ЖЭТФ, 2025, том 167, вып. 2, стр. 192–204

ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ОДНООСНЫЙ КРИСТАЛЛ–МЕТАЛЛ: ОРИЕНТАЦИИ КРИСТАЛЛА, ДОПУСКАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ

*В. И. Альшиц**, *В. Н. Любимов*

[a] *Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова*
Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники НИЦ «Курчатовский институт»
119333, Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 сентября 2024 г.,
после переработки 17 октября 2024 г.
Принята к публикации 18 октября 2024 г.

Теоретически проанализированы условия существования плазмон-поляритонов на границе раздела одноосного кристалла произвольной ориентации и изотропного металла. Доказано, что при не слишком большой диэлектрической проницаемости $|\varepsilon_m|$ металла и достаточно низкой анизотропии кристалла для распространения этой волны нет никаких геометрических запретов. Ограничения возникают, когда значение $|\varepsilon_m|$ превышает определенные пороги, которые в явном виде найдены для оптически положительных и отрицательных кристаллов. Запретные зоны для ориентаций оптической оси **c** ограничены контурами делокализации поляритонов в кристалле. Найдено их расположение на единичной сфере $\mathbf{c}^2 = 1$. Граничные конусы ориентации оптических осей в положительных и отрицательных кристаллах различаются: в первом случае они окружают нормаль к сагиттальной плоскости, а во втором — нормаль к интерфейсу.

DOI: 10.31857/S004445102502004X

1. ВВЕДЕНИЕ

Локализованные электромагнитные волны оптического диапазона, распространяющиеся в твердых телах вдоль их поверхностей и границ раздела, поляритоны в диэлектриках и плазмоны в металлах, широко используются в современной технике, что стимулирует исследования в этой области [1–8]. Поляритоны более ограничены в отношении условий своего существования, чем плазмоны. Например, они запрещены на границе любых двух изотропных диэлектриков с положительными значениями диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{1,2}$. В таких структурах только так называемые дисперсионные поляритоны могут распространяться вблизи некоторых определенных резонансных частот, когда одна из диэлектрических проницаемостей (ε_1 или ε_2) становится отрицательной. Однако, как было показано Дьяконовым [9], ситуация радикально меняется, если заменить один из изотропных диэлектриков одноосным кристаллом с оптической осью, параллельной границе раздела, и положительными диэлектрическими проницаемостями ε_o и ε_e (обыкновенной и необыкновенной компонентами), связанными с диэлектрической проницаемостью ε изотропной части структуры, так что $\varepsilon_o < \varepsilon < \varepsilon_e$. В этом случае бездисперсионный поляритон может возникать в довольно узком диапазоне направлений распространения. Дальнейшие обобщения работы [9] применительно к произвольной ориентации одноосных кристаллов [10–13] и к симметричным срезам двуосных кристаллов [11, 14, 15] подтвердили как существование волновой ветви Дьяконова, так и весьма узкий диапазон разрешенных направлений распространения такого поляритона. Поэтому неудивительно, что волна Дьяконова была экспериментально обнаружена [16] лишь через 21 год после ее теоретического предсказания.

Отметим, что из результатов работы [17] следует, что на границе двух однородных диэлектриков произвольной анизотропии может существовать не более одного поляритона. Если же диэлектрики являются магнитооптически активными или обладают бианизотропными свойствами, то тогда в заданном направлении могут существовать два поляритона [18]. Отметим также, что в [19] анализировались

* E-mail: valshits@mail.ru

общие условия существования поляритонов на границе диэлектрика произвольной анизотропии с изотропным диэлектриком и со сверхпроводником.

Идеальная металлизация поверхности одноосного диэлектрического кристалла (т. е. полное экранирование поляритона в диэлектрике) допускает существование только дисперсионного поляритона, когда одно из значений диэлектрической проницаемости кристалла отрицательно [20]. А при таком идеальном экранировании применительно к изотропному диэлектрику даже дисперсионные поляритоны становятся запрещенными. Однако в случае несовершенного экранирования ситуация становится совершенно иной. Обычная металлизация обеспечивает распространение в металле плазмона, связанного с поляритоном в соседней диэлектрической среде. В случае изотропного диэлектрика нет никаких ограничений для существования такого гибридного локализованного плазмон-поляритона, за исключением поглощения плазмона в нормальном металле, которое может заметно влиять на длину свободного пробега гибридной волны. А в случае кристаллического диэлектрика некоторые его ориентации могут оказаться запрещенными для распространения плазмон-поляритонов. Но в этом случае диапазон их существования оказывается достаточно широким (в отличие от случая поляритона Дьяконова на границе раздела диэлектрик–диэлектрик). В целом из результатов, полученных в [17], следует, что на границе металл–однородный анизотропный диэлектрик может существовать не более одного плазмон-поляритона, и, согласно [21], допускается существование двух плазмон-поляритонов при условии, что диэлектрик будет магнитооптически активным или бианизотропным.

Интересно, что еще до работы Дьяконова [9] Марчевский и др. предсказали [22] существование сингулярной волновой моды, распространяющейся вдоль границы кристалла с изотропным диэлектриком. Фактически эта мода представляла собой вырожденную форму волны Дьяконова, возникающую при совпадении двух парциальных волн поляритона в кристалле при некотором направлении распространения. В результате, помимо линейно поляризованной нормальной парциальной моды, появляется сингулярная волна с круговой поляризацией и амплитудой, убывающей по глубине y как $y\exp(-qy)$. Такое поведение, известное как поведение Фойгта, напоминает вырожденные сингулярные объемные электромагнитные волны в некоторых специальных неограниченных кристаллах [23–26]. Соответственно, в недавних работах Маккея и др. [27–30] авторы назвали вырожденную моду [22] волной Дьяконова – Фойгта. В этих исследованиях был разработан формализм, позволяющий рассматривать как волны Дьяконова, так и волны Дьяконова – Фойгта (в том числе плазмон-поляритонного происхождения) с общих позиций для различных структур, включая одноосные и двуосные кристаллы симметричной ориентации.

Несмотря на отмеченные выше ограничения условий существования анизотропных плазмон-поляритонов, они обеспечивают важное новое качество — возможность управлять их свойствами. Выбором волновой геометрии (ориентации среза кристалла) можно, например, регулировать длину свободного пробега плазмон-поляритона [31–33]. Оптимизировать способ возбуждения плазмона в металле можно также путем наклонного падения поляритона на границу раздела в кристалле под углом полного внутреннего отражения [34–37]. В этом случае параметры ориентации можно подобрать таким образом, чтобы исключить отраженную волну в кристалле. Тогда возникает стационарный режим, когда энергия накачки поляритона компенсирует энергию, диссипированную плазмоном в металле, что устраняет проблему малой длины свободного пробега. Другой причиной рассмотрения анизотропных особенностей является изучение волн Дьяконова – Фойгта [27–30], которые не существуют в изотропных средах.

Конечно, теоретическое описание анизотропного плазмон-поляритона утрачивает привычную простоту и компактность. Дисперсионное уравнение становится громоздким и комплексным. Например, формально приходится иметь дело с двумя уравнениями (от действительной и мнимой частей) с одним вещественным неизвестным параметром, т. е. задача выглядит переопределенной. К счастью, существуют теоремы [38, 39], утверждающие, что эти два уравнения должны иметь одни и те же корни. И все же авторы часто предпочитают рассматривать такие симметричные ориентации, которые непосредственно приводят к вещественным дисперсионным уравнениям [27–33, 40–43]. Особой популярностью пользуется геометрия Дьяконова с оптической осью в плоскости интерфейса. В частности, в недавней статье Голеницкого [43] рассмотрены условия существования электромагнитных волн в подобных структурах при различных сочетаниях знаков трех параметров ε_o, ε_e и ε для двух вариантов, когда кристалл является либо диэлектриком (как у Дьяконова), либо металлом.

