

# КВАНТОВЫЙ $SU(3)$ -ФЕРРИМАГNETИК НА ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*А. С. Мартынов, Д. М. Дзедзисавили\**

*Институт физики им. Л. В. Киренского  
Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 21 июля 2024 г.,  
после переработки 30 августа 2024 г.  
Принята к публикации 4 сентября 2024 г.

Построены фазовые диаграммы (магнитное поле  $H$ –одноионная анизотропия  $D$ ) для трехподрешеточного  $SU(3)$ -ферримагнетика на треугольной решетке с разными спинами подрешеток ( $S = 1, 1/2, 1/2$ ) при различных значениях параметров обмена  $I$  (между спинами  $S = 1$  и  $S = 1/2$ ) и  $J$  (между спинами  $S = 1/2$ ). Для корректного учета алгебры генераторов группы  $SU(3)$ , включающей квадрупольные операторы, использовалось представление операторов Хаббарда. Показано, что в зависимости от значений параметров системы могут быть реализованы ферримагнитные  $Y$ - или перевернутая  $Y$  ( $\bar{Y}$ )-фазы, скошенная  $V$ -фаза (спины  $S = 1/2$  параллельны), веерная  $W$ -фаза, а также коллинеарные ферримагнитная и ферромагнитная фазы. В случае  $I < J$  на фазовой диаграмме возникает линия, на которой  $SU(3)$ -ферримагнетик распадается на две независимые подсистемы, одна из которых парамагнитная со спинами  $S = 1$ , а вторая антиферромагнитная со спинами  $S = 1/2$  в нулевом эффективном магнитном поле. В спин-волновом приближении рассчитаны зависимости средних значений квадрупольного момента и дипольных моментов трех подрешеток от магнитного поля и параметра одноионной анизотропии. Проанализирован спектр спин-волновых возбуждений как при  $I > J$ , так и при  $I < J$ . Показано, что при  $I = J$  в  $SU(3)$ -ферримагнетике возникает случайное вырождение, которое может быть снято при учете квантовых флуктуаций.

DOI: 10.31857/S0044451025010092

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительно возрос интерес к материалам, в которых релятивистское спин-орбитальное взаимодействие приводит к проявлению квантовых эффектов на макроскопическом уровне [1, 2]. Такие материалы принято называть квантовыми магнетиками [3]. Одним из наиболее ярких проявлений квантовых эффектов является значительное сокращение среднего значения спина в магнетиках с  $S > 1/2$  [4]. Причина сокращения спина обусловлена учетом одноионной анизотропии (ОА), возникающей вследствие спин-орбитального взаимодействия, или учетом парных взаимодействий, связанных с высшими спиновыми инвариантами вида  $(\mathbf{S}_f \mathbf{S}_g)^{2S}$  [5–15]. Для магнитных систем, в

которых указанные негейзенберговские взаимодействия достаточно сильны, были обнаружены фазы спинового немагнетика, которые характеризуются нулевой намагниченностью даже при нулевой температуре (т. е. полное сокращение спина), но в которых имеется спонтанное нарушение симметрии за счет квадрупольных параметров порядка (средних значений операторов, билинейных по компонентам спина) [10]. Усилению указанных квантовых эффектов способствуют фрустрации [2], низкая температура, низкая размерность системы [16], а также фактор многоподрешеточности.

Например, в многоподрешеточных ферримагнетиках с различными магнитными ионами проявление квантовых эффектов может быть значительно усилено за счет возможной компенсации эффективного поля, действующего на спины магнитоактивных ионов [17–26]. Действительно, как было показано в работе [27], в ферримагнетике с двумя подрешетками квантовое сокращение спина в анизотроп-

\* E-mail: ddm@iph.krasn.ru

ной подрешетке (с  $S = 1$ ) при низких температурах может быть существенно уменьшено под действием поля обменного взаимодействия со стороны изотропной подрешетки ( $S = 1/2$ ). Если же имеется более двух подрешеток, то суммарное эффективное поле двух изотропных антиферромагнитно связанных подрешеток, действующее на ионы третьей анизотропной подрешетки, может обратиться в нуль, устраняя тем самым упомянутый механизм подавления квантового сокращения спина.

В этой связи одна из задач теории квантовых магнетиков видится в поиске такой микроскопической модели, которая позволила бы предсказать и изучить новые квантовые эффекты, имеющие перспективы как с экспериментальной точки зрения, так и с прикладной. С учетом сказанного выше очевидно, что один из путей в данном направлении состоит в изучении совместного действия нескольких различных аспектов, способствующих реализации явлений квантового магнетизма.

В контексте данного направления развития теории были выполнены, например, работы [28–30], в которых была предложена модель трехподрешеточного ферромагнетика со смешанными спинами  $S = 1, 1/2, 1/2$  на треугольной решетке с изинговским обменным взаимодействием и ОА в подсистеме спинов с  $S = 1$ . В указанных работах главный акцент исследований, основанных на методе Монте-Карло, был сделан на построении фазовых диаграмм температура–ОА, а также на поиске интересного с технологической точки зрения режима компенсации, в котором достигается нулевая полная намагниченность при температуре ниже критической. Важно отметить, что наряду с ОА в подсистеме спинов  $S = 1$  предложенная в [28–30] модель обладала такими важными свойствами, как низкая размерность и геометрическая фрустрация, которые, как отмечалось выше, способствуют усилению квантовых эффектов.

В недавней работе [31] авторами была исследована модель  $SU(3)$ -ферромагнетика (SU3F), которая в основных моментах совпадает с моделью, предложенной в [28–30], однако имеет два важных обобщения. Во-первых, вместо изинговского обменного взаимодействия в модели SU3F используется изотропный гейзенберговский обмен. Как известно, в неколлинеарных магнитных структурах поперечные вклады в обменное взаимодействие являются источником нулевых квантовых колебаний и, как следствие, антиферромагнитных флуктуаций (АФ). Эти

АФ, так же как и ОА, могут приводить к квантовому сокращению спина, и поэтому квантовые эффекты, обусловленные АФ и ОА, следует различать. Второе важное отличие SU3F от модели, предложенной в [28–30], состоит в использовании разных значений интегралов  $I$  и  $J$  обменных взаимодействий между подрешетками со спином  $S = 1$  и  $S = 1/2$ , и между двумя подрешетками с  $S = 1/2$  соответственно. Как будет показано ниже, для разных соотношений между обменными интегралами фазовые диаграммы SU3F качественно отличаются.

Кроме того, необходимо указать на важную концептуальную особенность модели SU3F. Она связана с тем, что наличие немалой ОА, как известно [8–12, 14, 15, 27, 32–36], приводит к необходимости учета полного набора генераторов алгебры  $SU(3)$ , действующих в гильбертовом пространстве состояний спина  $S = 1$ . Поэтому для описания таких систем алгебры обычных спиновых операторов недостаточно. Чтобы подчеркнуть данное обстоятельство, предложенная в работе [31] модель была названа моделью квантового  $SU(3)$ -ферромагнетика.

Общая особенность модели SU3F состоит в одновременном учете нескольких из перечисленных выше аспектов, способствующих проявлению квантовых эффектов: ОА, АФ, многоподрешеточность, низкая размерность, фрустрация обменных связей.

Исследование SU3F в работе [31] проводилось в отсутствие внешнего магнитного поля и при нулевой температуре. Были рассчитаны зависимости средних моментов подрешеток и квадрупольного момента от параметра ОА при различных соотношениях обменных интегралов  $I/J$ . Оказалось, что критическое значение ОА  $D_c$ , при котором SU3F переходит в квадрупольную фазу, может быть много меньше как  $I$ , так и  $J$ . Кроме того, при  $I > J$  в зависимости полного момента  $M$  от параметра ОА наблюдалась точка компенсации, т. е. обращение в нуль  $M$  при  $D < D_c$ .

Данная работа является логическим продолжением проведенных в [31] исследований. Ее основная цель состоит в построении фазовой диаграммы SU3F в координатах внешнее магнитное поле — параметр ОА, а также в анализе модификации магнитной структуры и параметров порядка при пересечении границ различных фаз. Расчет энергии основного состояния и определение спиновой конфигурации, отвечающей данной энергии, проводятся в приближении среднего поля в пределе нулевых температур. Последнее условие, как известно, является

недостижимым для метода Монте-Карло, использованного в цитированных выше работах [28–30]. Для корректного учета алгебры генераторов группы  $SU(3)$  в подсистеме спинов  $S = 1$  применяется формализм операторов Хаббарда [11, 35, 37]. При расчете параметров порядка проводится бозонизация спиновых операторов: для подсистемы спинов  $S = 1/2$  используются преобразования Гольштейна–Примакова, а для подсистемы спинов  $S = 1$  — формализм индефинитной метрики [11, 14].

Дальнейшее изложение статьи организовано следующим образом. Во втором разделе сформулирован гамильтониан  $SU(3)F$  во внешнем магнитном поле, лежащем в плоскости легкого намагничивания. В разд. 3 проводится  $SU(2)$ -преобразование спиновых операторов с  $S = 1/2$ , отвечающее повороту локальных осей координат. В разд. 4 проводится преобразование Гольштейна–Примакова для подсистемы спинов с  $S = 1/2$ . В пятом разделе описывается переход к представлению операторов Хаббарда и их трехкратное  $SU(3)$ -преобразование для диагонализации одноионного гамильтониана подсистемы спинов с  $S = 1$ . Бозонизация операторов Хаббарда с последующим получением дисперсионного уравнения описывается в разд. 6. В седьмом и восьмом разделах анализируются особенности фазовых диаграмм и характер изменений параметров порядка при  $I < J$  и  $I > J$  соответственно. В разд. 9 продемонстрировано вырождение среднеполевого основного состояния  $SU(3)F$  при  $I = J$ . В разд. 10 обсуждаются изменения спектра спин-волновых возбуждений при увеличении магнитного поля при разных соотношениях параметров обмена. Основные выводы работы представлены в разд. 11.

## 2. МОДЕЛЬ $SU(3)$ -ФЕРРИМАГНЕТИКА

Кристаллическая структура рассматриваемого  $SU(3)F$  представлена на рис. 1. Красными кружками отмечены узлы подрешетки со значением спина  $S = 1$ , обозначаемой далее как  $L$ -подрешетка. Зеленым и синим цветом отмечены узлы подрешеток со значением спина  $S = 1/2$ . Эти подрешетки далее обозначаются символами  $F$  и  $G$  соответственно. Периодичность системы определяется одинаковыми по модулю базисными векторами  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ . Векторы  $\zeta$  и  $\xi$  соединяют узлы из разных подрешеток.

