описания квантового состояния светового поля, то, как известно, введение оператора фазы встречается с определенными трудностями и есть ряд предложений введения фазового оператора. Ситуация с введением оператора фазы довольно обстоятельно обсуждается в обзоре [1]. С момента его публикации принципиально новых результатов по этому вопросу, насколько нам известно, не было получено. В результате изучения исследователи пришли к выводу, что физический смысл имеет лишь разность фаз (см., например, [2–4]). Поэтому значение постоянной фазы часто полагают равным нулю.

Вместе с тем оказалось, что при исследовании ширины спектра колебаний, который зависит от флуктуаций частоты, можно обойти проблему операторной фазы с помощью введения оператора девиации частоты, т. е. через временную зависимость отстройки частоты от несущей частоты [5, 6].

Вообще в квантовой теории частота и время считаются параметрами. В учебной литературе по квантовой физике соотношение неопределенности энергия–время $\Delta E\tau \geq \hbar/2$ (ΔE — неопределенность энергии) обычно трактуется как невозможность точного измерения энергии ($\Delta E \neq 0$) при ограниченном времени измерения τ либо как энергетическая неопределенность состояния, обусловленная конечным временем жизни. Рассматриваемое соотношение неопределенности является фактически аналогом классического соотношения взаимности $\Delta\omega\tau_p \approx 1$, где $\Delta\omega$ — ширина спектра колебаний, τ_p — длительность импульса или время корреляции случайного поля.

Истинное соотношение неопределенности энергия–время или, с учетом связи энергии с частотой, соотношение неопределенности частота–время должно следовать из коммутационных соотношений соответственно $[\hat{E}, \hat{t}]$, $[\hat{\delta\omega}, \hat{t}]$. В связи с этим в квантовой физике предложен ряд вариантов

* E-mail: aschirkin@physics.msu.ru

введения оператора времени $\hat{t}$ (см. [7, 8] и цитируемую там литературу, а также недавние публикации [9, 10] и ссылки в них).

В книге [11] и статье [12] впервые был введен временной оператор, названный оператором функционального времени, представляющий собой время, усредненное по оператору распределения плотности потока фотонов. Тем самым принимается во внимание, что время регистрации события носит случайный характер. В [11, 12] получено соотношение неопределенности $\Delta E \Delta t \geq \hbar/4\pi$ (в принятой там нормировке), где Δt — временная неопределенность наблюдения квантового события. В [10] этот результат получен несколько другим способом. В развитом в [11, 12] подходе энергия представляет собой операторный частотный функционал. Следует отметить, что в [10] операторный и временной функционалы, трактуемые как квантовые непрерывные переменные, применены для построения ряда унитарных операторов.

В упомянутой выше работе [5], связанной с исследованиями спектра нелинейных колебаний, оператор девиации частоты введен без использования частотного функционала (см. также ниже), последний представляет собой, по существу, оператор центра тяжести спектрального распределения, и соответственно неопределенность является среднеквадратичной флуктуацией. Оператор же девиации частоты не является интегральным.

Целью настоящей работы являются последовательный вывод оператора девиации частоты и на его основе квантовый анализ ширины спектра оптического параметрического генератора. Развиваемый подход исследования ширины спектра связанных колебаний свободен от адиабатического приближения, которое обычно используется в нелинейных колебаниях, позволяя свести изучение флуктуаций колебаний к модели Ван дер поля. Сказанное относится не только к параметрическим генераторам [14, 15, 18], но и к лазерам [16].

Работа построена следующим образом. Раздел 2 содержит известные соотношения для фотонно-волнового пакета, которые в разд. 3 используются для определения оператора девиации частоты фазово-модулированного излучения. В разд. 4 рассмотрены операторные временные и частотные функционалы, которые, как показано, дают интегральные характеристики для фотонно-волнового пакета. В разд. 5 в качестве параметрически связанных колебательных систем с потерями анализируется процесс параметрической генерации в вырожденном частотном режиме. Ширина спектра параметрически возбуждаемого колебания, рассчитанного с помощью оператора девиации частоты, представлена в разд. 6. На основе аналогичных расчетов в разд. 7 получена ширина спектра частоты накачки на выходе при монохроматической входной. В разд. 8 обсуждаются полученные результаты и приведены оценки ширин спектров колебаний.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ФОТОННО-ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Излучение с конечной шириной спектра, о котором пойдет речь в настоящей работе, является многомодовым фотонно-волновым пакетом. Для случая узкополосного спектра шириной $\Delta\omega$, сосредоточенного вблизи несущей частоты ω_0 ($\Delta\omega \ll \omega_0$), поле в некотором сечении среды вдоль направления распространения можно представить в виде [17]