Недавно мы нашли [44] явную вещественную и компактную форму общего дисперсионного уравнения, описывающего плазмон-поляритон на произвольно ориентированной границе раздела между одноосным диэлектрическим кристаллом и изотропным металлом. Кроме того, в [44] также развит эффективный итерационный метод аналитического анализа этого уравнения. Ниже мы сделаем следующий шаг после работы [44], базируясь на полученном там дисперсионном уравнении. Будет проведен точный аналитический анализ с определением геометрических зон существования плазмон-поляритонов среди всех ориентаций границы раздела и любых направлений распространения. При этом, в отличие от [43], мы будем рассматривать только традиционный случай диэлектрического кристалла с положительными параметрами $\varepsilon_{o,e} > 0$ и изотропного металла с отрицательной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_m < 0$. Зато в нашем анализе оптическая ось выйдет из плоскости границы, составляя с ней произвольный угол, а области существования будут определяться не в плоскости, а на единичной сфере направлений.

В разд. 2 проблема будет сформулирована в математических терминах. Затем в разд. 3 мы установим зону существования мод Дьяконова – Фойгта в общем наборе произвольных ориентаций границ раздела кристалл–металл и направлений распространения волн. В разд. 4 будут описаны все волновые геометрии, допускающие распространение плазмон-поляритонов в положительных ($\varepsilon_e > \varepsilon_o$) и отрицательных ($\varepsilon_e < \varepsilon_o$) одноосных кристаллах. Наконец, в заключительном разд. 5 подводятся итоги статьи.

2. ГЕОМЕТРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Исследуемый в данной работе плазмон-поляритон представляет собой собственную электромагнитную волну, локализованную на границе раздела одноосного кристалла произвольной ориентации и изотропного металла, являющуюся гибридом поляритона в кристалле и плазмона в металле. Кристалл будет характеризоваться положительными значениями диэлектрической проницаемости ε_o и ε_e, а металл — диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_m < 0$ и магнитной проницаемостью $\mu_m = 1$.

Рассматриваемая геометрия распространения волн представлена на рис. 1, где основные направления определены следующим образом. Ось y направлена вдоль единичной нормали $\mathbf{n}$ к произвольно ориентированной границе раздела так, что область $y > 0$ принадлежит кристаллу, а $y < 0$ — металлу. Ось x выбрана вдоль единичного вектора $\mathbf{m}$, задающего направление распространения волны. Ориентация оптической оси кристалла вдоль единичного вектора $\mathbf{c}$ определяется сферическими координатами: она составляет угол θ с плоскостью границы раздела, а ее проекция на интерфейс составляет угол φ с осью x. Векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ определяют сагиттальную плоскость с единичной нормалью $\mathbf{t} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$.

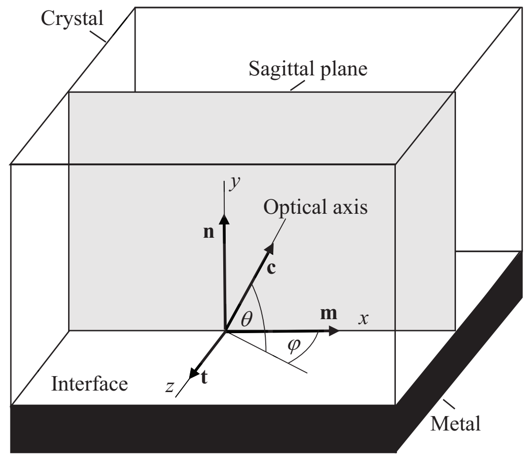

Рис. 1. Волновая геометрия распространения в координатной системе

В этих обозначениях волновое поле плазмон-поляритона имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}(y) \\ \mathbf{E}(y) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{ik_0(nx-ct)},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}(y) \\ \mathbf{E}(y) \end{pmatrix} = \begin{cases} C_o \begin{pmatrix} \mathbf{H}_o \\ \mathbf{E}_o \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-k_0 n q_o y} + \\ +C_e \begin{pmatrix} \mathbf{H}_e \\ \mathbf{E}_e \end{pmatrix} \mathrm{e}^{k_0 n(-q_e+ip_e)y}, \ y>0; \\ \left[C^{TM} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m^{TM} \\ \mathbf{E}_m^{TM} \end{pmatrix} + \right. \\ \left. +C^{TE} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m^{TE} \\ \mathbf{E}_m^{TE} \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{k_0 n q_m y}, \ y<0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ — магнитная и электрическая составляющие волнового поля, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки наблюдения, t — время, c — скорость света в вакууме, n — неизвестный фактор рефракции, который предполагается найти, $k_0 = \omega/c$ и ω — частота волны. Парциальные волны в суперпозиции (1) как в кристалле, обыкновенная (о) и необыкновенная (е), так и в металле, ТМ и ТЕ компоненты, организованы так, что каждая из них удовлетворяет уравнениям Максвелла в соответствующих средах. В результате параметры локализации в (1) можно выразить в виде [44]

$$q_o = \sqrt{1-s}, \; q_e = \sqrt{\left(\frac{B}{A} - s\right)\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o A}}, \quad q_m = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_o} s}. \tag{2}$$

Здесь

$$A = 1 + c_{\mathbf{n}}^2 \Delta_o, \; B = 1 - c_{\mathbf{t}}^2 \Delta_e, \; s = \varepsilon_o/n^2, \tag{3}$$

где $c_{\mathbf{n}}$ и $c_{\mathbf{t}}$ — проекции вектора $\mathbf{c}$ на направления $\mathbf{n}$ и $\mathbf{t}$ (рис. 1), а параметры Δ_o и Δ_e определяются формулами

$$\Delta_\alpha = \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_o}{\varepsilon_\alpha}, \quad \alpha = o, e. \tag{4}$$

Только необыкновенная парциальная волна в (1) содержит гармоническую составляющую волнового вектора вдоль y, характеризующуюся параметром

$$p_e = -c_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{m}} \Delta_o / A.$$

В уравнении (1) параметры поляризации для кристалла $\mathbf{H}_{o,e}$ и $\mathbf{E}_{o,e}$, и для металла $\mathbf{H}^{TM,TE}$ и $\mathbf{E}^{TM,TE}$ также непосредственно определяются уравнениями Максвелла. Они хорошо известны (см., например, [44]), и мы не будем приводить их здесь в явном виде. С другой стороны, они, безусловно, участвуют в полном анализе, который должен включать определение скалярных амплитуд $C_{o,e}$ и $C^{TM,TE}$. Этот анализ, в свою очередь, предполагает использование граничных условий, сводящихся к требованию непрерывности тангенциальных компонент магнитного и электрического полей на границе раздела $y = 0$. Эти условия приводят к системе четырех однородных линейных уравнений, имеющей нетривиальное решение, только если ее 4×4 определитель обращается в нуль. Последнее требование приводит нас к дисперсионному уравнению относительно неизвестного показателя преломления n. Указанная процедура была осуществлена в [44]. В исходном виде это приводит к комплексному и громоздкому дисперсионному уравнению. Однако после ряда алгебраических манипуляций оно свелось к одному вещественному и довольно компактному уравнению

$$(\varepsilon_e q_o + \varepsilon_o A q_e)(\varepsilon_m A q_e + \varepsilon_e q_m) = c_{\mathbf{t}}^2 (\varepsilon_e - \varepsilon_o)(\varepsilon_e - \varepsilon_m), \tag{5}$$

где неизвестный фактор рефракции n «спрятан» в параметрах q_o, q_e и q_m (2), (3).

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНА ДЬЯКОНОВА – ФОЙГТА

Как пояснялось во Введении, направления распространения волн Дьяконова – Фойгта должны обеспечивать вырождение парциальных волн в кристалле. С точки зрения уравнения (1), необходимый критерий такого вырождения сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} q_e = q_o, \\ p_e = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Легко видеть, что второе уравнение в (6) эквивалентно требованию, которое выполняется в двух случаях: когда (i) $c_{\mathbf{m}} = 0$, или (ii) $c_{\mathbf{n}} = 0$. Рассмотрим их отдельно.