Гамильтониан  $SU(3)F$  во внешнем магнитном поле может быть представлен в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{exch} + \mathcal{H}_{field}, \quad (1)$$

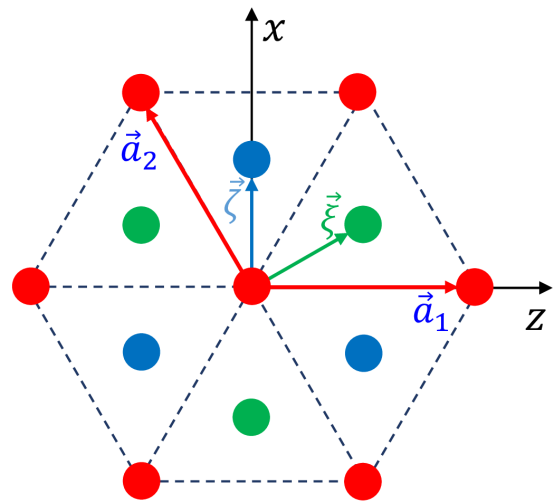


Рис. 1. Кристаллическая структура трехподрешеточного  $SU(3)F$  на треугольной решетке. Красными, зелеными и синими кружками обозначены положения узлов в  $L$ -,  $F$ - и  $G$ -подрешетках соответственно,  $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = a$  — векторы решетки Браве, а  $\xi$  и  $\zeta$  — векторы базиса

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{exch} &= J \sum_{\{fg\}} \mathbf{S}_f \mathbf{S}_g + I \sum_{\{fl\}} \mathbf{S}_f \mathbf{S}_l + I \sum_{\{gl\}} \mathbf{S}_g \mathbf{S}_l, \\ \mathcal{H}_A &= D \sum_l (S_l^y)^2, \\ \mathcal{H}_{field} &= -h \sum_f S_f^z - h \sum_g S_g^z - h_L \sum_l S_l^z. \end{aligned} \quad (2)$$

Оператор  $\mathcal{H}_{exch}$  описывает парное обменное взаимодействие между ближайшими спинами из разных подрешеток. Нижние индексы  $f$ ,  $g$  и  $l$  у операторов спина обозначают узлы из  $F$ -,  $G$ - и  $L$ -подрешеток соответственно. Обменный интеграл  $J$  определяет интенсивность антиферромагнитных взаимодействий между ближайшими спинами из  $F$ - и  $G$ -подрешеток, а интеграл  $I$  — из  $F(G)$ - и  $L$ -подрешеток. Фигурные скобки под тремя символами суммы в (2) означают, что суммирование ведется только по ближайшим узлам, и каждая пара узлов учитывается только один раз. Оператор  $\mathcal{H}_A$  описывает влияние ОА типа легкая плоскость на спины  $S = 1$  в  $L$ -подрешетке. Параметр одноионной анизотропии  $D$  — положительный. Ось  $y$  направлена перпендикулярно плоскости ферримагнетика  $xz$ , являющейся, следовательно, плоскостью легкого намагничивания. Оператор  $\mathcal{H}_{field}$  учитывает зеемановскую энергию спинов во внешнем магнитном поле  $H$ , лежащем в плоскости

ферримагнетика (легкой плоскости) и определяющим параметрами  $h = g\mu_B H$  и  $h_L = g_L\mu_B H$ , где  $\mu_B$  – магнетон Бора, а  $g$  и  $g_L$  – факторы Ланде для  $F(G)$ -подрешетки со спином  $S = 1/2$  и  $L$ -подрешетки с  $S = 1$  соответственно. В общем случае  $g$ -факторы могут различаться для разных подрешеток. В данной работе мы будем считать, что моменты формируются без участия орбитальных степеней свободы, т. е. являются чисто спиновыми, и, таким образом,  $g_L = g = 2$ .

Направление магнитного поля и тип ОА способствуют тому, что средний момент  $L$ -подрешетки  $\mathbf{R}_L$  оказывается ориентированным в плоскости  $xz$ , перпендикулярной оси анизотропии  $y$ . Кроме того, учитывая характер обменных взаимодействий, а также результаты работы [38], можно утверждать, что магнитная структура основного состояния SU3F при любых значениях  $D$  и  $H$  характеризуется планарной конфигурацией средних значений спинов. Поэтому без ограничения общности будем считать, что спины всех трех подрешеток лежат в плоскости ферримагнетика  $xz$ . Ось  $z$  исходной системы координат удобно направить вдоль магнитного поля.

### 3. SU(2)-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАМИЛЬТОНИАНА

Вычисление энергии основного состояния SU3F целесообразно начать с проведения унитарного преобразования гамильтониана  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H}(\theta_F, \theta_G) = U_2(\theta_F, \theta_G) \mathcal{H} U_2^\dagger(\theta_F, \theta_G), \quad (3)$$

с оператором

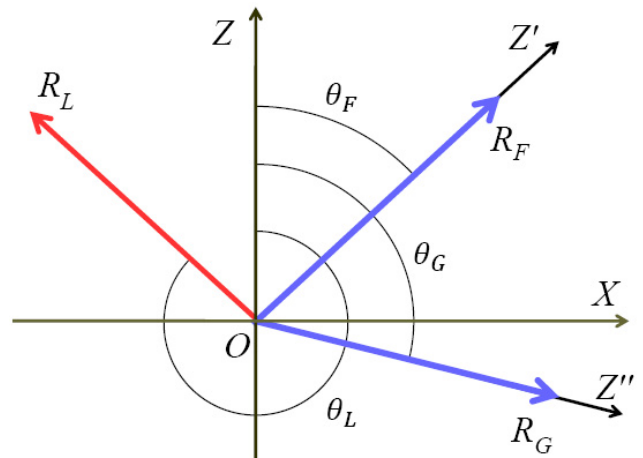
$$U_2(\theta) = \prod_{f \in F} \exp(-i\theta_F S_f^y) \prod_{g \in G} \exp(-i\theta_G S_g^y). \quad (4)$$

Преобразование (3) позволяет перейти для  $F$ - и  $G$ -подрешеток к новым локальным координатам, в которых оси квантования  $z'$  и  $z''$  повернуты на углы  $\theta_F$  и  $\theta_G$  вокруг оси  $y$  и направлены вдоль равновесных намагниченностей  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$  соответственно (см. рис. 2).

Унитарное преобразование (3) гамильтониана (1) отвечает следующей формальной замене спиновых операторов из  $F$ - и  $G$ -подрешеток [39]:

$$\begin{aligned} S_f^x &\rightarrow S_f^x \cos \theta_F + S_f^z \sin \theta_F, & S_f^y &\rightarrow S_f^y, \\ S_f^z &\rightarrow S_f^z \cos \theta_F - S_f^x \sin \theta_F, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} S_g^x &\rightarrow S_g^x \cos \theta_G + S_g^z \sin \theta_G, & S_g^y &\rightarrow S_g^y, \\ S_g^z &\rightarrow S_g^z \cos \theta_G - S_g^x \sin \theta_G. \end{aligned} \quad (6)$$



**Рис. 2.** Поворот локальных осей координат при унитарном преобразовании (3). В  $F$ - и  $G$ -подрешетках с  $S = 1/2$  оси  $z$  поворачиваются на углы  $\theta_F$  и  $\theta_G$  и занимают новые положения  $z'$  и  $z''$ . Локальные координаты в  $L$ -подсистеме с  $S = 1$  остаются неизменными, а угол, образованный моментом  $R_L$  и осью  $z$ , обозначен посредством  $\theta_L$

В результате оператор Гамильтона (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & D \sum_l (S_l^y)^2 + \\ & + J \sum_{\{fg\}} \{ (S_f^x S_g^x + S_f^z S_g^z) \cos(\theta_F - \theta_G) + \\ & + S_f^y S_g^y + (S_f^z S_g^x - S_f^x S_g^z) \sin(\theta_F - \theta_G) \} + \\ & + I \sum_{\{fl\}} \{ (S_f^x S_l^x + S_f^z S_l^z) \cos \theta_F + S_f^y S_l^y + \\ & + (S_f^z S_l^x - S_f^x S_l^z) \sin \theta_F \} + \\ & + I \sum_{\{gl\}} \{ (S_g^x S_l^x + S_g^z S_l^z) \cos \theta_G + S_g^y S_l^y + \\ & + (S_g^z S_l^x - S_g^x S_l^z) \sin \theta_G \} - \\ & - h \sum_f \{ S_f^z \cos \theta_F - S_f^x \sin \theta_F \} - \\ & - h \sum_g \{ S_g^z \cos \theta_G - S_g^x \sin \theta_G \} - h_L \sum_l S_l^z, \end{aligned} \quad (7)$$

где операторы  $S_f^\beta$  и  $S_g^\beta$  ( $\beta = x, y, z$ ), относящиеся к  $F$ - и  $G$ -подсистемам, определяют проекции спиновых моментов на соответствующую индексу  $\beta$  ось в новых (повернутых) локальных системах координат.

#### 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГОЛЬШТЕЙНА – ПРИМАКОВА

Согласно изложенной во введении стратегии вычисления энергии основного состояния  $SU3F$ , проведем преобразование Гольштейна – Примакова отдельно для  $F$ - и  $G$ -подрешеток:

$$\begin{aligned} S_f^+ &= \sqrt{2S - a_f^+ a_f} \cdot a_f, & S_f^z &= S - a_f^+ a_f, \\ S_g^+ &= \sqrt{2S - b_g^+ b_g} \cdot b_g, & S_g^z &= S - b_g^+ b_g, \end{aligned} \quad (8)$$

где операторы рождения  $a_f^+(b_g^+)$  и уничтожения  $a_f(b_g)$  бозонов описывают переходы спина в  $F(G)$ -подрешетке на узле  $f(g)$  из состояния  $|\uparrow'\rangle(|\uparrow''\rangle)$ , отвечающего ориентации спина вдоль оси  $z'(z'')$ , в состояние с противоположной ориентацией  $|\downarrow'\rangle(|\downarrow''\rangle)$  и обратно.

Результат подстановки (8) в гамильтониан (7) запишем в виде

$$\mathcal{H} = E_0 + \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)}. \quad (9)$$

В этом выражении

$$\begin{aligned} E_0 &= J_0 S^2 N \cos(\theta_F - \theta_G) - \\ &- h S N (\cos \theta_F + \cos \theta_G), \end{aligned} \quad (10)$$

а следующие три операторных слагаемых  $H^{(n)}$  ( $n = 0, 1, 2$ ) классифицируются по степеням бозе-операторов  $n$ . Величина  $N$  в формуле (10) обозначает число узлов в подрешетке.

Оператор  $\mathcal{H}^{(0)}$  представляет собой сумму одноионных гамильтонианов  $L$ -подсистемы:

$$\mathcal{H}^{(0)} = \sum_l \mathcal{H}_0(l),$$

где

$$\mathcal{H}_0(l) = D(S_l^y)^2 + \bar{H}_z S_l^z + \bar{H}_x S_l^x, \quad (11)$$

а эффективные поля определяются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{H}_z &= I_0 S (\cos \theta_F + \cos \theta_G) - h_L, \\ \bar{H}_x &= I_0 S (\sin \theta_F + \sin \theta_G), & I_0 &= 3I. \end{aligned} \quad (12)$$

Линейное по бозе-операторам слагаемое гамильтониана (9) запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)} &= \sum_{\{fl\}} I \sqrt{\frac{S}{2}} [\cos \theta_F S_l^x - \sin \theta_F S_l^z] (a_f + a_f^+) + \\ &+ \sum_f \sqrt{\frac{S}{2}} [J_0 S \sin(\theta_G - \theta_F) + h \sin \theta_F] (a_f + a_f^+) + \\ &+ \sum_{\{gl\}} I \sqrt{\frac{S}{2}} [\cos \theta_G S_l^x - \sin \theta_G S_l^z] (b_g + b_g^+) + \\ &+ \sum_g \sqrt{\frac{S}{2}} [J_0 S \sin(\theta_F - \theta_G) + h \sin \theta_G] (b_g + b_g^+) + \\ &+ \frac{I}{i} \sqrt{\frac{S}{2}} \left\{ \sum_{\{fl\}} S_l^y (a_f - a_f^+) + \sum_{\{gl\}} S_l^y (b_g - b_g^+) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $J_0 = 3J$ .

Последнее слагаемое в выражении (9) описывает возбуждения в  $F$ - и  $G$ -подсистемах и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)} &= J \frac{S}{2} \sum_{\{f,g\}} \left\{ [(a_f + a_f^+)(b_g + b_g^+) - \right. \\ &- 2(a_f^+ a_f + b_g^+ b_g)] \cos(\theta_F - \theta_G) - \\ &- (a_f - a_f^+)(b_g - b_g^+) \left. \right\} - \\ &- I \sum_{\{f,l\}} (\cos \theta_F S_l^z + \sin \theta_F S_l^x) a_f^+ a_f - \\ &- I \sum_{\{g,l\}} (\cos \theta_G S_l^z + \sin \theta_G S_l^x) b_g^+ b_g + \\ &+ h \cos \theta_F \sum_f a_f^+ a_f + h \cos \theta_G \sum_g b_g^+ b_g. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее, логика среднего поля диктует проведение замены в выражениях для  $\mathcal{H}^{(1)}$  и  $\mathcal{H}^{(2)}$  спиновых операторов  $L$ -подсистемы их средними значениями. В рассматриваемом режиме нулевых температур усреднение операторов  $S_l^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) достаточно проводить по основному состоянию одноузельного гамильтониана (11).