$$\hat{E}(t) = iC[a(t)e^{-i\omega_0 t} - a^\dagger(t)e^{i\omega_0 t}]. \tag{1}$$

Здесь C — классическая величина, зависящая от объема квантования; операторы рождения $a^\dagger(t)$ и уничтожения $a(t)$ фотона — медленно меняющиеся функции времени по сравнению с экспоненциальным множителем. При этом имеем следующие фурье-соотношения:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \\ a(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{i\omega t}dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Аналогичные соотношения можно записать и для операторов рождения $a^\dagger(t), a^\dagger(\omega)$:

$$\begin{aligned} a^\dagger(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^\dagger(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \\ a^\dagger(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^\dagger(t)e^{-i\omega t}dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Справедливы коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [a(t), a^\dagger(t')] &= \delta(t - t'), \\ [a(\omega), a^\dagger(\omega')] &= \delta(\omega - \omega'). \end{aligned} \tag{4}$$

Оператор потока фотонов $\hat{n}(t)$ и оператор числа фотонов $\hat{n}$ определяются формулами

$$\hat{n}(t) = a^\dagger(t)a(t), \quad \hat{n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^\dagger(t)a(t)dt. \tag{5}$$

Рассматриваемое излучение с конечной шириной спектра является многомодовым фотонно-волновым пакетом. В качестве базиса его описания возьмем когерентные состояния. Тогда состояние многомодового поля в этом базисе принимает вид [17]

$$|\{\alpha\}\rangle = |\alpha_{k_1}\rangle|\alpha_{k_1}\rangle..., \tag{6}$$

$\{\alpha\}$ означает набор всех комплексных амплитуд, определяющих когерентное состояние мод в объеме квантования.

Запишем во временном представлении бозе-операторы для фотонно-волнового пакета:

$$a_\alpha^\dagger = \int \alpha(t)a^\dagger(t)dt, \quad a_g = \int \alpha^*(t)a(t)dt, \tag{7}$$

и потребуем выполнения коммутационного соотношения

$$[a_\alpha, a_\alpha^\dagger] = 1, \tag{8}$$

которое справедливо при условии

$$\int |\alpha(t)|^2 dt = 1.$$

Операторы (7) используются, чтобы сконструировать состояния фотонов с непрерывным спектром. Состояние фотонно-волнового пакета с n фотонами

$$|n_\alpha\rangle = (n!)^{-1/2}(a_\alpha^\dagger)^n|0\rangle \tag{9}$$

является аналогом фоковского состояния

$$\hat{n}|n_\alpha\rangle = n|n_\alpha\rangle, \tag{10}$$

где $\hat{n}$ — оператор числа фотонов (5).

При этом имеют место соотношения [17]

$$\begin{gathered} a(t)|\{\alpha\}\rangle = a(t)\exp(a_\alpha^\dagger - \frac{1}{2}\langle n\rangle)|0\rangle = \alpha(t)|\{\alpha\}\rangle, \\ a(\omega)|\{\alpha\}\rangle = \alpha(\omega)|\{\alpha\}\rangle. \end{gathered} \tag{11}$$

Последнее соотношение относится к спектральному представлению.

3. ОПЕРАТОР ДЕВИАЦИИ ЧАСТОТЫ И НАБЕГА ФАЗЫ

Введем эрмитов оператор

$$\hat{\Omega}(t) = \frac{i}{2\langle\hat{n}(t)\rangle}(\dot{a}^\dagger(t)a(t) - a^\dagger(t)\dot{a}(t)), \tag{12}$$

где точка означает временную производную, $\hat{n}(t) = a^\dagger(t)a(t)$ — оператор потока фотонов, $\langle\hat{n}(t)\rangle$ — средний поток фотонов.