(i) В этом случае оптическая ось $\mathbf{c}$ ортогональна направлению распространения $\mathbf{m}$, т. е. вектор $\mathbf{c}$ принадлежит плоскости $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}\}$. На рис. 1 это соответствует фиксированному углу $\varphi = \pi/2$. Тогда в (3) $c_{\mathbf{t}} = \cos\theta$ и $c_{\mathbf{n}} = \sin\theta$, что приводит к тождеству $A/B = \varepsilon_e/\varepsilon_o$. Подставив это тождество и выражения (2) для $q_{e,o}$ в первое уравнение (6), находим соотношение

$$s = -\mathrm{tg}^2\theta. \tag{7}$$

Можно видеть, что полученное уравнение (7) противоречиво: в левой части величина $s = \varepsilon_o/n^2$ (3) в наших условиях строго положительна и не может равняться такой правой части. Таким образом, первая ориентация ($c_{\mathbf{m}} = 0$) не приводит к моде Дьяконова – Фойгта. Тогда остается единственная геометрия для этой волны: $c_{\mathbf{n}} = 0$.

(ii) Этот случай относится к дьяконовской геометрии границы раздела, параллельной оптической оси кристалла. Детальная теория моды Дьяконова – Фойгта для этой геометрии изложена в [28] (см. также [44]). Формальный анализ нашей системы (6) приводит к соотношениям $A = 1$, $s = \cos^2\varphi$, которые вместе с дисперсионным уравнением (5) задают особую ориентацию оптической оси **c**, характеризуемую углом вырождения [28, 44]

$$\varphi_{deg} = \operatorname{ctg}^{-1}\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon_o(|\varepsilon_m|+\varepsilon_e)(|\varepsilon_m|-\varepsilon_o)}{(\varepsilon_o+\varepsilon_e)^2((|\varepsilon_m|+\varepsilon_o)}}\right). \quad (8)$$

Это значение является действительным до тех пор, пока $|\varepsilon_m| \geqslant \varepsilon_o$), что выполняется практически всегда (в типичных случаях: $|\varepsilon_m| \gg \varepsilon_o$). Таким образом, можно констатировать, что волна Дьяконова–Фойгта ориентации (8) может оказаться запрещенной только в исключительных случаях (практически вместе с плазмоном).

4. АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНА

4.1. Критерии существования плазмон-поляритона

В этом разделе мы рассмотрим общую проблему существования плазмон-поляритонов для произвольных ориентаций границы раздела и направления распространения. Формально область существования физических решений дисперсионного уравнения (5) ограничена направлениями (θ, φ) оптической оси **c**, которые обеспечивают вещественные и неотрицательные значения параметров q_o, q_e и q_m. Конечно, при $\varepsilon_m < 0$, что всегда имеет место в металлах, и при $s > 0$ (3) автоматически получаем $q_m > 0$ из (2). Таким образом, геометрические ограничения существования плазмон-поляритона могут быть обусловлены только сменой знака подкоренных выражений параметров локализации q_o или q_e (2), т. е. критериями границ существования являются уравнения $q_o = 0$ и $q_e = 0$.

Однако следует помнить и о другом важном физическом ограничении распространения волн, связанном с затуханием плазмонов в металле (поглощение поляритонов в кристалле на несколько порядков слабее). Волну можно считать волной только до тех пор, пока ее длина свободного пробега L остается намного больше длины волны λ. Длину пробега L удобно оценивать в виде [32]

$$L = \frac{1}{\delta} = \frac{P_{cr}+P_m}{\dot{D}_m}, \quad (9)$$

где δ — коэффициент затухания, $P_{cr}+P_m$ — интегральный поток энергии волны в обеих средах, $\dot{D}_m$ — диссипация энергии в единицу времени в металле. Поглощение плазмона принято описывать, вводя мнимую добавку в диэлектрическую проницаемость металла $\varepsilon_m = \varepsilon_m' + i\varepsilon_m''$. Согласно [45], параметр $\varepsilon_m'' > 0$ относительно слабо зависит от частоты, оставаясь порядка единицы в широком интервале длин волн (как и параметры $\varepsilon_{o,e}$ в кристалле). А вещественная часть ε_m', напротив, резко увеличивается (по модулю) с ростом длины волны. В этих терминах требуемое соотношение $L \gg \lambda$ эквивалентно условию $|\varepsilon_m'| \gg \varepsilon_m''$. Обычно это происходит вблизи инфракрасных частот [45], где плазмон становится сильно локализованным. Это обеспечивает в (9) столь малый знаменатель, что затуханием можно пренебречь. Ниже будет предполагаться, что условия такого пренебрежения выполнены выбором ограниченного спектрального интервала, где величина $|\varepsilon_m'|$ достаточно велика.

Теперь можно вернуться к геометрическим ограничениям распространения плазмон-поляритона. Как было показано выше, границы запрещенных зон для плазмон-поляритонов должны определяться линиями решений, отвечающих объемным обыкновенным ($q_o = 0$) или необыкновенным ($q_e = 0$) парциальным компонентам поляритона в кристалле. С другой стороны, следует отметить, что эта делокализация вблизи границы должна обеспечивать неограниченный рост числителя в (9), $P_{cr} \to \infty$, и соответственно формальное увеличение $L \to \infty$. Разумеется, эти бесконечности являются следствием нашего модельного полубесконечного кристалла с нулевым затуханием. Очевидно, что возвращение к более реальным характеристикам нашей системы устранит эти бессмысленные бесконечности, но не существенное увеличение длины свободного пробега L [33]. Это, в свою очередь, должно расширить упомянутые выше спектральные ограничения в сторону меньших длин волн.

При переходе оптической оси **c** через границу делокализации в запрещенную зону подкоренные выражения в (2) для q_o или q_e становятся отрицательными, что эквивалентно чисто вещественным проекциям соответствующих волновых векторов на ось y в (1), т. е. отводу энергии от интерфейса. Поляритон становится вытекающей модой, описываемой мнимой добавкой к параметру s:

$$s = s' - is''.$$

Эта добавка $s'' > 0$ обеспечивает бездиссипативное затухание при распространении плазмон-поляритона вдоль границы раздела. Существенно, что величина s'' быстро возрастает при дальнейшем удалении **c** от границы в запрещенной зоне, что резко ограничивает длину свободного пробега этой

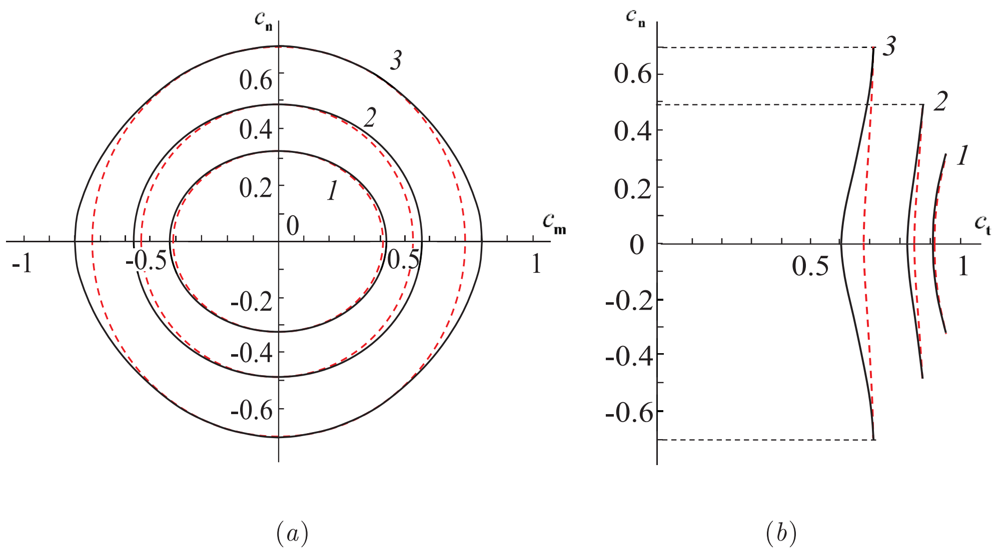

Рис. 2. Проекции границ запретных зон на плоскости $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ (*a*) и $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ (*b*) для положительных кристаллов киновари (*1*) и каломели (*2, 3*), контактирующих с золотом при $\lambda_{vac} = 1.1$ (*1, 3*) и 0.75 (*2*) мкм. Сплошные линии отвечают точному уравнению (11), а штриховые — аппроксимации (19)

вытекающей моды. Таким образом, эта мода имеет физический смысл только в очень узком слое, примыкающем к границе со стороны запрещенной зоны [41].