#### 5. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ОДНОИОННОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Для диагонализации одноионного гамильтониана (11), как и в работе [31], воспользуемся подходом развитым в [40]. Перейдем от спиновых операторов к операторам Хаббарда [37]  $X_l^{m,n} = |m\rangle\langle n|$ , где  $m, n = \{-1, 0, +1\}$  — собственные значения операторов



ра  $S_l^z$ , а  $|m\rangle$  и  $|n\rangle$  — соответствующие собственные состояния:  $S_l^z |n\rangle = n |n\rangle$ . Подставляя выражения

$$\begin{aligned} S_l^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( X_l^{1,0} + X_l^{\bar{1},0} + X_l^{0,1} + X_l^{0,\bar{1}} \right), \\ S_l^y &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left( -X_l^{1,0} + X_l^{\bar{1},0} + X_l^{0,1} - X_l^{0,\bar{1}} \right), \\ (S_l^y)^2 &= \frac{1}{2} \left( X_l^{1,\bar{1}} + X_l^{\bar{1},1} - X_l^{1,1} - X_l^{\bar{1},\bar{1}} \right) + X_l^{0,0}, \\ S_l^z &= X_l^{1,1} - X_l^{\bar{1},\bar{1}}, \quad \bar{1} \equiv -1, \end{aligned} \quad (15)$$

описывающие переход к представлению операторов Хаббарда, в одноионный гамильтониан (11) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(l) &= \left( \frac{D}{2} + \bar{H}_z \right) X_l^{1,1} + D X_l^{0,0} + \\ &+ \left( \frac{D}{2} - \bar{H}_z \right) X_l^{\bar{1},\bar{1}} - \frac{D}{2} \left( X_l^{1,\bar{1}} + X_l^{\bar{1},1} \right) + \\ &+ \frac{\bar{H}_x}{\sqrt{2}} \left( X_l^{1,0} + X_l^{0,1} + X_l^{\bar{1},0} + X_l^{0,\bar{1}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

В отсутствие магнитного поля основное состояние системы вырождено относительно вращения вокруг оси  $y$ . Тогда, выбирая направление оси  $z$  вдоль вектора  $\mathbf{R}_L$  и учитывая справедливое в силу эквивалентности  $F$ - и  $G$ -подрешеток равенство  $\theta_F = -\theta_G$ , получаем, что величина  $\bar{H}_x$  обращается в нуль, а последнее слагаемое в выражении (16) исчезает. В этом случае гамильтониан  $\mathcal{H}_0(l)$  перемешивает только два из трех состояния ( $|+1\rangle$  и  $|-1\rangle$ ) и для его диагонализации достаточно провести одно унитарное преобразование (см. [31]). Наличие магнитного поля приводит к тому, что перемешанными оказываются все три состояния  $|n\rangle$  ( $n = \{-1, 0, +1\}$ ), а для диагонализации одноионного гамильтониана необходимо проводить три последовательных преобразования.

Унитарный оператор  $U_{nm}(\alpha, l)$  каждого преобразования определяется своим генератором  $\Gamma_{nm}(l) = X_l^{nm} - X_l^{mn}$  из группы  $SU(3)$ , согласно выражению

$$\begin{aligned} U_{nm}(\alpha, l) &= \exp\{\alpha \Gamma_{nm}(l)\} = \\ &= 1 + (\cos \alpha - 1)(X_l^{nm} + X_l^{mn}) + \sin \alpha \Gamma_{nm}(l). \end{aligned} \quad (17)$$

Новые операторы Хаббарда  $X_l^{\tilde{r}\tilde{s}} = |\tilde{r}, l\rangle \langle \tilde{s}, l|$ , определенные посредством новых состояний

$$|\tilde{r}, l\rangle = U_{nm}(-\alpha, l)|r, l\rangle, \quad (18)$$

выражаются через исходные операторы Хаббарда следующим образом:

$$X_l^{\tilde{r}\tilde{s}} = U_{nm}(-\alpha, l) X_l^{rs} U_{nm}^+(\alpha, l). \quad (19)$$

Тогда рассматриваемое унитарное преобразование сводится к простой замене в одноузельном гамильтониане:

$$X_l^{rs} \rightarrow U_{\tilde{n}\tilde{m}}(\alpha, l) X_l^{\tilde{r}\tilde{s}} U_{\tilde{n}\tilde{m}}^+(\alpha, l). \quad (20)$$

Явные выражения для правой части последней формулы в общем случае были получены в работе [40] и для полноты изложения приведены в Приложении А. Вариационный параметр  $\alpha$  в формуле (17) подбирается из условия обращения в нуль численного коэффициента перед недиагональными операторами  $X_l^{\tilde{n}\tilde{m}}$  и  $X_l^{\tilde{m}\tilde{n}}$  в преобразованном с помощью подстановки (20) гамильтониане.

Проводя последовательно три унитарных преобразования с операторами  $U_{1,0}(\alpha_2)$ ,  $U_{0,-1}(\alpha_3)$  и  $U_{1,-1}(\alpha_1)$  по правилу (20) и сохраняя в конечном выражении прежние обозначения для индексов новых состояний  $n = \{-1, 0, +1\}$  (т. е. без тильды), получаем диагональную по операторам Хаббарда форму для одноионного гамильтониана  $\mathcal{H}_0(l)$ :

$$\mathcal{H}_0(l) = \sum_n \epsilon_n X_l^{nn}, \quad n = -1, 0, +1. \quad (21)$$

Собственные значения  $\epsilon_n$  одноионного гамильтониана можно представить в виде ( $\bar{1} = -1$ )

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= e_{\bar{1},\bar{1}} \sin^2 \alpha_1 + e_{1,1} \cos^2 \alpha_1 + e_{1,\bar{1}} \sin 2\alpha_1, \\ \epsilon_{\bar{1}} &= e_{\bar{1},\bar{1}} \cos^2 \alpha_1 + e_{1,1} \sin^2 \alpha_1 - e_{1,\bar{1}} \sin 2\alpha_1, \\ \epsilon_0 &= e_{0,0}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} e_{1,1} &= D \sin^2 \alpha_2 + \left( \frac{D}{2} + \bar{H}_z \right) \cos^2 \alpha_2 + \\ &+ \frac{\bar{H}_x}{\sqrt{2}} \sin 2\alpha_2, \\ e_{\bar{1},\bar{1}} &= D \cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_3 - \frac{D}{2} \sin \alpha_2 \sin 2\alpha_3 + \\ &+ \left( \frac{D}{2} + \bar{H}_z \right) \sin^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_3 + \\ &+ \left( \frac{D}{2} - \bar{H}_z \right) \cos^2 \alpha_3 - \\ &- \frac{\bar{H}_x}{\sqrt{2}} (\cos \alpha_2 \sin 2\alpha_3 + \sin 2\alpha_2 \sin^2 \alpha_3), \\ e_{0,0} &= D \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3 + \frac{D}{2} \sin \alpha_2 \sin 2\alpha_3 + \\ &+ \left( \frac{D}{2} + \bar{H}_z \right) \sin^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3 + \left( \frac{D}{2} - \bar{H}_z \right) \sin^2 \alpha_3 + \\ &+ \frac{\bar{H}_x}{\sqrt{2}} (\cos \alpha_2 \sin 2\alpha_3 - \sin 2\alpha_2 \cos^2 \alpha_3), \end{aligned} \quad (23)$$

$$e_{1,\bar{1}} = \left( \frac{\bar{H}_z}{2} - \frac{D}{4} \right) \sin(2\alpha_2) \sin \alpha_3 - \frac{D}{2} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \frac{\bar{H}_x}{\sqrt{2}} (-\cos 2\alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_3).$$

Из требования обращения в нуль коэффициентов при недиагональных  $X$ -операторах в преобразованном гамильтониане получается следующая система уравнений для углов  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_3 &= \frac{\left( \frac{D}{2} - \bar{H}_z \right) \sin 2\alpha_2 + \sqrt{2} \bar{H}_x \cos 2\alpha_2}{D \cos \alpha_2 - \sqrt{2} \bar{H}_x \sin \alpha_2}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha_3 &= \frac{\sqrt{2} \bar{H}_x \cos \alpha_2 + D \sin \alpha_2}{2\bar{H}_z + \left( \frac{D}{2} - \bar{H}_z \right) \cos^2 \alpha_2 - \frac{\bar{H}_x}{\sqrt{2}} \sin 2\alpha_2}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = 2e_{1,\bar{1}} / (e_{1,1} - e_{1,\bar{1}}).$$

Аналогичным образом применяя к представлению (15) последовательно три раза формулу (20) с операторами  $U_{1,0}(\alpha_2)$ ,  $U_{0,\bar{1}}(\alpha_3)$  и  $U_{1,\bar{1}}(\alpha_1)$ , можно выразить спиновые операторы  $S_l^x$ ,  $S_l^y$ ,  $S_l^z$  и  $(S_l^y)^2$  через новые (преобразованные)  $X$ -операторы. Тогда коэффициенты разложения операторов спина  $S_l^\alpha$  по новым операторам Хаббарда  $X_l^{nm}$  будут представлять матричные элементы спиновых операторов по новым состояниям:  $s_{n,m}^\alpha \equiv \langle n | S_l^\alpha | m \rangle$  ( $\alpha = x, y, z$ ). Явные выражения для этих матричных элементов приведены в Приложении В.

В рамках приближения среднего поля следует заменить в гамильтониане  $\mathcal{H}^{(1)}$  спиновые операторы их средними значениями, т.е. диагональными матричными элементами  $s_{n,n}^\alpha$ , вычисленными по основному состоянию  $|n\rangle$ , отвечающему минимальному значению  $\epsilon_n$ . Ниже мы будем выбирать набор решений уравнений (24) для углов  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) так, чтобы состояние  $|+1\rangle$  было основным.

Поскольку  $s_{nn}^y = 0$  для любого  $n$  (см. Приложение В), то последние две суммы в формуле (13) для  $\mathcal{H}^{(1)}$  обращаются в нуль. Сокращение же остальных слагаемых в (13) имеет место при выполнении равенств

$$\begin{aligned} I_0(s_{1,1}^x \cos \theta_F - s_{1,1}^z \sin \theta_F) + J_0 S \sin(\theta_G - \theta_F) + h \sin \theta_F &= 0, \\ I_0(s_{1,1}^x \cos \theta_G - s_{1,1}^z \sin \theta_G) + J_0 S \sin(\theta_F - \theta_G) + h \sin \theta_G &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

используемых далее для определения равновесных значений углов  $\theta_F$  и  $\theta_G$ . Угол  $\theta_L$ , введенный на рис. 2

для наглядности, параметром согласования не является и может быть определен через отношение средних значений проекций спиновых операторов  $S_l^z$  и  $S_l^x$ .

Магнитная структура основного состояния  $SU(3)$  определяется решениями пяти уравнений (24) и (25) для углов  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\theta_F$  и  $\theta_G$  с последующем выбором того набора решений, который отвечает минимальному значению среднеполевой энергии всей системы

$$E_{MF} = E_0 + N \epsilon_1, \quad (26)$$

где величины  $E_0$  и  $\epsilon_1$  определены уравнениями (10) и (22) соответственно. В разд. 7 будут представлены фазовые  $h$ - $D$ -диаграммы  $SU(3)$ F, рассчитанные на основе изложенной здесь методики.

## 6. БОЗОНИЗАЦИЯ $L$ -ПОДСИСТЕМЫ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

В рамках выбранного приближения энергия основного состояния  $E_{MF}$  определяется без учета АФ. Поэтому вклады от последнего слагаемого в гамильтониане (9), квадратичные по бозе-операторам, в выражении (26) для  $E_{MF}$  отсутствуют. Тем не менее при расчете зависимостей параметров порядка от магнитного поля и ОА требуется энергетический спектр спин-волновых возбуждений, и для определения этого спектра оператор  $\mathcal{H}^{(2)}$  уже необходимо учитывать.

Для вычисления энергетического спектра в спин-волновом приближении выразим сначала спиновые операторы через новые (преобразованные)  $X$ -операторы. Используя (15) и формулы из Приложения А, получим для  $S$ -операторов выражения вида

$$S_l^\alpha = \sum_{n,m} s_{nm}^\alpha X_l^{nm}, \quad \alpha = x, y, z, \quad (27)$$

где матричные элементы  $s_{nm}^\alpha$  приведены в Приложении В.