Чтобы выяснить физический смысл оператора $\hat{\Omega}(t)$ и определить его собственные значения, рассмотрим узкополосное когерентное излучение, бозе-операторы которого обладают свойством (11). Запишем здесь одно из них

$$\begin{gathered} a(t)|\{\alpha\}\rangle = \alpha(t)|\{\alpha\}\rangle, \\ \langle\{\alpha\}|a^\dagger(t) = \alpha^*(t)\langle\{\alpha\}|. \end{gathered} \tag{13}$$

Пусть собственное значение

$$\alpha(t) = |\alpha(t)|e^{i\phi(t)}.$$

Предположим, что характерный масштаб изменения фазы $\phi(t)$ гораздо меньше, чем таковой для огибающей $|\alpha(t)|$. Тогда, пренебрегая слагаемым с производной $|\dot{\alpha}|(t)$, имеем

$$\begin{gathered} \dot{a}(t)|\{\alpha\}\rangle = i\dot{\phi}(t)\alpha(t)|\{\alpha\}\rangle, \\ \langle\{\alpha\}|\dot{a}^\dagger(t) = -i\dot{\phi}(t)\alpha^*(t)\langle\{\alpha\}|. \end{gathered} \tag{14}$$

При усреднении (12) с учетом (14), получим среднее значение оператора $\hat{\Omega}(t)$:

$$\langle\{\alpha\}|\hat{\Omega}(t))|\{\alpha\}\rangle = \dot{\phi}(t). \tag{15}$$

Видно, что среднее $\left\langle\hat{\Omega}(t)\right\rangle$ определяет скорость изменения фазы, т. е. девиацию частоты. Следовательно, в рассматриваемом приближении можно определить оператор набега фазы на интервале $[t, t+\tau]$:

$$\Delta\hat{\phi}(t+\tau, t) = \int\limits_{t}^{t+\tau} \hat{\Omega}(t^{'})dt^{'}. \tag{16}$$

Изложенный подход будет применен нами при исследовании квантовых флуктуаций в параметрических генераторах света.

4. ЧАСТОТНЫЙ И ВРЕМЕННОЙ ОПЕРАТОРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Запишем операторные выражения

$$\hat{\theta}_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\hat{n}(t)dt, \quad \hat{\Omega}_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Omega\hat{n}(\Omega)d\Omega. \tag{17}$$

При замене операторов $\hat{n}(t), \hat{n}(\Omega)$ на классические функции $n(t), n(\Omega)$ выражения (17) представляют собой временные и частотные функционалы. При этом они имеют физический смысл операторных центров тяжести импульса и спектрального распределения с соответствующей временной и частотной размерностью. Поэтому введенные операторы разумно называть операторное время и операторная частота, чтобы отличить от общепринятых понятий неоператорных величин. Обобщение на операторные моменты времени и частоты более высокого порядка имеет вид

$$\hat{\theta}_{m,f} = \int_{-\infty}^{\infty} t^m \hat{n}(t)dt, \quad \hat{\Omega}_{m,f} = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^m \hat{n}(\Omega)d\Omega. \quad (18)$$

Поскольку в настоящей работе основной интерес состоит в анализе спектра, сравним операторы $\hat{\Omega}$ и $\hat{\Omega}_f$. Преобразуем функциональный оператор $\hat{\Omega}_f$, воспользовавшись фурье-соотношениями (2), (3):

$$\hat{\Omega}_f = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega \hat{n}(\Omega)d\Omega = \\ = \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{a^\dagger(t_1)\frac{d}{dt_1}e^{-i\Omega t_1}a(t_2)e^{i\Omega t_2} - \right. \\ \left. - a^\dagger(t_1)e^{-i\Omega t_1}a(t_2)\frac{d}{dt_2}e^{i\Omega t_2}\right\}d\Omega dt_1 dt_2 = \\ = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[a^\dagger(t_1)\dot{a}(t_1) - \dot{a}^\dagger(t_1)a(t_1)]dt_1. \quad (19)$$

Последнее равенство в (19) получено при интегрировании по времени по частям. Ограничение применимости выражения (19) обусловлено условием квазимонохроматичности фотонно-волнового пакета.