4.2. Случай оптически положительных кристаллов

Начнем с границы $q_e = 0$. В этом случае из (2) получаем

$$s = \frac{B}{A}, \quad q_o = \sqrt{1 - \frac{B}{A}}, \quad q_m = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_o}\frac{B}{A}}. \qquad (10)$$

Понятно, что с учетом (3) и (4) параметры (10) не могут быть реализованы в оптически отрицательных кристаллах ($\varepsilon_e < \varepsilon_o$), где автоматически выполняется неравенство $B \geq A$. В этом случае параметр q_o будет мнимым при любых ориентациях $\mathbf{c}$, кроме одной: $\mathbf{c} \| \mathbf{m}$, т. е. $c_\mathbf{n} = 0$, $c_\mathbf{t} = 0$, и, соответственно, $A = B = 1$ и $q_o = 0$. Однако такая объемная волна не может существовать: это строго доказано в [44].

Таким образом, искомая граница может реализоваться только в положительных кристаллах при $\varepsilon_e > \varepsilon_o$. После подстановки из (10) в дисперсионное уравнение (5) получим

$$c_\mathbf{t}^2 \Delta_e \left(1 + \frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_e}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{B}{A}\right)\left(1 + \frac{B}{A}\frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_o}\right)} = 0. \qquad (11)$$

Это уравнение определяет линию делокализации $q_e = 0$ на сфере $\mathbf{c}^2 = 1$. С учетом (3) она выражается через проекции $c_\mathbf{n}^2$ и $c_\mathbf{t}^2$, а значит, и через $c_\mathbf{m}^2 = 1 - c_\mathbf{n}^2 - c_\mathbf{t}^2$. Поэтому плоскости $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, $(\mathbf{t}, \mathbf{m})$ и $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ (рис. 1) являются плоскостями симметрии этой замкнутой линии, и она размножается отражениями в этих плоскостях.

На рис. 2 показаны проекции границы (11) на плоскости $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ и $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ для кристаллов каломели (Hg_2Cl_2) [46] и киновари (HgS) [47], контактирующих с золотом [45] при длине волны в вакууме $\lambda_{vac} = 0.75$ мкм ($\varepsilon_m = -20.148$) и 1.1 мкм ($\varepsilon_m = -52.388$). Материальные константы кристаллов ε_o и ε_e приведены в табл. 1. Каждый граничный контур очерчивает запрещенную зону для оптической оси $\mathbf{c}$, где решения для плазмон-поляритонов не возникают. Очертания замкнутых границ видны только в проекциях на плоскость $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$. Две другие проекции на плоскости $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ и $(\mathbf{t}, \mathbf{m})$ (последняя не показана) из-за указанной симметрии выглядят в профиль незамкнутыми линиями.

На рис. 3 схематически изображена обсуждаемая запретная зона на сфере $\mathbf{c}^2 = 1$ вокруг нормали $\mathbf{t}$ к сагиттальной плоскости. Размеры зоны приближенно относятся к кристаллу каломели при $\lambda_{vac} = 0,75$ мкм [46]. Как видно из рис. 2 и 3, граница запрещенных ориентаций $q_e(\mathbf{c}) = 0$ образована конусом направлений оптической оси $\mathbf{c}$, окружающим нормаль $\mathbf{t}$. Подчеркнем, что сам этот конус не принад-

Таблица 1. Материальные параметры и характеристики размеров (12), (13) и (20) запретных зон для положительных кристаллов на рис. 2 и 3

Crystal	ε_o	ε_e	$c_{\mathbf{m}}^{max}$	a	$c_{\mathbf{n}}^{max}$	b	$c_{\mathbf{t}}^{max}$	$\sqrt{1-b^2}$	$c_{\mathbf{t}}^{min}$	$\sqrt{1-a^2}$
Cinnabar (HgS) $\lambda_{vac} = 1.1\ \mu$m	7.291	8.919	0.419	0.410	0.327		0.945		0.908	0.912
Calomel (Hg_2Cl_2) $\lambda_{vac} = 0.75\ \mu$m	3.771	6.566	0.565	0.537	0.490		0.872		0.825	0.843
Calomel (Hg_2Cl_2) $\lambda_{vac} = 1.1\ \mu$m	3.66	6.35	0.799	0.736	0.703		0.711		0.602	0.677

лежит к запретной зоне: он лишь указывает на ориентации $\mathbf{c}$, при которых необыкновенные компоненты поляритонов являются объемными.

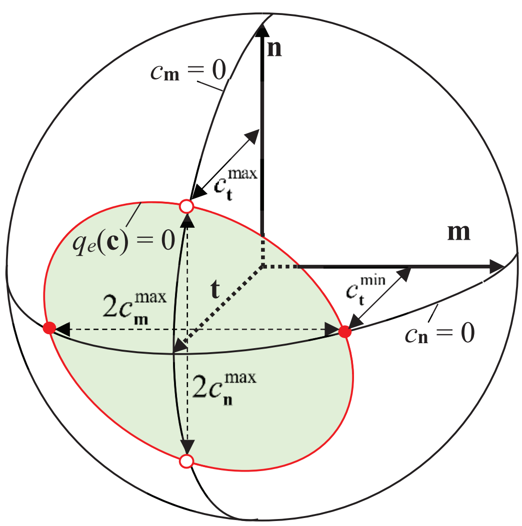

Рис. 3. Замкнутый контур $q_e(\mathbf{c}) = 0$ вокруг тонированной запретной зоны на единичной сфере $\mathbf{c}^2 = 1$ ($c_{\mathbf{t}} \geq 0$), где решений для плазмон-поляритона нет: приближенная схема для кристалла Hg_2Cl_2 при $\lambda_{vac} = 0.75$ мкм. Штриховые линии не пересекаются, потому что контур не плоский (рис. 2 *b*)

Показанная на рис. 3 тонированная область, относящаяся к передней стороне сферы $c_{\mathbf{t}} \geq 0$, заведомо сосуществует с симметрично эквивалентной областью вокруг $-\mathbf{t}$, не содержащей никакой новой информации. Рассматриваемый контур «квазипараллелен» сагиттальной плоскости $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ в том смысле, что вдоль него вариации третьей координаты $c_{\mathbf{t}}$ весьма малы (см. рис. 2 *b*).

Запретную зону удобно характеризовать вертикальными ($2c_{\mathbf{n}}^{max}$) и горизонтальными ($2c_{\mathbf{m}}^{max}$) размерами и пределами, $c_{\mathbf{t}}^{min}$ и $c_{\mathbf{t}}^{max}$, изменения координаты $c_{\mathbf{t}}$ (см. обозначения на рис. 3). Их можно выразить в явном виде из уравнения (11) подстановкой туда $c_{\mathbf{m}} = 0$ (для пары $c_{\mathbf{n}}^{max}$ и $c_{\mathbf{t}}^{max}$) и $c_{\mathbf{n}} = 0$ (для пары $c_{\mathbf{m}}^{max}$ и $c_{\mathbf{t}}^{min}$). Результаты анализа даются точными соотношениями

$$c_{\mathbf{m}} = 0, \quad (c_{\mathbf{n}}^{max})^2 + (c_{\mathbf{t}}^{max})^2 = 1,$$
$$c_{\mathbf{n}}^{max} = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{r_e \Delta_e}}}, \quad c_{\mathbf{t}}^{max} = \frac{1}{(r_e \Delta_e)^{1/4}}; \tag{12}$$

$$c_{\mathbf{n}} = 0, \quad (c_{\mathbf{m}}^{max})^2 + (c_{\mathbf{t}}^{min})^2 = 1,$$
$$c_{\mathbf{m}}^{max} = \sqrt{\frac{r_e^2 - r_e/\Delta_e}{r_e^2 - 1 + r_o}}, \tag{13}$$
$$c_{\mathbf{t}}^{min} = \sqrt{\frac{r_o/\Delta_e}{r_e^2 - 1 + r_o}},$$

где

$$r_{o,e} = \frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_{o,e}} + 1. \tag{14}$$