Далее учитывая, что спектр состояний  $\mathcal{H}_0(l)$  характеризуется тремя уровнями, а основным состоянием одноионного гамильтониана является состояние  $|+1\rangle$ , введем, следуя работам [11, 14], два сорта бозе-операторов:  $c$  и  $d$ . Рождение одного  $c(d)$ -бозона на узле  $l$  описывается действием оператора рождения  $c_l^+$  ( $d_l^+$ ) и отвечает переходу системы из «вакуумного» состояния  $|+1\rangle$  в состояние  $|0\rangle(|-1\rangle)$  с одним  $c(d)$ -бозоном. Эрмитово-сопряженный оператор  $c_l(d_l)$ , действуя в обратном направлении, уничтожает  $c(d)$ -бозон. Состояния с большим числом

бозонов отсекаются метрическим оператором как нефизические.

Представление операторов Хаббарда через бозе-операторы, предложенное в работе [40] в рамках формализма индефинитной метрики [41], имеет вид

$$\begin{aligned} X_l^{1,0} &= (1 - c_l^+ c_l - d_l^+ d_l) c_l, & X_l^{0,1} &= c_l^+, \\ X_l^{1,\bar{1}} &= (1 - c_l^+ c_l - d_l^+ d_l) d_l, & X_l^{\bar{1},1} &= d_l^+, \\ X_l^{0,\bar{1}} &= c_l^+ d_l, & X_l^{\bar{1},0} &= d_l^+ c_l, & X_l^{0,0} &= c_l^+ c_l, \\ X_l^{\bar{1},\bar{1}} &= d_l^+ d_l, & X_l^{1,1} &= (1 - c_l^+ c_l - d_l^+ d_l). \end{aligned} \quad (28)$$

Используем представление (28) в формулах (27) и подставим полученные выражения для  $S$ -операторов (см. Приложение С) в слагаемые  $\mathcal{H}^{(1)}$  и  $\mathcal{H}^{(2)}$  гамильтониана (9). В результате возникает выражение, в котором необходимо оставить только вклады не выше второго порядка по  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ -операторам. Проводя фурье-преобразование

$$\begin{aligned} a_f &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikf} a_k, & b_g &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikg} b_k, \\ c_l &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikl} c_k, & d_l &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikl} d_k, \end{aligned} \quad (29)$$

получаем искомый гамильтониан, который можно записать следующим образом:

$$\mathcal{H} = E_{MF} + \mathcal{H}_{SW}. \quad (30)$$

Здесь первое слагаемое  $E_{MF}$  отвечает энергии основного состояния в приближении среднего поля (см. формулу (26)), а второе слагаемое  $\mathcal{H}_{SW}$  описывает спин-волновые возбуждения и определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{SW} &= \sum_k \{ E_a a_k^+ a_k + E_b b_k^+ b_k + E_c c_k^+ c_k + E_d d_k^+ d_k + \\ &+ J_+ (\gamma_k a_k^+ b_k + \gamma_k^* b_k^+ a_k) \} + \\ &+ J_- (\gamma_k a_k^+ b_{-k}^+ + \gamma_k^* a_k b_{-k}) + \\ &+ I_{0F}^+ (\gamma_k c_k^+ a_k + \gamma_k^* a_k^+ c_k) + \\ &+ I_{0F}^- (\gamma_k c_k^+ a_{-k}^+ + \gamma_k^* c_k a_{-k}) + \\ &+ I_{1F}^+ (\gamma_k d_k^+ a_k + \gamma_k^* a_k^+ d_k) + \\ &+ I_{1F}^- (\gamma_k d_k^+ a_{-k}^+ + \gamma_k^* d_k a_{-k}) + \\ &+ I_{0G}^+ (\gamma_k^* c_k^+ b_k + \gamma_k b_k^+ c_k) + \\ &+ I_{0G}^- (\gamma_k^* c_k^+ b_{-k}^+ + \gamma_k c_k b_{-k}) + \\ &+ I_{1G}^+ (\gamma_k^* d_k^+ b_k + \gamma_k b_k^+ d_k) + \\ &+ I_{1G}^- (\gamma_k^* d_k^+ b_{-k}^+ + \gamma_k d_k b_{-k}). \end{aligned} \quad (31)$$

При записи этого выражения были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} E_a &= -J_0 S \cos(\theta_F - \theta_G) + h \cos \theta_F - \\ &- I_0 (s_{11}^z \cos \theta_F + s_{11}^x \sin \theta_F), \\ E_b &= -J_0 S \cos(\theta_G - \theta_F) + h \cos \theta_G - \\ &- I_0 (s_{11}^z \cos \theta_G + s_{11}^x \sin \theta_G), \\ E_c &= \epsilon_0 - \epsilon_1, & E_d &= \epsilon_1 - \epsilon_0, \\ J_{\pm} &= \frac{J_0 S}{2} (\cos(\theta_F - \theta_G) \pm 1), \\ I_{nA}^{\pm} &= I_0 \sqrt{\frac{S}{2}} \left( s_{n1}^x \cos \theta_A - s_{n1}^z \sin \theta_A \pm \frac{s_{n1}^y}{i} \right), \\ &n = \{0, \bar{1}\}, & A &= \{F, G\}, \\ \gamma_k &= \frac{1}{3} \sum_{\delta} e^{ik\delta} = \frac{1}{3} \left( 2 \cos \frac{kz}{2} e^{i \frac{kx}{2\sqrt{3}}} + e^{-i \frac{kx}{\sqrt{3}}} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

В сумме, определяющей инвариант треугольной решетки  $\gamma_k$ , вектор  $\delta$  пробегает три значения:  $\{\xi, -\zeta, \zeta - \xi\}$  (см. рис. 1). Зона Бриллюэна, ограничивающая область значений квазиимпульса  $k$ , представлена на рис. 3.

Для получения дисперсионного уравнения определим матричную запаздывающую функцию Грина  $\langle\langle \mathbf{X}_k | \mathbf{X}_k^+ \rangle\rangle_{\omega}$ , где

$$\mathbf{X}_k^+ = (a_k^+, b_k^+, c_k^+, d_k^+, a_{-k}, b_{-k}, c_{-k}, d_{-k}).$$

Из требования существования нетривиальных решений уравнения движения для  $\langle\langle \mathbf{X}_k | \mathbf{X}_k^+ \rangle\rangle_{\omega}$  следует уравнение для спектра

$$\begin{vmatrix} \omega - \mathbf{A}_k & -\mathbf{B}_k \\ \mathbf{B}_k & \omega + \mathbf{A}_k \end{vmatrix} = 0, \quad (33)$$

где

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} E_a & J_+ \gamma_k & I_{0F}^+ \gamma_k^* & I_{1F}^+ \gamma_k^* \\ J_+ \gamma_k^* & E_b & I_{0G}^+ \gamma_k & I_{1G}^+ \gamma_k \\ I_{0F}^+ \gamma_k & I_{0G}^+ \gamma_k^* & E_c & 0 \\ I_{1F}^+ \gamma_k & I_{1G}^+ \gamma_k^* & 0 & E_d \end{pmatrix} \quad (34)$$

и

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} 0 & J_- \gamma_k & I_{0F}^- \gamma_k^* & I_{1F}^- \gamma_k^* \\ J_- \gamma_k^* & 0 & I_{0G}^- \gamma_k & I_{1G}^- \gamma_k \\ I_{0F}^- \gamma_k & I_{0G}^- \gamma_k^* & 0 & 0 \\ I_{1F}^- \gamma_k & I_{1G}^- \gamma_k^* & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Дисперсионное уравнение (33) является уравнением четвертой степени относительно  $\omega^2$ , а его решения  $\varepsilon_{jk}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) представляют четыре ветви коллективных спиновых возбуждений рассматриваемого SU3F.



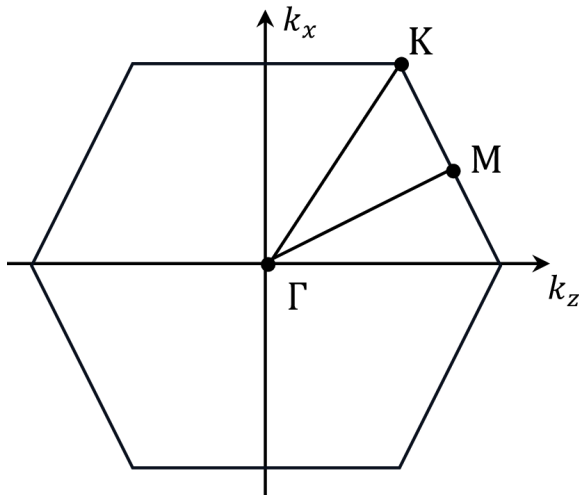


Рис. 3. Зона Бриллюэна треугольной решетки и три точки высокой симметрии:  $\Gamma$ ,  $K$ ,  $M$

### 7. ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА $SU3F$ ПРИ $I < J$

Обсуждение фазовой диаграммы  $SU3F$  в координатах магнитное поле — параметр  $OA$  проведем отдельно для трех вариантов соотношений между обменными параметрами:  $I < J, I > J, I = J$ . В данном разделе мы рассмотрим первый вариант:  $I < J$ .

На рис. 4 изображена фазовая диаграмма основного состояния  $SU3F$ , рассчитанная согласно методике, изложенной в разд. 5, при соотношении обменных параметров  $I/J = 0.8$ . Видно, что в рассматриваемом режиме реализуются три фазы: перевернутая  $Y$ -фаза (обозначаемая далее как  $\bar{Y}$ ),  $W$ -фаза и ферромагнитная фаза.

В  $\bar{Y}$ -фазе вектор среднего значения спина  $L$ -подрешетки  $\mathbf{R}_L$  направлен вдоль направления магнитного поля (оси  $z$ ), а векторы средних значений спинов  $F$ - и  $G$ -подрешеток  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$  составляют с осью  $z$  одинаковые по модулю, но противоположные по знаку углы:  $\theta_F = -\theta_G$ . При этом модуль углов  $\theta_F$  и  $\theta_G$  изменяется в интервале  $[\pi/2, \pi]$ . В симметричной  $W$ -фазе углы  $\theta_F$  и  $\theta_G$  также равны по модулю и противоположны по знаку, однако, в отличие от  $\bar{Y}$ -фазы, интервал изменения модулей этих углов другой:  $[0, \pi/2]$ . В этом случае проекции всех трех векторов  $\mathbf{R}_F, \mathbf{R}_G$  и  $\mathbf{R}_L$  на ось  $x$  положительны. Граница раздела  $\bar{Y}$ - и  $W$ -фаз на рис. 4 обозначена штриховой линией. Справа от красной линии на фазовой диаграмме реализуется ферромагнитная фаза: векторы средних значений спинов из  $L$ -,  $F$ - и  $G$ -подрешеток направлены вдоль магнитного поля.

Эволюция магнитной структуры при  $I < J$  характеризуется монотонным уменьшением абсолют-

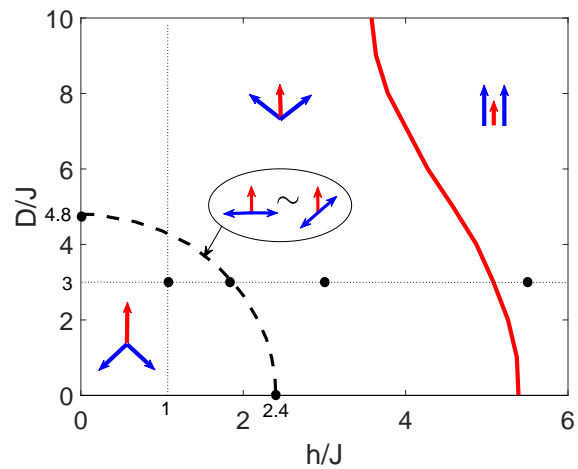


Рис. 4. Фазовая  $h$ - $D$ -диаграмма основного состояния  $SU3F$  при  $I/J = 0.8$ . Черная штриховая линия отвечает границе между  $\bar{Y}$ - и  $W$ -фазами, а сплошная красная — между  $W$ -фазой и ферромагнитной. На пиктограммах, условно изображающих магнитную структуру  $SU3F$ , красная стрелка символизирует вектор  $\mathbf{R}_L$ , синие стрелки —  $\mathbf{R}_{F(G)}$ , а магнитное поле  $h$  считается направленным вверх. На штриховой линии реализуется фаза, в которой подсистемы со спинами  $S = 1$  и  $1/2$  становятся эффективно независимыми

ных значений углов  $\theta_F$  и  $\theta_G$  с увеличением  $H$  и обращением их в нуль при некотором значении поля, зависящем от параметра  $OA$  (см. красную линию на рис. 4). Сказанное поясняется тремя пиктограммами, условно изображающими магнитную структуру в каждой из трех областей фазовой диаграммы.