Теперь сопоставим выражения (19) и (12). Они связаны соотношением

$$\hat{\Omega}_f = -\int_{-\infty}^{\infty} \langle\hat{n}(t)\rangle\hat{\Omega}(t)dt. \quad (20)$$

Стоит отметить, что соотношение (20) справедливо для фотонно-волнового пакета, основной вклад в спектр которого дают флуктуации фазы. Из (20) наглядно видно, как и следовало ожидать, что частотный операторный функционал допускает определение интегральных характеристик излучения: средней частоты спектрального распределения и ширины спектра. Применение оператора девиации частоты позволяет найти саму форму распределения спектра.

В следующем разделе с привлечением оператора девиации частоты выполнен анализ спектров колебаний для двух связанных осцилляторов с кратными частотами. Осцилляторы служат моделью с сосредоточенными параметрами параметрического генератора света (ПГС), которая традиционно используется при описании процесса параметрической генерации в оптическом диапазоне.

5. УРАВНЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ, ПОРОГ ГЕНЕРАЦИИ

Проблема флуктуаций частоты и соответственно ширины спектра нелинейно-оптических процессов имеет долгую историю с момента запуска параметрических генераторов света. В связи со сложностью теоретического анализа этой проблемы — решения системы связанных стохастических нелинейных уравнений, использовались различные приближенные подходы (см. [5] и цитируемую там литературу). При этом наиболее корректно удается проанализировать ситуацию, когда потери на одной из частот взаимодействующих колебаний значительно меньше, чем на остальных частотах, что позволяет воспользоваться адиабатическим приближением и свести анализ флуктуаций к таковым в нелинейном осцилляторе Ван дер Поля. Представленный ниже пример нелинейных параметрических взаимодействий демонстрирует, что использование развитого подхода и оператора девиации частоты позволяет выйти за рамки указанных приближений и изучать нелинейные колебательные системы с произвольным соотношением потерь на связанных колебаниях.

Далее, как отмечалось выше, будем развивать квантовую теорию фазовых флуктуаций связанных параметрических колебаний в вырожденном режиме; частота поля накачки ω_p, частота возбуждаемых колебаний $\omega = \omega_p/2$. Бозе-операторы моды накачки и генерируемой частоты обозначим соответственно как a_p и a. Поступающее в резонатор поле накачки содержит большое число фотонов, поэтому его будем описывать классически, вводя обозначение $\alpha_p(t)$.

Уравнения Гейзенберга–Ланжевена для изучаемого процесса хорошо известны, они имеют вид

$$\frac{da(t)}{dt} = 2ga_p(t)a^\dagger(t) - \gamma a(t) + \hat{\xi}(t), \quad (21)$$

$$\frac{da_p(t)}{dt} = -ga^2 - \gamma_p(a_p - \alpha_p^{(0)}(t)) + \hat{\xi}_p(t). \quad (22)$$

Здесь g — коэффициент связи волн, коэффициенты γ и γ_p включают линейные потери в нелинейном кристалле κ, κ_p и коэффициенты отражения по интенсивности R, R_p зеркал:

$$\begin{aligned} &\gamma = (1/2T_c)(\kappa L + 1 - R), \\ &\gamma_p = (1/2T_c)(\kappa_p L + 1 - R_p), \end{aligned} \tag{23}$$

T_c — время обхода резонатора, L — длина нелинейного кристалла.

Операторы случайных источников определяются соотношениями

$$\begin{aligned} &\hat{\xi}(t) = \sqrt{\kappa L/T_c}\hat{b}(t) + \sqrt{(1-R)/T_c}\hat{c}(t), \\ &\hat{\xi}_p(t) = \sqrt{\kappa_p L/T_c}\hat{b}_p(t) + \sqrt{(1-R_p)/T_c}\hat{c}_p(t). \end{aligned} \tag{24}$$

Входящие сюда операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{b}_j(t), \hat{b}_k^\dagger(t_1)] = [\hat{c}_j(t), \hat{c}_k^\dagger(t_1)] = \delta_{jk}\delta(t_1 - t), \tag{25}$$

$$\langle \hat{b}_k^\dagger(t_1)\hat{b}_j(t)\rangle = \langle \hat{c}_k^\dagger(t_1)\hat{c}_j(t)\rangle = \delta_{jk}\langle n_{T,j}\rangle\delta(t_1 - t), \tag{26}$$