Как видно из уравнений (12), (13), уменьшение параметра $|\varepsilon_m|$ для одного и того же кристалла приводит к уменьшению размера запрещенной зоны, как это происходит для кристалла каломели при изменении длины волны от 1.1 до 0.75 мкм. На рис. 2 контур границы для каломели с переходом *3*→*2* не только уменьшается в размерах, но и приобретает элипсовидную форму, как для киновари (*1*). Это подводит нас к другому аспекту проблемы. Покажем, что уменьшение размера зоны позволяет существенно упростить точное уравнение (11), приводя контур к форме эллипса. Ситуацию облегчает тот факт, что уравнение (11) содержит не параметры $c_{\mathbf{m}}$ и $c_{\mathbf{n}}$, а их квадраты, умноженные на довольно малые параметры $\Delta_{o,e}$. В таком приближении будут опущены очень малые члены $\sim (\Delta_{o,e}c^2_{\mathbf{m,n}})^2 \ll 1$, что оставляет вполне оптимистические ожидания относительно результатов. С этой точностью, можно оценить основной параметр B/A в подкоренном выражении (11) в виде

$$\frac{B}{A} \approx \Delta_e c^2_{\mathbf{m}} + \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}. \tag{15}$$

С учетом (15), получаем в том же приближении:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{B}{A} = \Delta_e(1 - c^2_{\mathbf{m}}), \\ &1 + \frac{B}{A}\frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_o} = 1 + \frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_e}(1 + \Delta_o c^2_{\mathbf{m}}). \end{aligned} \tag{16}$$

Подстановка соотношений (16) в (11), вместе с тождествами

$$\frac{|\varepsilon_m|\Delta_e}{\varepsilon_o r_e} = \Delta_o\left(1 - \frac{1}{r_e}\right) = \frac{r_o}{r_e} - 1, \tag{17}$$

трансформирует уравнение контура в форму

$$c^2_{\mathbf{n}} + c^2_{\mathbf{m}}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{r_e\Delta_e}}\left(1 - \frac{r_o}{2r_e}\right)\right\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{r_e\Delta_e}}, \tag{18}$$

которая описывает эллипс в плоскости $c_{\mathbf{m}}, c_{\mathbf{n}}$, каноническая форма которого имеет вид

$$\frac{c^2_{\mathbf{m}}}{a^2} + \frac{c^2_{\mathbf{n}}}{b^2} = 1. \tag{19}$$

Здесь a и b — полуоси эллипса, горизонтальная (a) и вертикальная (b). Сопоставление (19) с (18) дает

$$a^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{r_o/r_e}{2(\sqrt{r_e\Delta_e} - 1)}}, \quad b^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{r_e\Delta_e}}. \tag{20}$$

Найденные приближенные значения для полуосей a и b имеют тот же смысл, что и точные параметры $c^{max}_{\mathbf{m}}$ и $c^{max}_{\mathbf{n}}$ (см. (12), (13) и рис. 2). Сравнивая (12) и (20), можно видеть, что наша аппроксимация дала вертикальную полуось b тождественно равную точному значению: $b = c^{max}_{\mathbf{n}}$. Однако полуось a (20) не совпадает с точной, $c^{max}_{\mathbf{m}}$. Согласно табл. 1, для трех примеров (киноварь и каломель на двух длинах волн) величина a оказывается меньше, чем $c^{max}_{\mathbf{m}}$ с различиями, увеличивающимися с ростом величины $c^{max}_{\mathbf{m}}$: 2% для HgS, 5% для Hg_2Cl_2 (0.75 мкм), и 8% для Hg_2Cl_2 (1.1 мкм).

Диапазон изменения координаты $c_{\mathbf{t}}$ в нашем приближенном описании определяется тем же критерием, что и ранее:

$$c^2_{\mathbf{m}} + c^2_{\mathbf{n}} + c^2_{\mathbf{t}} = 1.$$

Это означает, что следует сравнивать $c^{max}_{\mathbf{t}}$ с $\sqrt{1-b^2}$ и $c^{min}_{\mathbf{t}}$ с $\sqrt{1-a^2}$. В первом случае, очевидно, они должны быть тождественно равны (см. табл. 1). Что касается сравнения $c^{min}_{\mathbf{t}}$ с $\sqrt{1-a^2}$, то из табл. 1 видно, что все три приближенных значения $\sqrt{1-a^2}$ больше, чем $c^{min}_{\mathbf{t}}$ на 0.4%, 2% и 12% соответственно. При этом приближенные характеристики для первых двух случаев, относящиеся к достаточно малым запретным зонам, стали ближе к точным значениям, тогда как в третьем случае ситуация стала еще хуже.

Таким образом, как видно из рис. 2, по крайней мере в первых двух случаях приближенные графики довольно слабо отличаются от точных, кое-где, почти «в пределах толщины линий». Даже для кристалла каломели при $\lambda_{vac} = 1.1$ мкм с очень большой запретной зоной, когда и нельзя было ожидать хорошего согласия, результаты оказываются качественно приемлемыми.

Рассмотрим теперь другой аспект проблемы существования границы $q_e = 0$ в положительных кристаллах. Ключевую роль в размерах запретной зоны и условиях ее существования играет величина $|\varepsilon_m|$. Мы уже видели большую разницу свойств системы каломель–золото при двух длинах волн 0.75 и 1.1 мкм, когда диэлектрическая проницаемость $|\varepsilon_m|$ золота резко различалась, 20.148 и 52.388, соответственно [45]. Действительно, при очень больших $|\varepsilon_m|$ уравнение (11) дает соотношение

$$c^2_{\mathbf{t}} \propto 1/\sqrt{|\varepsilon_m|} \to 0. \tag{21}$$

Таким образом, в этом пределе запретная зона на рис. 3 расширилась бы в размерах на всю переднюю полусферу, а линия $q_e = 0$ совпала бы с «меридианом» $c_{\mathbf{t}} = 0$ в плоскости $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, что естественно повторяет наш вывод в [20] о том, что распространение бездисперсионного поляритона вдоль границы раздела одноосный кристалл–идеальный металл ($\varepsilon_m \to -\infty$) строго запрещено.

Очевидно, что с уменьшением $|\varepsilon_m|$ контур границы должен уменьшаться в размерах, сохраняя вектор $\mathbf{t}$, проходящим через его центр симметрии (рис. 2 и 3). Однако легко видеть, что при малых

$|\varepsilon_m|$ уравнения (12), (13) теряют смысл. В пределе $|\varepsilon_m| \to 0$ из (14) имеем соотношение $r_e = 1$, которое с учетом (12) дает: $(c_{\mathbf{t}}^{max})^2 = 1/\sqrt{\Delta_e} > 1$. Это указывает на существование порогового уровня $|\varepsilon_m^{th}|$, ниже которого нет ориентационных ограничений на распространение плазмон-поляритона. При $\varepsilon_m = \varepsilon_m^{th}$ уравнение $q_e = 0$ дает объемные решения в точках $c_{\mathbf{t}} = \pm 1$ на сфере $\mathbf{c}^2 = 1$ на концах векторов $\pm\mathbf{t}$. При дальнейшем росте величины $|\varepsilon_m|$ эти решения трансформируются в два симметричных (эквивалентных) контура, окружающих запретные зоны ориентаций оптической оси кристалла. Таким образом, подставляя в (11) значения $c_{\mathbf{t}}^2 = 1$ и $c_{\mathbf{n}}^2 = 0$ (когда $A = 1$ и $B = \varepsilon_o/\varepsilon_e$) можно найти порог $|\varepsilon_m^{th}|$ и искомый критерий существования запретной зоны:

$$|\varepsilon_m| > |\varepsilon_m^{th}| = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_o}{\varepsilon_e - \varepsilon_o}. \tag{22}$$

Конечно, тот же порог вытекает из требования вещественности параметров $c_{\mathbf{m},\mathbf{n}}^{max}$ в (12), (13).

На рис. 4 приведены дисперсионные зависимости пороговых значений $|\varepsilon_m^{th}|$ для группы из четырех положительных кристаллов с использованием данных для каломели (Hg_2Cl_2) из [46] и для 2-фурилметакрилового ангидрида (ФМА), карбамида ($CO(NH_2)_2$) и киновари (HgS) из [47]. Слабая дисперсионная чувствительность пороговых значений $|\varepsilon_m^{th}|$ для всех кристаллов в рассматриваемом диапазоне длин волн λ_{vac} естественно отражает известное аналогичное свойство диэлектрических проницаемостей в кристаллах. Это контрастирует с быстрым ростом модуля $|\varepsilon_m|$ для золота [45] в том же диапазоне. Точки пересечения функции $|\varepsilon_m(\lambda_{vac})|$ с кривыми $|\varepsilon_m^{th}(\lambda_{vac})|$ отвечают местам зарождения запретных зон для рассматриваемых кристаллов.