Для понимания представленной фазовой диаграммы рассчитаем зависимости параметров порядка  $SU3F$  от магнитного поля при фиксированном значении параметра  $OA$  и от параметра  $OA$  при фиксированном  $h$ .

Средние значения спинов  $R_F$  и  $R_G$  в  $F$ - и  $G$ -подрешетках можно рассчитать, воспользовавшись представлением Гольштейна–Примакова (8), согласно которому

$$\begin{aligned} R_F &= \langle S_f^{z'} \rangle = S - n_a, \\ R_G &= \langle S_g^{z''} \rangle = S - n_b, \end{aligned} \quad (36)$$

где числа заполнения бозонов  $n_a = \langle a_f^+ a_f \rangle$  и  $n_b = \langle b_g^+ b_g \rangle$  вычисляются по спектральной теореме из матричной функции Грина  $\langle \langle \mathbf{X}_k | \mathbf{X}_k^+ \rangle \rangle_\omega$ , введенной в разд. 6.

Средний спиновый магнитный момент  $L$ -подрешетки  $R_L$  можно найти по формуле

$$R_L = \sqrt{(R_L^z)^2 + (R_L^x)^2}, \quad (37)$$

где величины  $R_L^z$  и  $R_L^x$  определяются средними числами заполнения  $c$ - и  $d$ -бозонов:  $n_c = \langle c_k^\dagger c_k \rangle$  и  $n_d = \langle d_k^\dagger d_k \rangle$ , а также корреляторами  $\langle c_k^\dagger d_k \rangle$  и  $\langle d_k^\dagger c_k \rangle$ . Соответствующие выражения получаются в результате усреднения формул, приведенных в Приложении С. Поскольку суммарный магнитный момент  $\mathbf{M} = \mathbf{R}_F + \mathbf{R}_G + \mathbf{R}_L$  направлен вдоль внешнего магнитного поля (т. е. оси  $z$ ), то его поперечная компонента должна обращаться в нуль тождественно

$$R_L^x + R_F \sin \theta_F + R_G \sin \theta_G = 0,$$

а продольная компонента равна

$$M = R_L^z + R_F \cos \theta_F + R_G \cos \theta_G. \quad (38)$$

Среднее значение квадрупольного момента [42]

$$Q_2^0(l) = 3(S_l^y)^2 - 2 \quad (39)$$

рассчитывается аналогичным образом после усреднения соответствующих формул из Приложения С.

Графики, демонстрирующие зависимость полного момента  $M$ , средних значений спиновых магнитных моментов  $R_L$ ,  $R_{F(G)}$  и квадрупольного момента  $Q_2^0$  от внешнего поля  $h$  при значении параметра ОА  $D/J = 3$  и соотношении между обменными интегралами  $I/J$ , равном 0.8, представлены на рис. 5. Изменению магнитного поля на этом рисунке отвечает движение по горизонтальной пунктирной линии на фазовой диаграмме рис. 4. Видно, что в точке перехода из  $W$ -фазы в ферромагнитную все кривые на рис. 5 испытывают излом. При этом значения  $M$  и  $R_L$  ожидаемо увеличиваются при увеличении поля  $h$ , а квадрупольный момент — уменьшается.

Зависимости параметров порядка  $M$ ,  $R_L$ ,  $R_F$ ,  $R_G$  и  $Q_2^0$  от параметра  $D$  при значении магнитного поля  $h/J = 1$  представлены на рис. 6. Изменению параметра  $D$  на этом рисунке отвечает движение по вертикальной пунктирной линии на фазовой диаграмме рис. 4. Видно, что при пересечении границы  $\bar{Y}$ - и  $W$ -фаз зависимости параметров  $R_{F(G)}$  от  $D$  испытывают излом, а квадрупольный момент выходит на насыщение. Среднее значение момента  $L$ -подрешетки быстро уменьшается в окрестности границы, но при дальнейшем увеличении  $D$  спадает медленно. Очевидно, что именно уменьшение  $R_L$  способствует развороту вверх векторов  $\mathbf{R}_{F(G)}$ , поскольку уменьшает проигрыш в обменной энергии между спинами  $S = 1$  и  $S = 1/2$ .

Важной особенностью фазовой диаграммы, представленной на рис. 4, является то, что на всей

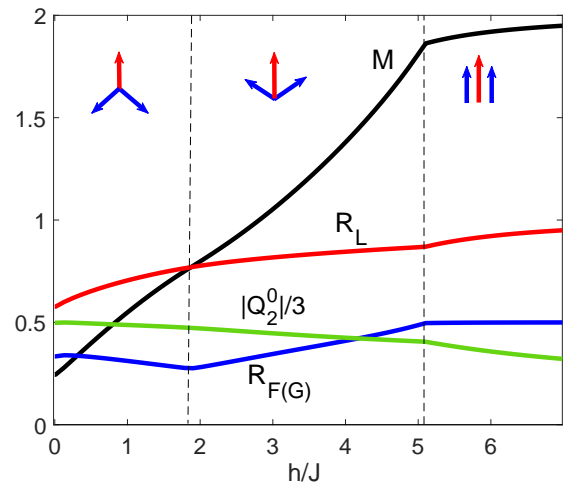


Рис. 5. Зависимость величин  $R_L$  (красная линия),  $R_{F(G)}$  (синяя линия),  $M$  (черная линия) и  $|Q_2^0|/3$  (зеленая линия) от магнитного поля  $h$ . Соотношение между обменными интегралами  $I/J = 0.8$ , а  $D/J = 3$ . Три пиктограммы, составленные из одной красной и двух синих стрелок, имеют тот же смысл, что и на рис. 4

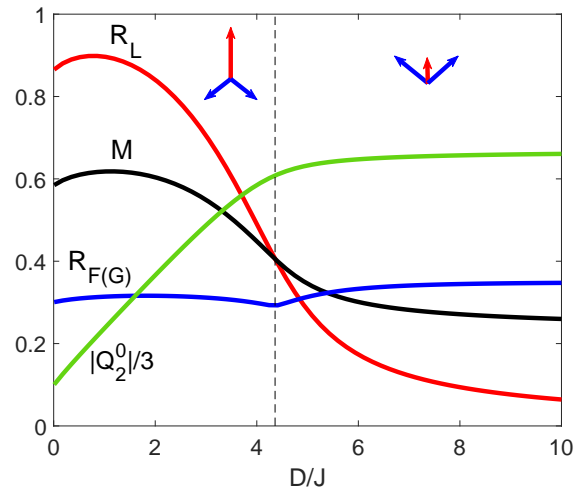


Рис. 6. Зависимости величин  $R_L$  (красная линия),  $R_{F(G)}$  (синяя линия),  $M$  (черная линия) и  $|Q_2^0|/3$  (зеленая линия) от параметра ОА  $D$ . Соотношение между обменными интегралами  $I/J = 0.8$ , а  $h/J = 1$

границе между  $\bar{Y}$ - и  $W$ -фазами (черная штриховая линия) угол между векторами  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$  равен  $\pi$ . В этом случае из выражений (12) для эффективных полей находим

$$\bar{H}_z = -h_L, \quad \bar{H}_x = 0. \quad (40)$$

При учете этих соотношений и при условии  $h_L \neq 0$  решения уравнений (24) для углов  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) получаются в виде

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{D}{2h_L}(-1)^{n+m}, \quad \alpha_2 = \pi n, \quad \alpha_3 = \pi m, \quad (41)$$

где  $n$  и  $m$  — целые числа. Подстановка этих решений в выражения для матричных элементов спиновых операторов из приложения В дает

$$s_{11}^z = \cos 2\alpha_1, \quad s_{11}^x = 0. \quad (42)$$

Поскольку  $s_{11}^x = 0$  и  $\theta_F - \theta_G = \pi$ , то из уравнений (25) для углов  $\theta_F$  и  $\theta_G$  находим условие

$$s_{11}^z = h/I_0, \quad (43)$$

которому должен удовлетворять элемент  $s_{11}^z$  на границе раздела  $\bar{Y}$ - и  $W$ -фаз. Уравнение, описывающее границу этих фаз, нетрудно получить из условия совместности трех уравнений для угла  $\alpha_1$  и матричный элемент  $s_{11}^z$  в формулах (41), (42) и (43). В результате получается следующая связь между параметрами модели и магнитным полем:

$$D = \frac{2g_L}{g} \sqrt{I_0^2 - h^2}. \quad (44)$$

Это выражение описывает аналитически штриховую линию на рис. 4.

Важно отметить, что в точках фазовой диаграммы, лежащих на этой штриховой линии, ориентация (антипараллельных) векторов  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$  относительно оси  $z$  не фиксирована. Последнее обстоятельство означает вырождение основного состояния  $SU3F$  относительно одновременного вращения спинов из  $F$ - и  $G$ -подрешеток вокруг оси  $y$  при условии, что векторы  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$  остаются антипараллельными.

Действительно, подставляя решения (41) для углов  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в формулы (22) и (23), а также фиксируя в выражении (10) разницу в  $\pi$  между углами  $\theta_F$  и  $\theta_G$ , получаем

$$\epsilon_1 = D/2 - \sqrt{h_L^2 + (D/2)^2}, \quad E_0 = -J_0 S^2 N.$$

Следовательно, в точках фазовой диаграммы, лежащих строго на границе  $\bar{Y}$ - и  $W$ -фаз (т. е. на штриховой линии на рис. 4), энергия основного состояния  $E_{MF} = E_0 + N\epsilon_1$  (см. (26)) не зависит от углов  $\theta_F$  и  $\theta_G$ .

Физическая причина такого поведения обусловлена тем, что при  $\theta_F - \theta_G = \pi$  два эффективных поля, действующих на спины из  $L$ -подрешетки со стороны  $F$ - и  $G$ -подсистем, компенсируют друг друга

(см. формулу (12)). В результате  $L$ -подрешетка перестает «чувствовать» как  $F$ -, так и  $G$ -подсистемы. При этом внешнее магнитное поле  $h_L$  продолжает действовать на  $L$ -подсистему, ориентируя вектор  $\mathbf{R}_L$  вдоль направления  $\mathbf{h}_L$ .

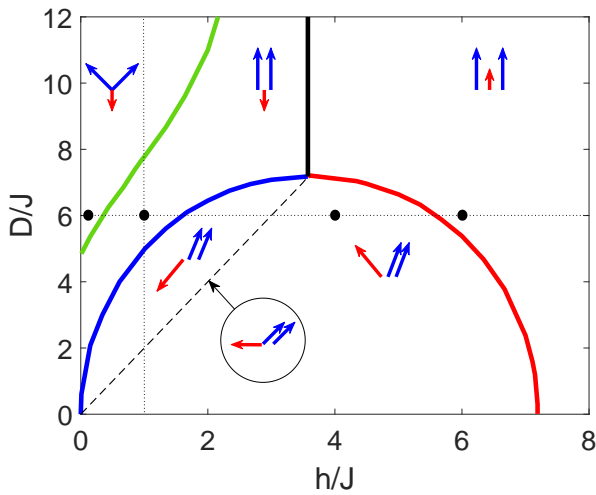
Одновременно с этим  $F$ - и  $G$ -подрешетки перестают «чувствовать»  $L$ -подсистему, поскольку создаваемые ею эффективные поля в  $F$ - и  $G$ -подрешетках полностью компенсируются внешним магнитным полем  $h$ . Действительно, как следует, например, из выражения (7), величины  $E_a$  и  $E_b$  (см. обозначения (32)) являются теми самыми эффективными полями, которые действуют на спины соответственно из  $F$ - и  $G$ -подрешеток. Поскольку в точках, лежащих на штриховой линии фазовой диаграммы рис. 4, выполняются соотношения (42) и (43), то указанные выше вклады в эффективные поля  $E_a$  и  $E_b$  от  $L$ -подсистемы ( $-I_0 s_{11}^z \cos \theta_{F(G)}$ ) и от внешнего магнитного поля ( $h \cos \theta_{F(G)}$ ) взаимно сокращаются.