где $\langle n_{T,j}\rangle$ — среднее число тепловых фотонов на соответствующей частоте,

$$\langle n_{T,j}\rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega_j/kT} - 1}. \tag{27}$$

Для определения порога параметрического возбуждения поступаем традиционным образом. Пренебрегаем флуктуациями и заменяем операторы на классические величины: a на α и a_p на α_p. В результате имеем

$$\begin{aligned} &2g\alpha_p^{(st)}\alpha^{(st)*} = \gamma\alpha^{(st)}\alpha^{(st)*}, \\ &g\alpha^2 = -\gamma_p(\alpha_p - \alpha_p^{(0)}). \end{aligned} \tag{28}$$

Отсюда нетрудно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\alpha_p^{(st)} = \frac{\gamma}{2g}\frac{\alpha^{(st)}}{\alpha^{(st)*}} = \frac{\gamma}{2g}e^{i2\phi}, \\ &|\alpha^{(st)}|^2 = \frac{\gamma_p}{g}\left[\alpha_p^{(0)}e^{i(\phi_p - 2\phi)} - \frac{\gamma}{2g}\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь ϕ_p и ϕ — фаза накачки и фаза генерируемой волны.

Максимальная амплитуда генерации реализуется при выполнении фазового соотношения

$$\phi = \frac{1}{2}\phi_p \quad \text{или} \quad \phi = \frac{1}{2}\phi_p + \pi, \tag{30}$$

т. е. фаза генерируемого излучения параметрического процесса при повторном его запуске может отличаться на π. Это хорошо известное свойство вырожденного параметрического взаимодействия исследовано экспериментально.

Считая, что условие (30) выполнено, стационарное число параметрически генерируемых фотонов можно записать как

$$\begin{aligned} &n^{(st)} = |\alpha^{(st)}|^2 = \frac{\gamma\gamma_p}{2g^2}\left[\frac{|\alpha_p^{(0)}|}{\alpha_{p,0}^{(thr)}} - 1\right], \\ &\alpha_p^{(thr)} = \frac{\gamma}{2g}, \end{aligned} \tag{31}$$

где величина $\alpha_p^{(thr)}$ определяет порог параметрической генерации. Очевидно, что для параметрического возбуждения интенсивность накачки должна превышать порог.

6. ДИСПЕРСИЯ ФАЗОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ И ШИРИНА СПЕКТРА ГЕНЕРИРУЕМОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В этом разделе мы воспользуемся полученным выше оператором девиации частоты (12). Поскольку изучаем флуктуации в надпороговом режиме генерации, в котором флуктуации числа фотонов малы, оператор потока фотонов считаем не зависящим от времени и заменим классическим числом. В связи с этим уравнение (12) для флуктуаций фазы генерируемого излучения примет вид

$$\dot{\phi}(t) = \hat{\Omega}(t) = i[(\dot{a}^\dagger(t)a(t) - a^\dagger(t)\dot{a}(t))]/2n^{(st)}. \tag{32}$$

Оператор набега фазы на интервале $[t, t+\tau]$ определяется формулой (16), а дисперсия набега фазы дается выражением

$$\langle(\Delta\hat{\phi}(\tau))^2\rangle = \int\int_{t-\tau}^{t} \langle\hat{\Omega}(t'')\hat{\Omega}(t')\rangle dt''\,dt', \tag{33}$$

где усреднение проводится по квантовому состоянию генерируемого поля.

В соответствии с (32) флуктуации оператора $\hat{\phi}(t)$ обусловлены флуктуациями операторов $a^\dagger(t), a(t)$. Поскольку мы изучаем надпороговый режим генерации, мы можем, вообще говоря, выделить в указанных операторах постоянное классическое значение, определяющее среднее число фотонов $n^{(st)}$ и флуктуационные составляющие $\delta a^\dagger(t), \delta a(t)$. Однако для расчета дисперсии фазы гораздо проще, оказывается, использовать сами стохастические уравнения.