Из (22) и рис. 4 видно, что уровень порогового значения сильно зависит от анизотропии данного кристалла: чем меньше его анизотропия (т. е. чем ближе ε_o к ε_e), тем выше пороговое значение, ниже которого нет геометрических ограничений для существования плазмон-поляритона. Это вполне естественно, поскольку, как уже говорилось, для чисто изотропных диэлектриков нет ни порога, ни геометрических ограничений. На рис. 4 четыре кристалла *1,...,4* образуют набор с монотонно убывающей анизотропией. Соответственно их критические длины волн λ_{vac}, отвечающие значениям $|\varepsilon_m^{th}|$, смещаются в правую сторону. Так, для каломели граничный контур зарождается при $\lambda_{vac} \sim 0.6$ мкм ($|\varepsilon_m^{th}| \approx 9.3$) и существенно увеличивается в размерах с ростом λ_{vac} до 1.1 мкм, тогда как для киновари появление контура происходит только при длине волны ~ 1.0 мкм ($|\varepsilon_m^{th}| \approx 41.25$) и ее рост до 1.1 мкм, естественно, обеспечивает гораздо меньшие размеры запретной зоны, чем для каломели (ср. границы *1* и *3* на рис. 2).

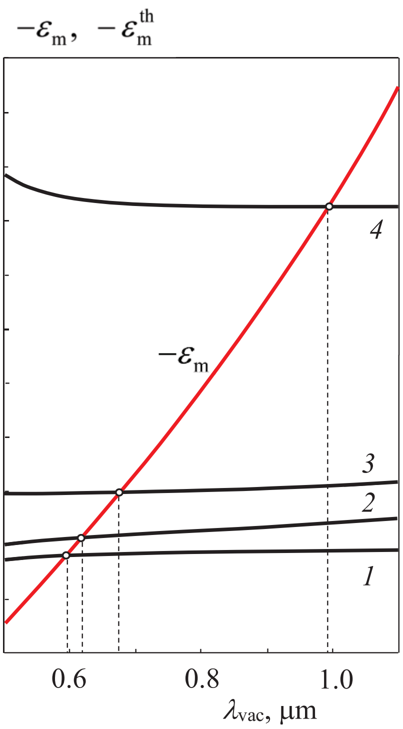

Рис. 4. Дисперсионные зависимости пороговых значений $|\varepsilon_m^{th}|$ (22) для кристаллов Hg_2Cl_2 (*1*), FMA (*2*), $CO(NH_2)_2$ (*3*) и HgS (*4*) в сравнении с диэлектрической проницаемостью золота $|\varepsilon_m|$ в диапазоне длин волн $0.5 < \lambda_{vac} < 1.1$ мкм

4.3. Случай оптически отрицательных кристаллов

Второй тип границ, определяемый условием $q_o = 0$, может быть рассмотрен в полной аналогии с анализом в предыдущем разделе 4.2. Соотношения (2) дают

$$s = 1, \quad q_e = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o}(B - A)}, \qquad q_m = \sqrt{1 + \frac{|\varepsilon_m|}{\varepsilon_o}} \equiv \sqrt{r_o}. \tag{23}$$

Условие вещественности q_e эквивалентное требованию $B > A$, очевидно, выполняется только в оптически отрицательных кристаллах — при $\varepsilon_o > \varepsilon_e$, когда $A(c_{\mathbf{n}}^2) \le 1$, и $B(c_{\mathbf{t}}^2) \ge 1$. Случай реализации $A = B = 1$ при $c_{\mathbf{n}} = c_{\mathbf{t}} = 0$ снова относится к несуществующей волне [44]. Подставляя (23) вместе с (3) и $q_o = 0$ в дисперсионное уравнение (5), получаем

$$c_{\mathbf{n}}^2 - \frac{\varepsilon_o}{|\varepsilon_m|}c_{\mathbf{t}}^2 - \sqrt{K\left(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}c_{\mathbf{t}}^2 + c_{\mathbf{n}}^2\right)} = 0, \qquad (24)$$

где

$$K = \frac{\varepsilon_o\varepsilon_e}{\varepsilon_m^2}\frac{\varepsilon_o - \varepsilon_m}{\varepsilon_o - \varepsilon_e}. \qquad (25)$$

Уравнение (24) определяет положение запретной зоны для ориентации оптических осей относительно границы раздела и сагиттальной плоскости. Конечно, формальное решение уравнения (24) $c_{\mathbf{t}} = c_{\mathbf{n}} = 0$ не должно нас обманывать: в [44] доказано, что оно постороннее. Единственное правильное решение уравнения (24) при $c_{\mathbf{t}} = 0$ есть $c_{\mathbf{n}}^2 = K$. Из (24), (25) видно, что при очень больших $|\varepsilon_m|$ координата $c_{\mathbf{n}}^2$ на границе падает как (ср. с (21)):

$$c_{\mathbf{n}}^2 \propto 1/\sqrt{|\varepsilon_m|} \to 0, \qquad (26)$$

т. е. предельная форма контура совпадает с большим кругом в плоскости интерфейса $(\mathbf{m}, \mathbf{t})$. При уменьшении $|\varepsilon_m|$ контур $q_o = 0$ смещается вверх, выходя из горизонтальной плоскости и уменьшаясь в размерах, и сохраняет при этом симметрию и положение своего центра на оси $\mathbf{n}$. Запрещенная область на сфере $\mathbf{c}^2 = 1$ схематически показана на рис. 5 для случая кристалла иодата лития с золотом на длине волны $\lambda_{vac} = 1$ мкм. Количественно проекции такого контура на плоскости $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ и $(\mathbf{m}, \mathbf{t})$ показаны на рис. 6 для кристаллов селенида галлия (GaSe) и иодата лития ($LiIO_3$) [47], контактирующих с золотом при той же длине волны ($\varepsilon_m = -41.849$) [45]. Видно, что обе границы охватывают направление $\mathbf{n}$, оставаясь «квазипараллельными» плоскости интерфейса, так что их проекции на $\mathbf{n}$ на рис. 6 a изменяются в сравнительно узких пределах.

По аналогии с предыдущим анализом положительных кристаллов, основные характеристики размеров запретной зоны (на этот раз, $c_{\mathbf{m}}^{max}$, $c_{\mathbf{t}}^{max}$ и $c_{\mathbf{n}}^{max}$, $c_{\mathbf{n}}^{min}$) находятся подстановками в (24) $c_{\mathbf{t}} = 0$ или $c_{\mathbf{m}} = 0$. В первом случае получаем

$$\begin{gathered}(c_{\mathbf{m}}^{max})^2 + (c_{\mathbf{n}}^{min})^2 = 1,\\ c_{\mathbf{m}}^{max} = \sqrt{1-K}, \quad c_{\mathbf{n}}^{min} = \sqrt{K}.\end{gathered} \qquad (27)$$

Во втором случае аналогично имеем

$$\begin{gathered}c_{\mathbf{t}}^{max} = \sqrt{\frac{Q}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1-K}{Q^2}}\right)},\\ c_{\mathbf{n}}^{max} = \sqrt{1 - (c_{\mathbf{t}}^{max})^2},\end{gathered} \qquad (28)$$

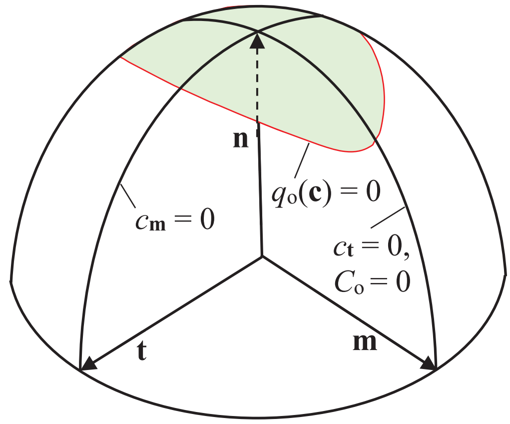

Рис. 5. Контур $q_o(\mathbf{c}) = 0$ вокруг тонированной запретной зоны на единичной сфере $\mathbf{c}^2 = 1$ ориентаций оптической оси: приближенная схема для кристалла $LiIO_3$ при $\lambda_{vac} = 1$ мкм. На всем меридиане $c_{\mathbf{t}} = 0$, включая тонированную область, существует локализованный необыкновенный поляритон в отсутствие обыкновенной парциальной ветви ($C_o = 0$)

где

$$R = 1 + \frac{\varepsilon_o}{|\varepsilon_m|}, \quad Q = 1 + \frac{K|\Delta_e|}{2R}. \qquad (29)$$

В табл. 2 приведены значения размерных характеристик запретных зон для кристаллов GaSe и $LiIO_3$ (рис. 6), рассчитанные по уравнениям (27), (28). В этом случае для краткости мы не стали снова искать эллипсовидные аппроксимации (19) точных контуров на рис. 6.