Таким образом, в точках, принадлежащих пунктирной линии на фазовой диаграмме на рис. 4,  $SU3F$  распадается на две эффективно невзаимодействующие подсистемы, одна из которых образована из спинов  $S = 1$  ( $L$ -подрешетка), а вторая — из спинов  $S = 1/2$  ( $F$ - и  $G$ -подрешетки). При этом спины  $S = 1$  ведут себя как парамагнетик во внешнем магнитном поле, поскольку они продолжают испытывать действие поля  $h_L$ , а взаимодействие между ними отсутствует. Спины  $S = 1/2$  ведут себя как двухподрешеточный ( $F$  и  $G$ ) коллинеарный антиферромагнетик в эффективном нулевом магнитном поле. Последнее обстоятельство, допускающее произвольную ориентацию вектора антиферромагнетизма в плоскости  $zx$ , обуславливает дополнительное вырождение основного состояния.

## 8. ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА $SU3F$ ПРИ $I/J > 1$

При  $I > J$  фазовая диаграмма  $SU3F$  в магнитном поле качественно меняется. На рис. 7 представлена фазовая диаграмма, рассчитанная при соотношении обменных параметров  $I/J = 1.2$ . Видно, что в этом случае реализуются четыре магнитные фазы:  $Y$ -фаза, коллинеарная ферримагнитная фаза,  $V(\bar{V})$ -фаза, ферромагнитная фаза.

В  $Y$ -фазе вектор  $\mathbf{R}_L$  среднего значения спина в  $L$ -подрешетке (красная стрелка на пиктограммах рис. 7) направлен против магнитного поля (оси  $z$ ), а векторы  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$  среднего спина в  $F$ -



**Рис. 7.** Фазовая диаграмма основного состояния SU3F при  $I/J = 1.2$ . Зеленая линия обозначает границу раздела между  $Y$ -фазой и коллинеарной ферримагнитной фазой, синяя линия — между коллинеарной ферримагнитной и  $\bar{V}$ -фазой, черная линия — между ферромагнитной и коллинеарной ферримагнитной фазами, красная линия — между ферромагнитной и  $V$ -фазами, штриховая линия — между  $\bar{V}$ - и  $V$ -фазами (на этой линии  $\theta_L = -\pi/2$ )

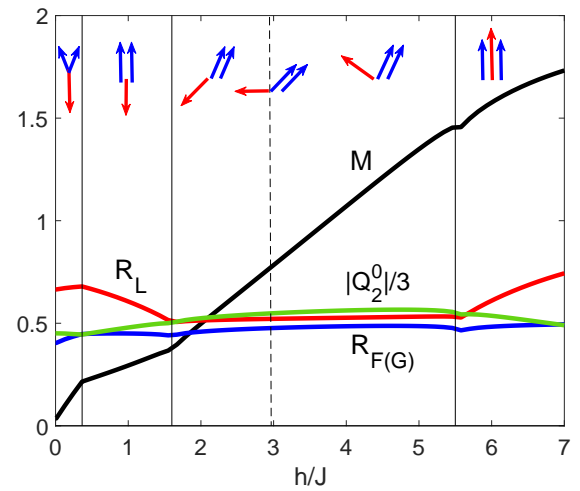
и  $G$ -подрешетках (синие стрелки) составляют одинаковые по модулю, но противоположные по знаку углы с осью  $z$ :  $\theta_F = -\theta_G$ . При этом  $|\theta_{F(G)}| \in [0, \pi/2]$ .

При переходе из  $Y$ -фазы в коллинеарную ферримагнитную углы  $\theta_F$  и  $\theta_G$  одновременно обращаются в нуль и все три вектора  $\mathbf{R}_F$ ,  $\mathbf{R}_G$  и  $\mathbf{R}_L$  оказываются коллинеарны: первые два направлены по полю, а третий — против.

В области под синей и красной кривыми на рис. 7 реализуется так называемая  $V$ -фаза, в которой вектор  $\mathbf{R}_L$  составляет с осью  $z$  ненулевой угол  $\theta_L$ , а векторы  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$  — равные друг другу углы  $\theta_F$  и  $\theta_G$ . Последние принимают значения в интервале  $(0, \pi/2)$ . Данную область можно разделить прямой линией (штриховой на рис. 7) на две подобласти. Справа от этой линии угол  $|\theta_L| < \pi/2$ , а слева угол  $|\theta_L| > \pi/2$ . За первой областью оставим обозначение  $V$ -фаза, а вторую, чтобы отличать от первой, обозначим  $\bar{V}$ -фазой. Во всех точках штриховой линии угол  $\theta_L$  строго равен  $\pi/2$ .

В ферромагнитной фазе все три вектора  $\mathbf{R}_F$ ,  $\mathbf{R}_G$  и  $\mathbf{R}_L$  ориентированы вдоль магнитного поля.

Как и в предыдущем разделе, для понимания магнитной структуры рассмотрим изменения параметров порядка при движении по двум направлениям на фазовой диаграмме: вдоль горизонталь-



**Рис. 8.** Зависимости величин  $R_L$  (красная линия),  $R_{F(G)}$  (синяя линия),  $M$  (черная линия) и  $|Q_2^0|$  (зеленая линия) от напряженности внешнего магнитного поля  $h$  при  $I/J = 1.2$  и  $D/J = 6$

ной пунктирной линии при фиксированном значении  $D/J = 6$  и вдоль вертикальной пунктирной линии при значении поля  $h/J = 1$  (см. рис. 7).

На рис. 8 представлены зависимости величин  $R_L$ ,  $R_{F(G)}$ ,  $M$  и  $Q_2^0$  от внешнего магнитного поля  $h$  при  $D/J = 6$ . Это отвечает движению по горизонтальной пунктирной линии на рис. 7. Видно, что изменения  $R_{F(G)}$  и  $Q_2^0$  при увеличении поля  $h$  на указанном интервале незначительны, причем сокращение среднего значения спина  $R_{F(G)}$  из-за АФ невелико. Средний момент  $L$ -подрешетки, напротив, подавлен существенно как за счет АФ, так и ОА. В ферримагнитной фазе вектор  $\mathbf{R}_L$  направлен против поля, и величина  $R_L$  ожидаемо уменьшается с увеличением  $h$ . В ферромагнитной фазе вектор  $\mathbf{R}_L$  направлен по полю, и величина  $R_L$  — увеличивается.

Важный факт, который демонстрируют графики на рис. 8, состоит в том, что эволюция магнитной структуры происходит в той же последовательности, что и для антиферромагнетика на треугольной решетке (АФМТР) с  $S = 1/2$ , но без ОА [38, 43]. При этом если в АФМТР существование протяженной ферримагнитной (или *шуд*) фазы может быть описано только при учете квантовых флуктуаций (снимающих случайное вырождение), то в SU3F эта фаза возникает исключительно за счет ОА. Кроме того, поведение полного момента  $M$  качественно воспроизводит основные этапы эволюции  $M$  в АФМТР: монотонное возрастание  $M$  в  $Y$ -,  $\bar{V}$ - и  $V$ -фазах; поло-

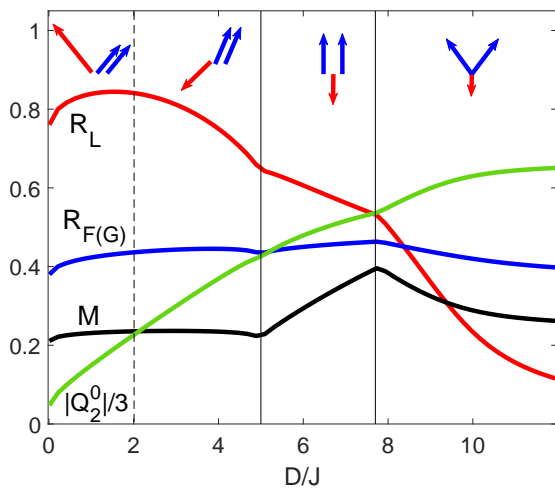


Рис. 9. Зависимости величин  $R_L$  (красная линия),  $R_{F(G)}$  (синяя линия),  $M$  (черная линия) и  $|Q_2^0|$  (зеленая линия) от параметра  $D$  для  $I/J = 1.2$  и при  $h/J = 1$

гий участок в ферримагнитной ( $uud$ ) фазе (то, что в АФМТР принято называть  $1/3$ -плато намагниченности); и область насыщения  $M$  в ферромагнитной фазе которое, однако, вследствие учета ОА слабо выражено.

Отметим также, что при увеличении параметра ОА интервал существования  $\bar{V}$ - и  $V$ -фаз на рис. 8 сжимается и, как следует из фазовой диаграммы на рис. 7, при  $D/J \gtrsim 7$  этот интервал схлопывается в точку.

На рис. 9 представлена зависимость величин  $R_L$ ,  $R_{F(G)}$ ,  $M$  и  $|Q_2^0|$  от параметра анизотропии  $D$  при  $I/J = 1.2$  и величине магнитного поля  $h/J = 1$ . Эти зависимости строятся при движении вдоль вертикальной пунктирной линии на рис. 7. Видно, что квадрупольный момент при увеличении  $h$  ожидается возрастает, в то время как спиновый момент  $R_L$  из  $L$ -подрешетки после небольшого увеличения в области малых полей далее монотонно уменьшается. Спиновые моменты  $R_{F(G)}$  из  $F$ - и  $G$ -подрешеток не меняют существенно своих значений на всем интервале изменения  $D$ . Поэтому заметное увеличение полного момента  $M$  в ферримагнитной фазе связано не с изменением ориентации моментов или абсолютных значений  $R_{F(G)}$ , а именно с уменьшением величины  $R_L$  за счет ОА. При переходе в  $Y$ -фазу полный момент  $M$  начинает уменьшаться, поскольку поворот векторов  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$  вокруг оси  $y$  уменьшает их проекцию на ось  $z$ .

Три вертикальные линии на рис. 9 разделяют четыре описанные выше фазы. При переходе из  $V$ -фазы в ферримагнитную и из ферримагнитной в  $Y$ -фазу все зависимости параметров порядка испытывают излом. В то же время переход из  $V$ -фазы в  $\bar{V}$ -фазу не сопровождается никакими аномалиями в представленных зависимостях.

## 9. ВЫРОЖДЕНИЕ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ $I = J$

Случай  $I = J$  является особым, поскольку классический аналог гамильтониана  $SU(3F)$ , как мы сейчас покажем, имеет непрерывное случайное вырождение.

Действительно, определим зависящий от параметра  $\lambda$  гамильтониан:

$$\mathcal{H}_\lambda = J \sum_{\{fg\}} \mathbf{S}_f \mathbf{S}_g + \lambda J \sum_{\{fl\}} \mathbf{S}_f \mathbf{S}_l + \lambda J \sum_{\{gl\}} \mathbf{S}_g \mathbf{S}_l + D \sum_l (S_l^y)^2 - \mathbf{h} \left( \sum_f \mathbf{S}_f + \sum_g \mathbf{S}_g + \lambda \sum_l \mathbf{S}_l \right), \quad (45)$$

где направление магнитного поля  $\mathbf{h} = g\mu_B \mathbf{H}$  в общем случае произвольно. Все обозначения в формуле (45) такие же, как и в гамильтониане (1). Видно, что если для  $\lambda$  удовлетворяются сразу два условия:  $\lambda = I/J = g_L/g$  и поле  $\mathbf{h}$  направлено вдоль оси  $z$ , то гамильтониан (45) совпадает с оператором  $\mathcal{H}$ , определенным формулой (1).