Подставим в (32) уравнение (21), после математических преобразований получим

$$\hat{\Omega}(t) = (i/2n^{(st)})[\dot{a}^\dagger(t)a(t) - a^\dagger(t)\dot{a}(t)] =$$
$$= (i/2n^{(st)})[2g\hat{\Sigma}(t) + a(t)\xi^\dagger(t) - a(t)^\dagger\xi(t)]. \quad (34)$$

Оператор $\hat{\Sigma}(t) = a_p^\dagger a^2 - a_p a^{\dagger 2}$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\dot{\hat{\Sigma}}(t) = -[2\gamma + \gamma_p]\hat{\Sigma}(t) + \hat{\zeta}(t) + \hat{\eta}_p(t) + 2\hat{\eta}(t), \quad (35)$$

где случайные источники

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(t) &= \gamma_p[\alpha_p^{(0)*}(t)a^2 - \alpha_p^{(0)}(t)a^{\dagger 2}], \\ \hat{\eta}_p(t) &= \xi_p^\dagger a^2 - \xi_p a^{\dagger 2}, \\ \hat{\eta}(t) &= a_p^\dagger a\xi(t) - a_p a^\dagger \xi^\dagger. \end{aligned} \quad (36)$$

Заметим, что без учета фазовых флуктуаций накачки вкладом флуктуаций, связанных с оператором $\hat{\zeta}(t)$, можно пренебречь, так как учет их флуктуаций в $a(t)$ дает вклад более высокого порядка малости. Кроме того, на данном этапе решения задачи мы можем воспользоваться в (35) адиабатическим приближением, поскольку ширина спектра генерируемого излучения всегда меньше частотной полосы пропускания резонатора, определяющей влияние шума на процесс генерации. Иначе говоря, значение времени релаксации $\tau_{rel} = 1/(2\gamma+\gamma_p)$ величины $\hat{\Sigma}(t)$ меньше времени корреляции генерируемого излучения.

В связи со сказанным из уравнения (35) получаем

$$\hat{\Sigma}(t) = \frac{\hat{\zeta}(t) + \hat{\eta}_p(t) + 2\hat{\eta}(t)}{2\gamma + \gamma_p}. \quad (37)$$

Расчет дисперсии фазы приводит к следующему выражению:

$$\langle(\Delta\hat{\phi}(\tau))^2\rangle = \frac{1}{4n^{(st)}} \int\int_{t-\tau}^{t} \left\{ \left(\frac{2g}{2\gamma+\gamma_p}\right)^2 \times \right.$$
$$\times \left[n^{(st)}K_p(t^{''} - t^{'}) + 4n_p K_\xi(t^{''} - t^{'})\right] + K_\xi(t^{''} - t^{'}) -$$
$$\left. - \frac{8g}{2\gamma+\gamma_p}(n_p)^{1/2}K_\xi(t^{''} - t^{'})\right\} dt^{''}dt^{'}, \quad (38)$$

где мы ввели корреляторы

$$\begin{aligned} K_\xi(t^{''} - t^{'}) &= \langle\xi^\dagger(t^{'})\xi(t^{''})\rangle + \langle\xi(t^{'})\xi^\dagger(t^{''})\rangle, \\ K_p(t^{''} - t^{'}) &= \langle\xi_p^\dagger(t^{'})\xi_p(t^{''})\rangle + \langle\xi_p(t^{'})\xi_p^\dagger(t^{''})\rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

Принимая во внимание соотношения (25), (26) и условие $\langle n(T)\rangle \ll 1$, которые позволят пренебречь тепловыми флуктуациями, для этих корреляторов имеем

$$\begin{aligned} K_\xi(t^{''} - t^{'}) &= 2\gamma\delta(t^{''} - t^{'}), \\ K_p(t^{''} - t^{'}) &= 2\gamma_p\delta(t^{''} - t^{'}). \end{aligned} \quad (40)$$

Исключаем из (38) параметр g с помощью соотношения (31) и подставим выражения (40). В результате несложных преобразований для дисперсии набега фазы получим

$$\langle(\Delta\hat{\phi}(\tau))^2\rangle = \frac{1}{2}D_\phi|\tau|. \quad (41)$$

Коэффициент диффузии фазы D_ϕ определяет ширину лоренцевского спектра излучения вырожденного ПГС, она дается выражением

$$\Delta\omega_0 = D_\phi = \frac{\gamma\gamma_p}{(2\gamma+\gamma_p)^2}\left[\frac{\gamma}{n_p^{(thr)}} + \frac{\gamma_p}{n^{(st)}}\right]. \quad (42)$$

Из полученного результата видно, что ширина спектра зависит как от параметров резонатора ПГС, так и от чисел фотонов пороговой интенсивности накачки $n_p^{(thr)} = (\alpha_p^{(thr)})^2$ и генерируемого излучения $n^{(st)}$. В адиабатическом приближении ($\gamma_p \gg \gamma$) получим

$$\Delta\omega_0^{(ad)} = \frac{\gamma}{n^{(st)}}. \quad (43)$$

В этом приближении исключается влияние параметров накачки на ширину возбуждающего излучения.