Для оптически отрицательных кристаллов, конечно, также есть пороговый уровень величины $|\varepsilon_m|$, выше которого существует запретная зона для направлений оптических осей. Точки зарождения такой зоны $|\varepsilon_m| = |\varepsilon_m^{th}|$ расположены на «полюсах» $c_{\mathbf{n}} = \pm 1$. Значение порога находится подстановкой $c_{\mathbf{n}}^2 = 1$ и $c_{\mathbf{t}}^2 = 0$ в (24). Это дает уравнение $K = 1$, которое приводит к критерию существования запретной области для $\mathbf{c}$ в случае отрицательных кристаллов

$$|\varepsilon_m| > |\varepsilon_m^{th}| = \frac{\varepsilon_e\varepsilon_o}{2(\varepsilon_o - \varepsilon_e)}\left(1 + \sqrt{1 + 4|\Delta_e|}\right). \qquad (30)$$

Легко проверить, что это условие, эквивалентное неравенству $K < 1$, обеспечивает вещественность в соотношениях для параметров $c_{\mathbf{m},\mathbf{t}}^{max}$, (27)–(29).

Разумеется, пороговое значение (30), полностью определяемое материальными параметрами кристалла, опять достаточно слабо зависит от длины волны λ_{vac} (в отличие от ε_m на рис. 4). Причем в

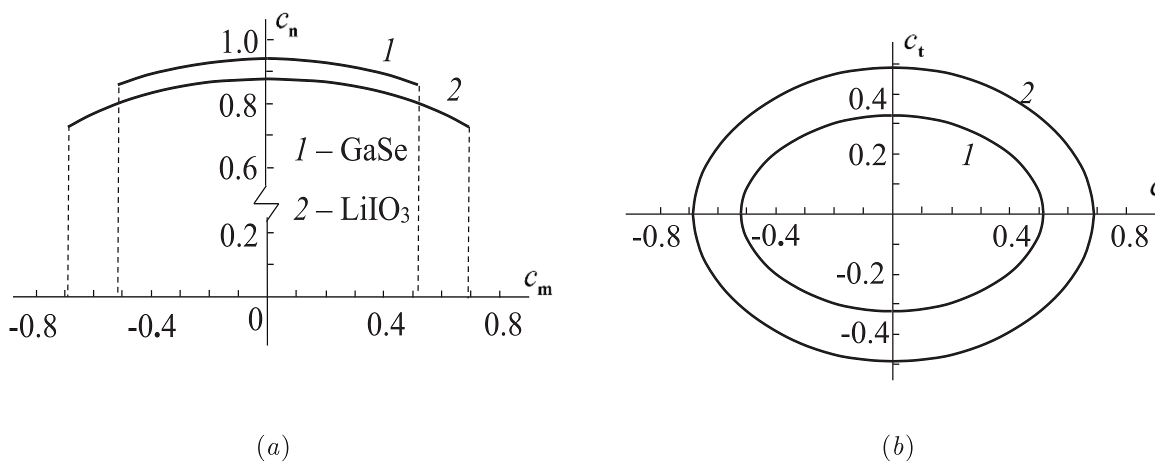

Рис. 6. Проекции границ запретных зон на плоскости $(\mathbf{m},\mathbf{n})$ (a) и $(\mathbf{m},\mathbf{t})$ (b) для отрицательных кристаллов GaSe (*1*) и $LiIO_3$ (*2*) при $\lambda_{vac} = 1.0$ мкм

Таблица 2. Материальные параметры и характеристики размеров запретных зон для отрицательных кристаллов GaSe и $LiIO_3$ (рис. 6)

Crystal $\lambda_{vac} = 1.1\,\mu$m	ε_o	ε_e	K	$c_{\mathbf{m}}^{max}$	$c_{\mathbf{t}}^{max}$	$c_{\mathbf{n}}^{max}$	$c_{\mathbf{n}}^{min}$
Gallium Selenide (GaSe)	7.871	6.040	0.737	0.513	0.328	0.945	0.858
Lithium Iodate ($LiIO_3$)	3.455	2.952	0.525	0.690	0.491	0.871	0.725

обоих случаях (22) и (30) уровень $|\varepsilon_m^{th}|$ пропорционален $|\varepsilon_o - \varepsilon_e|^{-1}$, т. е. с приближением к изотропии мы снова приходим к исчезновению запретной зоны. Однако, конечно, сравнивая пороги разных кристаллов, следует помнить, что значения $|\varepsilon_m^{th}|$ в (22) и (30) зависят не только от знаменателя. Для кристаллов из нашего примера на рис. 6 уравнение (30) дает пороги $|\varepsilon_m^{th}| = 32.30$ для GaSe и 23.29 для $LiIO_3$, тогда как в первом случае знаменатель больше.

Здесь важно также отметить, что не вся тонированная область на рис. 5 вокруг «полюса» $c_{\mathbf{n}}^2 = 1$ запрещена. Как показано в [42, 44], на «меридиане» $c_{\mathbf{t}} = 0$ существует точное решение дисперсионного уравнения (5):

$$s = \frac{1 - \varepsilon_o\varepsilon_e/\varepsilon_m^2}{A - \varepsilon_e/\varepsilon_m}. \qquad (31)$$

Это решение для плазмон-поляритона остается справедливым на протяжении всего меридиана $c_{\mathbf{t}} = 0$, включая даже его часть, пересекающую тонированную запретную область. Причина такого решения представляется весьма необычной. Волна, описываемая формулой (31), не содержит обыкновенной парциальной компоненты поляритона, т. е. ее скалярная амплитуда в (1) тождественно обращается в нуль, $C_o = 0$, когда сагиттальная плоскость параллельна оптической оси ($c_{\mathbf{t}} = 0$). Тем самым тонированная запретная зона делится на две части. При этом на разделяющем «меридиане» делокализации нет, поскольку оставшаяся необыкновенная парциальная волна имеет ненулевой параметр локализации $q_e \neq 0$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В данной работе исследованы условия существования плазмон-поляритонных электромагнитных волн, распространяющихся вдоль границы раздела между диэлектрическим одноосным кристаллом и изотропным металлом. Показано, что низкая

анизотропия кристалла и не слишком высокая диэлектрическая проницаемость $|\varepsilon_m|$ металла гарантируют существование плазмон-поляритона при любых ориентациях кристалла. Критерий появления запретной зоны для направлений оптической оси **c** определяется превышением величиной $|\varepsilon_m|$ определенного порога

$$|\varepsilon_m^{th}| \propto |\varepsilon_e - \varepsilon_o|^{-1},$$

разного для положительных (22) и отрицательных (30) кристаллов. Расположение таких зон на единичной сфере направлений $\mathbf{c}^2 = 1$ для этих типов кристаллов также различно (рис. 3 и 5). В первом случае запретная зона окружает нормаль **t** к сагиттальной плоскости, а во втором — нормаль **n** к интерфейсу. Соответственно, с уменьшением $|\varepsilon_m|$ до пороговых уровней $|\varepsilon_m^{th}|$ запрещенные зоны в таких кристаллах схлопываются до точек на концах ортов $\pm\mathbf{t}$ и $\pm\mathbf{n}$. Выше порогов границы запретных зон описываются точными уравнениями (11)–(13) (рис. 2 и табл. 1) и (24), (27), (28) (рис. 6 и табл. 2) для положительных и отрицательных кристаллов, соответственно. Эти типы границ отвечают линиям делокализации необыкновенных и обыкновенных парциальных волн.