С другой стороны, нетрудно проверить, что гамильтониан (45) с точностью до константы

$$-JN \left( \frac{3}{2} \lambda^2 S_L (S_L + 1) + \frac{9}{4} + \frac{h^2}{6J^2} \right), \quad S_L = 1, \quad (46)$$

может быть представлен в виде

$$\mathcal{H}_\lambda = D \sum_l (S_l^y)^2 + \frac{J}{4} \sum_p \left( \mathbf{S}_{pF} + \mathbf{S}_{pG} + \lambda \mathbf{S}_{pL} - \frac{\mathbf{h}}{3J} \right)^2, \quad (47)$$

где сумма по  $p$  обозначает суммирование по треугольным плакетам, а нижние индексы  $F$ ,  $G$  и  $L$  у спиновых операторов указывают на их принадлежность к соответствующей подрешетке в  $p$ -ом плакете.

Таким образом, если для параметров  $SU(3F)$  выполняется соотношение

$$\frac{I}{J} = \frac{g_L}{g}, \quad (48)$$



то гамильтониан SU3F в выражении (1) может быть представлен в виде (47) с  $\mathbf{h}$ , направленным вдоль оси  $z$ .

Если теперь вместо операторов спина в (47) рассмотреть классические моменты, т. е. обычные векторы фиксированной длины, то, как нетрудно заметить, минимальное значение гамильтониана (47) будет достигаться при равенстве нулю обоих его слагаемых. Обращение в нуль первого слагаемого означает, что спины  $L$ -подрешетки лежат в плоскости легкого намагничивания  $zx$ . Требование обращения в нуль второго слагаемого в (47) сводится к уравнению

$$\mathbf{S}_{pF} + \mathbf{S}_{pG} + \lambda \mathbf{S}_{pL} - \frac{\mathbf{h}}{3J} = 0. \quad (49)$$

Очевидно, что в определенном интервале значений магнитных полей  $h$  это уравнение может быть удовлетворено бесконечным множеством решений, т. е. ориентаций трех векторов  $\mathbf{R}_L$ ,  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$ , даже в том случае, когда поле  $\mathbf{h}$  не лежит в плоскости  $zx$ . Кроме того, если направление магнитного поля параллельно плоскости  $zx$  (как в рассматриваемом нами случае), то ориентация векторов  $\mathbf{R}_L$ ,  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$ , реализующая минимум гамильтониана (47), может и не быть компланарна с плоскостью  $zx$ .

Проведенный анализ классического предела гамильтониана (47) позволяет предположить, что отмеченное (непрерывное) вырождение основного состояния SU3F будет иметь место и в квантовом случае при выполнении соотношения (48). Выполненные нами расчеты в приближении среднего поля при  $I = J$  и  $g_L = g$  показали, что это действительно так.

Аналогичное рассмотренному вырождение имеет место и в других квантовых магнетиках, например, в АФМТР с  $S = 1/2$  [43]. Как было впервые показано в работе [38], указанное вырождение может быть снято при учете нулевых квантовых колебаний. Такой подход требует учета более высоких порядков (по сравнению с гармоническим приближением, использованным в данной работе) при бозонизации спиновых операторов в рамках представления Гольштейна–Примакова для  $F$ - и  $G$ -подсистем и в формализме индефинитной метрики для  $L$ -подсистемы.

По этой причине построение фазовой диаграммы SU3F при критических параметрах, удовлетворяющих соотношению (48), будет проведено авторами в рамках отдельного исследования.

## 10. СПИН-ВОЛНОВЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В SU3F В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Спектральные свойства SU3F в нулевом магнитном поле были подробно исследованы в работе авторов [31]. В данном разделе мы проведем анализ изменений спектра в ненулевом магнитном поле при фиксированном значении параметра ОА. Четыре дисперсионные кривые  $\varepsilon_{jk}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) рассчитывались для каждого набора параметров модели на основе уравнения (33), полученного в разд. 6.

На рис. 10 представлены результаты численных расчетов дисперсионных кривых для четырех значений магнитного поля при параметрах модели  $I/J = 0.8$  и  $D/J = 3$ . На фазовой диаграмме на рис. 4 указанным четырьмя значениями поля  $h$  отвечают четыре черные точки, лежащие на горизонтальной пунктирной прямой. Видно, что при  $h/J = 1$  реализуется  $\bar{Y}$ -фаза; при  $h/J = 1.87$  — антипараллельная фаза для  $F$ - и  $G$ -подрешеток; при  $h/J = 3$  —  $W$ -фаза; и при  $h/J = 5.5$  — ферромагнитная фаза. На каждом из четырех графиков рис. 10 имеются четыре дисперсионные кривые в соответствии с четырьмя типами введенных бозонов. Но только в отношении одной кривой (черной на всех графиках) можно утверждать, что ее природа почти полностью определяется высокоэнергетическими  $d$ -бозонами; остальные три ветви в той или иной степени формируются с учетом гибридизации состояний  $a$ -,  $b$ - и  $c$ -бозонов.

Важное наблюдение состоит в том, что на трех первых графиках,  $a$ ,  $b$  и  $c$ , имеется как минимум одна голдстоуновская мода (синие кривые), связанная с нарушением симметрии основного состояния относительно вращения спинов  $F$ - и  $G$ -подрешеток на один и тот же угол относительно направления магнитного поля. В ферромагнитной фазе (рис. 10  $d$ ) основное состояние не нарушает указанную симметрию и соответственно голдстоуновская (безщелевая) мода отсутствует.

Кроме того, на рис. 10  $b$  голдстоуновских мод две (совпадающие синяя и красная кривые). Происхождение второй моды связано с обсуждавшейся в конце разд. 7 особенностью точек фазовой диаграммы, лежащих на штриховой кривой (см. рис. 4). В этом случае моменты  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$  лежат в плоскости  $zx$  вдоль одной линии и противоположно направлены, а энергия системы оказывается вырождена относительно вращения линии векторов  $\mathbf{R}_F$  и  $\mathbf{R}_G$  вокруг оси  $y$ .

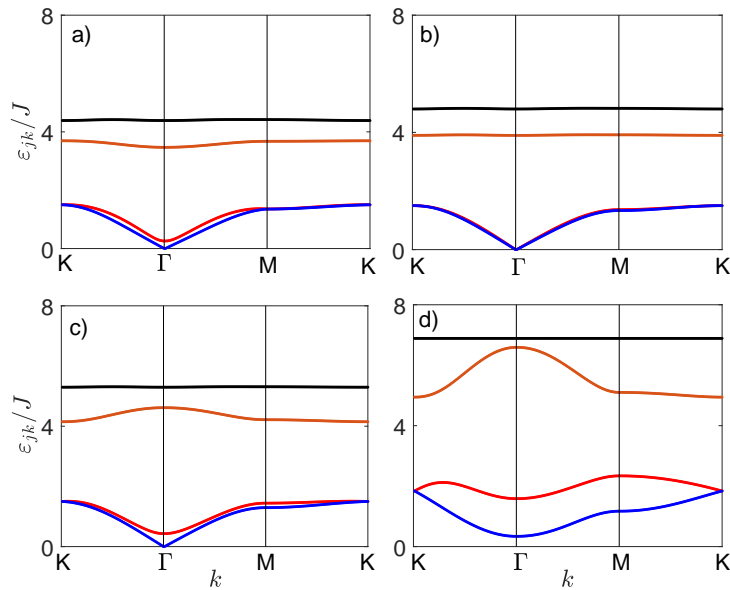


Рис. 10. Спектры спин-волновых возбуждений при  $I/J = 0.8$ ,  $D/J = 3$  и при четырех значениях напряженности внешнего магнитного поля:  $h/J = 1$  (a), 1.87 (b), 3 (c), 5.5 (d). Вектор  $k$  пробегает по треугольнику  $\Gamma KM$  в зоне Бриллюэна (см. рис. 3)

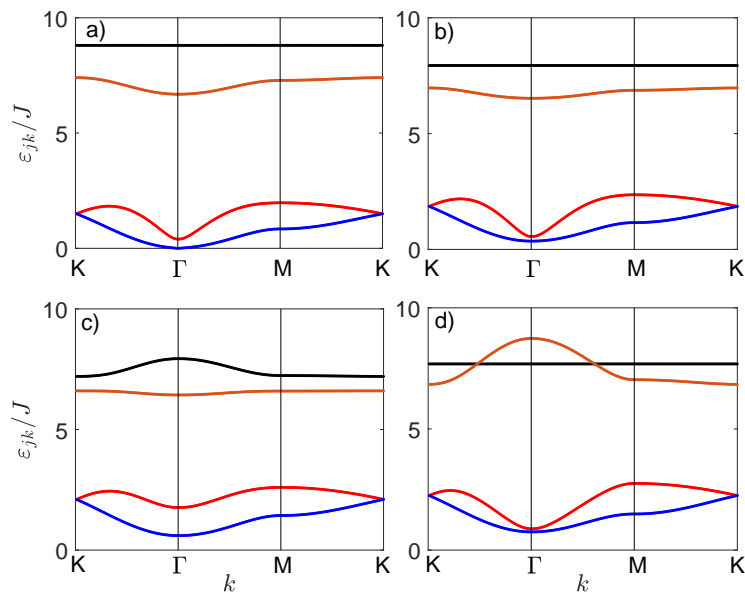


Рис. 11. Спектры спин-волновых возбуждений при  $I/J = 1.2$ ,  $D/J = 6$  и при четырех значениях напряженности внешнего магнитного поля:  $h/J = 0.3$  (a), 1 (b), 4 (c), 6 (d). Вектор  $k$  пробегает по треугольнику  $\Gamma KM$  в зоне Бриллюэна (см. рис. 3)

Как отмечалось в разд. 7, такое поведение связано с обращением эффективных полей в нуль и фактической независимостью  $L$ -подсистемы от  $F$ - и  $G$ -подсистем. В такой ситуации узлы  $L$ -подрешетки оказываются эффективно изолированными (в том числе друг от друга), чем, в частности, и объясняется бездисперсность двух высокоэнергетических ветвей (черной и коричневой) на рис. 10 *b*.

На рис. 11 представлены графики дисперсионных зависимостей  $\varepsilon_{jk}$ , рассчитанные при следующих параметрах модели:  $I/J = 1.2$ ,  $D/J = 6$  для четырех значений внешнего магнитного поля:  $h/J = 0.3, 1, 4$  и  $6$ . На фазовой диаграмме на рис. 7 указанным четырем значениям поля  $h$  отвечают четыре черные точки, лежащие на горизонтальной пунктирной прямой. При увеличении магнитного поля  $h$  в указанных точках фазовой диаграммы последовательно реализуются четыре фазы:  $\bar{Y}$ -фаза при  $h/J = 0.3$ ; ферромагнитная — при  $h/J = 1$ ;  $V$ -фаза при  $h/J = 4.3$ ; ферромагнитная — при  $h/J = 6$ .

Из графиков, представленных на рис. 11 следует, что голдстоуновская мода реализуется только в первом случае (рис. 11 *a*), поскольку нарушение симметрии основного состояния (относительно вращений вокруг оси  $z$ ) имеет место только в  $\bar{Y}$ -фазе. Во всех других областях фазовой диаграммы на рис. 7 спектр возбуждения спиновых волн всегда щелевой.

## 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным итогом проведенного исследования является построение фазовой диаграммы  $SU(3)$ -ферромагнетика на треугольной решетке в координатах магнитное поле  $h$  (лежащее в плоскости легкого намагничивания)–параметр одноионной анизотропии  $D$  при нулевой температуре. Среди характерных особенностей модели рассмотренного  $SU(3F)$  выделим следующие три: 1) разная величина спина в магнитных подрешетках — в двух подрешетках ( $F$  и  $G$ ) спины  $S = 1/2$ , в третьей  $L$ -подрешетке  $S = 1$ ; 2) наличие одноионной анизотропии типа легкая плоскость на узлах  $L$ -подрешетки со спинами  $S = 1$ ; 3) разные значения обменных интегралов между спинами из  $F$ - и  $G$ - подрешеток ( $J$ ) и между спинами из  $L$ - и  $F(G)$ -подрешеток ( $I$ ).