7. ШИРИНА СПЕКТРА ИЗЛУЧЕНИЯ НАКАЧКИ НА ВЫХОДЕ

В развиваемой теории ПГС поступающее в резонатор излучение накачки считали монохроматическим. Однако в резонаторе из-за действия шумовых источников и процесса взаимодействия с обладающим конечной спектральной линией генерируемым излучением спектр накачки уширяется. Изложенный выше подход расчета ширины генерируемого спектра позволяет определить также ширину спектра накачки на выходе параметрического генератора.

Обобщение уравнения (32) для флуктуаций фазы накачки имеет вид

$$\hat{\Omega}_p(t) = \frac{i}{2n_p^{(thr)}}\left[(\dot{a}_p^\dagger(t)a_p(t) - a_p^\dagger(t)\dot{a}_p(t))\right]. \quad (44)$$

Здесь принято во внимание, что в процессе параметрической генерации интенсивность накачки сохраняется на пороговом уровне. Превышающая пороговый уровень интенсивность преобразуется в генерируемое излучение.

С учетом (22) уравнение (44) приводится к виду

$$\hat{\Omega}_p(t)=\frac{i}{2n_p^{(thr)}}\left[g\hat{\Sigma}(t)+\xi_p^{\dagger}(t)a_p(t)-a_p^{\dagger}(t)\xi_p(t)\right]. \quad (45)$$

В правой части уравнения (45) опущено слагаемое $\gamma_p(a_p(t)\alpha_p^{(0)*}-a_p^{\dagger}(t)\alpha_p^{(0)})$, которое не содержит в явном виде флуктуации, вкладом которых можно пренебречь.

Поступая далее, как в предыдущем разделе, для ширины спектра накачки при параметрической генерации получим

$$\Delta\omega_{0,p}=\frac{\gamma_p}{n_p^{(thr)}}\left\{1+\left[1+\frac{\gamma^2}{\gamma_p(2\gamma+\gamma_p)}\right]\frac{\gamma}{(2\gamma+\gamma_p)}R+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\gamma_p}{4(2\gamma+\gamma_p)^2}R^2\right\}, \quad (46)$$

где параметр R есть отношение

$$\frac{n^{(st)}}{n_p^{(thr)}}=R.$$

Минимальное уширение спектра накачки на выходе резонатора имеет место при незначительном превышении порога накачки ($R>1$):

$$\Delta\omega_{0,p}\approx\frac{\gamma_p}{n_p^{(thr)}}. \quad (47)$$

Выражение (47) имеет такой же вид, как и (43).

8. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные результаты по ширине спектра излучения ПГС выходят за рамки обычно используемого адиабатического приближения, которому соответствует предположение, что потери на частоте накачки гораздо больше, чем на возбуждаемой частоте. В общем случае ширины спектров согласно формулам (42), (48) зависят как от потерь на обеих частотах, так и от порогового потока фотонов и потока фотонов генерируемого излучения. При этом сложная зависимость от указанных параметров имеется для волны накачки.

Напомним, что фигурирующие в (42), (48) числа фотонов $n^{(st)}, n^{(thr)}$ относятся к внутрирезонаторному полю надпорогового режима генерации. Преобразуем эти формулы через значения параметров на выходе резонатора, т. е. измеряемые величины. С этой целью воспользуемся связью полей внутри и вне резонатора, так называемым соотношением вход-выход [18]. Для возбуждаемого излучения в нашем случае оно имеет вид

$$a_{in}(t)+a_{out}(t)=\sqrt{2\gamma}a(t). \quad (48)$$

Входным полем (в нашем случае оператор $a_{in}(t)=\xi(t)$, см. (21)) для генерируемого излучения является вакуумное, в рассматриваемом режиме им можно пренебречь. Поэтому в терминах потока фотонов на генерируемой частоте имеем