2. Как показано, благодаря анизотропии диэлектрика, выбором волновой геометрии можно регулировать глубину проникновения поляритона, вплоть до его полной делокализации в кристалле при ориентациях оптической оси, попадающих на границы запрещенных зон. Между тем, как мы видели в разделе 4.1, на этих границах коэффициент поглощения δ формально стремится к нулю и, соответственно, длина свободного пробега плазмон-поляритона $L = 1/\delta$ неограниченно возрастает. Разумеется, упомянутые нули и бесконечности возникают из-за принятых идеализаций нашей модели. Однако для таких ориентаций можно ожидать, что длина свободного пробега L плазмон-поляритона будет существенно увеличиваться. Этот эффект мы обсуждали ранее в [33] для случая плазмон-поляритона в волновой геометрии Дьяконова, т. е. при одной определенной ориентации кристалла, обеспечивающей делокализацию поляритона. Здесь мы прогнозируем аналогичный эффект вблизи границ запретных зон, положения которых выражены в явном виде через материальные параметры, ориентации кристалла и направления распространения волн.

3. Рассмотрение в данной работе проведено без учета затухания волн (даже в металле), т. е. мы опустили мнимую добавку к параметру ε_m, хорошо известную [45] для золота. Причина игнорирования этой добавки основана на нашем анализе, который показал, что учет реалистичных уровней поглощения, допускающих распространение волн с приемлемой длиной свободного пробега $L \gg \lambda$, дает лишь небольшие поправки $\sim 0,1 - 1\%$ к найденным нами геометрическим характеристикам изучаемых запретных зон. Обнаруженная практическая нечувствительность границ запрещенных зон к затуханию волны позволила избежать довольно сложных вычислений и громоздких формул.

Благодарности. Авторы признательны А. Н. Даринскому за полезные обсуждения.

Финансирование. Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Surface Polaritons: Electromagnetic Waves at Surfaces and Interfaces*, ed. by V. M. Agranovich and D. L. Mills, North-Holland, Amsterdam (1982).

2. *Electromagnetic Surface Modes*, ed. by A. D. Boardman, Wiley, Chichester (1982).

3. A. V. Zayats, I. I. Smolyaninov, and A. A. Maradudin, Phys. Rep. **408**, 131 (2005).

4. S. A. Maier, *Plasmonics: Fundamentals and Applications*, Springer, New York (2007).

5. J. M. Pitarke, V. M. Silkin, E. V. Chulkov, and P. M. Eche nique, Rep. Prog. Phys. **70**, 1 (2007).

6. O. Takayama, L. C. Crasovan, S. K. Johansen, D. Mihalache, D. Artigas, and L. Torner, Electromagnetics **28**, 126 (2008).

7. J. A. Polo, Jr., T. G. Mackay, and A. Lakhtakia, *Electromagnetic Surface Waves: A Modern Perspective*, Elsevier, Waltham (2013).

8. T. G. Mackay and A. Lakhtakia, *Electromagnetic Anisotropy and Bianisotropy: A Field Guide*, 2nd ed., World Scientific, Singapore (2019).

9. М. И. Дьяконов, ЖЭТФ **94**, 119 (1988) [Sov. Phys. JETP **67**, 714 (1988)].

10. Н. С. Аверкиев, М. И. Дьяконов, Опт. и спектр. **68**, 1118 (1990) [Opt. Spectrosc. **68**, 653 (1990)].

11. D. B. Walker, E. N. Glytsis, and T. K. Gaylord, J. Opt. Soc. Am. A **15**, 248 (1998).

12. А. Н. Даринский, Кристаллография **46**, 916 (2001) [Crystallogr. Rep. **46**, 842 (2001)].

13. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ФТТ **44**, 371 (2002) [Phys. Solid State **44**, 386 (2002)].

14. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ФТТ, **44**, 1895 (2002) [Phys. Solid State **44**, 1988 (2002)].

15. E. Cojocaru, J. Opt. Soc. Am. A **32**, 782 (2015).

16. O. Takayama, L. Crasovan, D. Artigas, and L. Torner, Phys. Rev. Lett. **102**, 043903 (2009).

17. A. N. Darinskii and A. L. Shuvalov, Phys. Rev. A **102**, 033515 (2020).

18. A. N. Darinskii, Phys. Rev. A **103**, 033501 (2021).

19. A. N. Furs and L. M. Barkovsky, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **1**, 109 (1999).

20. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ЖЭТФ **128**, 904 (2005) [JETP **101**, 779 (2005)].

21. A. N. Darinskii, Phys. Rev. A **106**, 033513 (2022).

22. Ф. Н. Марчевский, В. Л. Стрижевский, С. В. Стрижевский, ФТТ **26**, 1501 (1984) [Sov. Phys. Solid State **26**, 911 (1984)].

23. W. Voigt, Phil. Mag. **4**, 90 (1902).

24. B. N. Grechushnikov and A. F. Konstantinova, Comput. Math. Appl. **16**, 637 (1988).

25. M. V. Berry and M. R. Dennis, Proc. R. Soc. Lond. A **459**, 1261 (2003).

26. M. V. Berry, Proc. R. Soc. A **461**, 2071 (2005).

27. T. G. Mackay, C. Zhou, and A. Lakhtakia, Proc. R. Soc. A **475**, 20190317 (2019).

28. C. Zhou, T. G. Mackay, and A. Lakhtakia, Phys. Rev. A **100**, 033809 (2019).

29. C. Zhou, T. G. Mackay, and A. Lakhtakia, Sci. Rep. **10**, 12894 (2020).

30. C. Zhou, T. G. Mackay, and A. Lakhtakia, Res. Phys. **24**, 104140 (2021).

31. A. A. Krokhin, A. Neogi, and D. McNeil, Phys. Rev. B **75**, 235420 (2007).

32. Nagaraj and A. A. Krokhin, Phys. Rev. B **81**, 085426 (2010).

33. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, Письма в ЖЭТФ **112**, 127 (2020) [JETP Lett. **112**, 127 (2020)].

34. R. A. Depine and M. L. Gigli, Opt. Lett. **20**, 2243 (1995).

35. R. A. Depine and M. L. Gigli, J. Opt. Soc. Am. A **14**, 510 (1997).

36. M. Liscidini and J. E. Sipe, B **81**, 115335 (2010).

37. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ЖЭТФ **138**, 669 (2010) [J. Exp. Theor. Phys. **111**, 591 (2010)].

38. A. N. Furs and L. M. Barkovsky, Microw. Opt. Technol. Lett. **14**, 301-305 (1997)

39. V. M. Galynsky, A. N. Furs, and L. M. Barkovsky, J. Phys. A **37**, 5083 (2004).

40. R. Li, C. Cheng, F-F. Ren, J. Chen, Y-X. Fan, J. Ding, and H-T. Wang, Appl. Phys. Lett. **92**, 141115 (2008).

41. H-H. Liu and H. Chang, IEEE Photon. J. **5**, 4800806 (2013).

42. V. I. Alshits, V. N. Lyubimov, J. P. Nowacki, and A. Drabik, Int. J. Appl. Electromagn. Mech. **64**, 879 (2020).

43. K. Yu. Golenitskii, Phys. Rev. B **110**, 035301 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevB.110.035301

44. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, УФН **193**, 96 (2023) [Physics–Uspekhi **66**, 90 (2023)].

45. P. B. Johnson and R. W. Crysty, Phys. Rev. B **6**, 4370 (1972).

46. З. Б. Перекалина, Ц. Барта, И. Грегора, А. Б. Васильев, Л. Д. Кисловский, Опт. и Спектр. **42**, 1134 (1977) [Sov. Phys. Opt. Spectrosk. **42**, 653 (1977)].

47. V. G. Dmitriev, G. G. Gurzadyan, and D. N. Nikogosyan, *Handbook of Nonlinear Optical Crystals*, Springer, Berlin (1999).