$$n_{out}=2\gamma n^{(st)}.$$

Умножение этого соотношения на энергию фотона дает выходную мощность генерируемого излучения

$$P^{(st)}=2\hbar\omega\gamma n^{(st)}.$$

Параметр γ можно выразить через частотную полосу пропускания «холодного» резонатора:

$$\Delta\omega=2\gamma.$$

Внутри резонатора число фотонов накачки поддерживается на постоянном уровне $n_p^{(thr)}$. Поэтому выходная мощность накачки равна

$$P_p^{(thr)}=2\hbar\omega_p\gamma_p n_p^{(thr)},$$

а частотная полоса пропускания для накачки

$$\Delta\omega_p=2\gamma_p.$$

С помощью полученных соотношений выражения (42), (45) можно переписать через измеряемые параметры. Например, выражение (42) принимает вид

$$\Delta\omega_0=\frac{\hbar\omega(\Delta\omega\Delta\omega_p)^2}{(2\Delta\omega+\Delta\omega_p)^2}\left[\frac{1}{P_p^{(thr)}}+\frac{1}{2P^{(st)}}\right]. \quad (49)$$

В адиабатическом приближении (43) дает

$$\Delta\omega_0^{(ad)}=\frac{\hbar\omega(\Delta\omega)^2}{2P^{(st)}}.$$

Приведем оценку ширины спектра генерируемого излучения безотносительно к конкретному ПГС. Характерные значения параметров ПГС можно найти в обзоре [19]. Предположим, что генерируемая частота $\omega/2\pi=3\cdot10^{14}$ Гц (длина волны $\lambda\approx1$ мкм). Пусть

$$P^{(st)}\approx P_p^{(thr)}\approx100 \text{ мВт},$$
$$\Delta\omega=3\cdot10^8 \text{ Гц},\quad \Delta\omega_p=1\cdot10^9 \text{ Гц}.$$

Получаем следующие значения:

$$\Delta\omega_0\approx0.1 \text{ Гц},\quad \Delta\omega_0^{(ad)}\approx0.06 \text{ Гц}.$$

Видно, что значение ширины спектра в адиабатическом приближении почти в 2 раза меньше. Оценка уширения спектра накачки вблизи порога генерации согласно формуле (47) дает значение $\Delta\omega_{0,p} \approx 4$ Гц.

Благодарности. Автор благодарит за полезное обсуждение работы А. А. Борцова, В. М. Гордиенко и Ф. В. Потёмкина.

Финансирование. Данное исследование выполнено в рамках государственного задания Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Воронцов, УФН **172**, 907 (2002).
2. A. P. Alodjants and S. M. Arakelian, J. Mod. Opt. **46**, 475 (1999).
3. A. Luis and L. L. Sánchez-Soto, Progr. Opt. **41**, 421 (2000).
4. А. В. Козловский, ЖЭТФ **159**, 244 (2021).
5. A. S. Chirkin, Laser Phys. Lett. **17**, 115401 (2020).
6. A. A. Bortsov, Opt. Engin. **63**, 3600 (2024).
7. В. В. Додонов, В. И. Манько, Труды ФИАН **183**, 5 (1987).
8. D. H. Kobe, Phys. Rev. A **50**, 933 (1994).
9. M. Fadel and L. Maccone, Phys. Rev. A **104**, L050204 (2021).
10. N. Fabre, A. Keller, and P. Milman, Phys. Rev. A **105**, 052429 (2022).
11. S. A. Akhmanov, V. A. Vysloukh, and A. S. Chirkin, *Optics of Femtosecond Laser Pulses*, AIP, New York (1992).
12. А. С. Чиркин, Опт. и спектр. **82**, 981 (1997).
13. R. Graham, Z. Physik **210**, 319 (1968).
14. P. R. White and W. H. Louisell, Phys. Rev. A **1**, 1348 (1970).
15. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, Наука, Москва (1981).
16. А. С. Чиркин, А. В. Шипулин, Письма в ЖЭТФ **93**, 129 (2011).
17. R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford Univ. Press, Oxford (2000).
18. D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer (2008).
19. I. Breunig, D. Haestle, and K. Buse, Appl. Phys. B **105**, 99 (2011).