Результаты численных расчетов в приближении среднего поля показали, что в зависимости от соотношения между обменными интегралами  $I$  и  $J$  имеются два типа фазовой диаграммы  $SU(3F)$ , качествен-

но различающихся как по количеству реализующихся фаз, так и по типу их магнитной структуры.

При  $I < J$  основное состояние  $SU(3F)$  в разных областях фазовой диаграммы может быть охарактеризовано тремя магнитными конфигурациями:  $\bar{Y}$ ,  $W$  и ферромагнитной (см. рис. 4). При этом в точках, лежащих на границе между  $\bar{Y}$ - и  $W$ -фазами (штриховая линия на рис. 4), реализуются состояния, в которых  $SU(3F)$  можно представить в виде двух не связанных между собой магнитных подсистем. Одна из этих подсистем состоит из спинов  $S = 1$  на треугольной решетке и ведет себя как парамагнетик. Вторая подсистема состоит из спинов  $S = 1/2$ , образующих плоскую гексагональную решетку и находящихся в фазе двухподрешеточного коллинеарного антиферромагнетика в эффективном нулевом магнитном поле. Последнее обстоятельство приводит к дополнительному вырождению основного состояния относительно вращения вектора антиферромагнетизма в плоскости легкого намагничивания и проявляется в виде дополнительной голдстоуновской моды в спектре спин-волновых возбуждений.

При обратном соотношении между обменными интегралами ( $I > J$ ) фазовая  $h$ - $D$ -диаграмма  $SU(3F)$  качественно модифицируется. Теперь на ней можно выделить уже четыре области, различающиеся типом магнитной структуры основного состояния, а именно:  $Y$ -фазу, две коллинеарные ферри- и ферромагнитные фазы и  $V$ -фазу. При этом последнюю можно разделить еще на две фазы  $\bar{V}$  и  $V$  в зависимости от того, превышает угол  $\theta_L$  величину  $\pi/2$  или нет.

Для случаев  $I < J$  и  $I > J$  проанализированы зависимости квадрупольного и дипольных параметров порядка как от магнитного поля при фиксированном значении  $OA$ , так и от параметра  $OA$  при фиксированном значении  $h$ . Важным результатом этой части исследования следует считать зависимость полного момента  $M$  от внешнего магнитного поля, которая при  $I > J$  и определенном конечном значении параметра  $OA$  качественно воспроизводит аналогичную зависимость, наблюдаемую в хорошо известных квантовых антиферромагнетиках на треугольной решетке с одинаковым значением спина  $S = 1/2$  для всех подрешеток и без  $OA$  [38, 43]. В частности, на определенном интервале магнитного поля в зависимости  $M(h)$  имеется плато намагниченности (имеющее, однако, в нашем случае небольшой наклон), которое в АФМТР возникает за счет квантовых антиферромагнитных флуктуаций, а в  $SU(3F)$  за счет  $OA$ .

Важно отметить, что качественное различие двух фазовых диаграмм при  $I < J$  и при  $I > J$  таково, что при  $I \rightarrow J$  непрерывная трансформация одной диаграммы в другую не имеет места. Дело в том, что при равенстве обменных интегралов ( $I = J$ ) возникает случайное вырождение, приводящее при среднеполевом рассмотрении к неопределенности магнитной конфигурации при заданных значениях магнитного поля и ОА. Наше предположение состоит в том, что, как и в случае АФМТР, учет квантовых флуктуаций должен снять отмеченное случайное вырождение (как, возможно, и отмечавшееся выше дополнительное вырождение при  $I < J$ ). Однако эта задача является предметом отдельного исследования.

Завершая обсуждение полученных в работе результатов, еще раз отметим, что в рассмотренном нами случае магнитное поле  $\mathbf{h}$ , приложенное к квантовому  $SU(3)$ , ориентировано в плоскости легкого намагничивания. При ориентации магнитного поля вдоль нормали к этой плоскости поведение параметров порядка квантового магнетика может быть качественно иным.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность профессору В.В. Валькову за помощь в постановке задачи исследования, полезные советы и стимулирующее обсуждение полученных результатов.

**Финансирование.** Исследование выполнено в рамках научной тематики госзадания ИФ СО РАН.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А. УНИТАРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ ХАББАРДА

В результате унитарных преобразований операторов Хаббарда по формуле (20) с унитарным оператором  $U_{\tilde{n}\tilde{m}}(\alpha)$  ( $n \neq m$ ), определенным формулой (17), получают следующие выражения [40]:

$$\begin{aligned} X^{nn} &= \cos^2 \alpha X^{\tilde{n}\tilde{n}} + \sin^2 \alpha X^{\tilde{m}\tilde{m}} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin 2\alpha (X^{\tilde{n}\tilde{m}} + X^{\tilde{m}\tilde{n}}), \\ X^{mm} &= \cos^2 \alpha X^{\tilde{m}\tilde{m}} + \sin^2 \alpha X^{\tilde{n}\tilde{n}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin 2\alpha (X^{\tilde{n}\tilde{m}} + X^{\tilde{m}\tilde{n}}), \\ X^{nm} &= \cos^2 \alpha X^{\tilde{n}\tilde{m}} - \sin^2 \alpha X^{\tilde{m}\tilde{n}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin 2\alpha (X^{\tilde{n}\tilde{n}} - X^{\tilde{m}\tilde{m}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{mn} &= \cos^2 \alpha X^{\tilde{m}\tilde{n}} - \sin^2 \alpha X^{\tilde{n}\tilde{m}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin 2\alpha (X^{\tilde{n}\tilde{n}} - X^{\tilde{m}\tilde{m}}), \\ X^{np} &= \cos \alpha X^{\tilde{n}\tilde{p}} - \sin \alpha X^{\tilde{m}\tilde{p}}, \\ X^{pn} &= \cos \alpha X^{\tilde{p}\tilde{n}} - \sin \alpha X^{\tilde{p}\tilde{m}}, \\ X^{pm} &= \cos \alpha X^{\tilde{p}\tilde{m}} + \sin \alpha X^{\tilde{p}\tilde{n}}, \\ X^{mp} &= \cos \alpha X^{\tilde{m}\tilde{p}} + \sin \alpha X^{\tilde{n}\tilde{p}}, \\ X^{pq} &= X^{\tilde{p}\tilde{q}}, \end{aligned}$$

в которых все четыре индекса состояний  $p, q, n$  и  $m$  разные, а индексы узлов опущены. В основном тексте для индексов трехкратно преобразованных операторов Хаббарда знак тильды, обозначающий новые (преобразованные) состояния, для краткости не используется.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ В. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СПИНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

В данном приложении представлен явный вид матричных элементов  $s_{nm}^\alpha \equiv \langle n | S_l^\alpha | m \rangle$  ( $\alpha = \{x, y, z\}$  и  $n, m = \{\bar{1}, 0, 1\}$ ), использованных в разложении (27). Эти элементы получены в результате трех последовательных преобразований операторов Хаббарда с помощью трех унитарных операторов,  $U_{1-1}(-\alpha_1)$ ,  $U_{0-1}(-\alpha_3)$  и  $U_{10}(-\alpha_2)$ , и последующей подстановке результата преобразования в представление (15) для спиновых операторов  $L$ -подрешетки.

Матричные элементы в разложении для оператора  $S_l^z$ :

$$\begin{aligned} s_{11}^z &= (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3)^2 - \\ &\quad - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_3, \\ s_{\bar{1}\bar{1}}^z &= (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)^2 - \\ &\quad - \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_3, \\ s_{00}^z &= \sin^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3 - \sin^2 \alpha_3, \\ s_{10}^z = s_{01}^z &= -\frac{1}{2} \sin \alpha_1 (1 + \sin^2 \alpha_2) \sin 2\alpha_3 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos \alpha_1 \sin(2\alpha_2) \cos \alpha_3, \\ s_{\bar{1}0}^z = s_{0\bar{1}}^z &= -\frac{1}{2} \cos \alpha_1 (1 + \sin^2 \alpha_2) \sin 2\alpha_3 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \alpha_1 \sin(2\alpha_2) \cos \alpha_3, \end{aligned}$$

$$s_{11}^z = s_{1\bar{1}}^z = \frac{1}{2} \cos 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 \sin \alpha_3 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 (\sin^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_3 - \cos^2 \alpha_3 - \cos^2 \alpha_2).$$

Для оператора  $S_l^x$ :

$$s_{11}^x = \sqrt{2}(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \cos \alpha_2)(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3),$$

$$s_{1\bar{1}}^x = \sqrt{2}(\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_3 \cos \alpha_2)(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_3 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_3),$$

$$s_{00}^x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \alpha_2 \sin 2\alpha_3 - \sin 2\alpha_2 \cos^2 \alpha_3),$$

$$s_{11}^x = \frac{\cos 2\alpha_1}{\sqrt{2}}(\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_3 \cos 2\alpha_2) - \frac{\sin 2\alpha_1}{2\sqrt{2}}(\cos \alpha_2 \sin 2\alpha_3 + \sin 2\alpha_2(1 + \sin^2 \alpha_3)),$$

$$s_{10}^x = \frac{\cos \alpha_1}{\sqrt{2}}(\cos 2\alpha_2 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) + \frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{2}}(\cos \alpha_2 \cos 2\alpha_3 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_2 \sin 2\alpha_3),$$

$$s_{1\bar{0}}^x = -\frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{2}}(\cos 2\alpha_2 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) + \frac{\cos \alpha_1}{\sqrt{2}}(\cos \alpha_2 \cos 2\alpha_3 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_2 \sin 2\alpha_3),$$

$$s_{11}^x = s_{1\bar{1}}^x, \quad s_{10}^x = s_{01}^x, \quad s_{1\bar{0}}^x = s_{0\bar{1}}^x.$$

Для оператора  $S_l^y$ :

$$s_{11}^y = s_{1\bar{1}}^y = s_{00}^y = 0,$$

$$s_{01}^y = \frac{i}{\sqrt{2}}(-\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1(\cos \alpha_3 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_3)),$$

$$s_{1\bar{0}}^y = \frac{i}{\sqrt{2}}(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1(\cos \alpha_3 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_3)),$$

$$s_{11}^y = \frac{i}{\sqrt{2}}(\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_3),$$

$$s_{1\bar{1}}^y = -s_{11}^y, \quad s_{10}^y = -s_{01}^y, \quad s_{1\bar{0}}^y = -s_{0\bar{1}}^y.$$

Для оператора  $(S_l^y)^2$ :

$$\langle 1|(S_l^y)^2|1\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha_1 (\cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_3 - \sin \alpha_2 \sin 2\alpha_3) - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \cos \alpha_2 (\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \cos \alpha_3),$$

$$\langle \bar{1}|(S_l^y)^2|\bar{1}\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha_1 (\cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_3 - \sin \alpha_2 \sin 2\alpha_3) + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \cos \alpha_2 (\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \cos \alpha_3),$$

$$\langle 0|(S_l^y)^2|0\rangle = \frac{1}{2}(\sin \alpha_2 \sin 2\alpha_3 + 1 + \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3),$$

$$\langle \bar{1}|(S_l^y)^2|1\rangle = \frac{1}{4}(\cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_3 - \sin \alpha_2 \sin 2\alpha_3 - \sin^2 \alpha_2) \sin 2\alpha_1 - \frac{1}{2} \cos 2\alpha_1 \cos \alpha_2 (\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \cos \alpha_3),$$

$$\langle \bar{1}|(S_l^y)^2|0\rangle = \frac{1}{2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 (\sin \alpha_3 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) + \frac{1}{2} \cos \alpha_1 \left( \sin \alpha_2 \cos 2\alpha_3 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha_2 \sin(2\alpha_3) \right),$$

$$\langle 1|(S_l^y)^2|0\rangle = \frac{1}{2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 (\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_3) + \frac{1}{2} \sin \alpha_1 \left( \sin \alpha_2 \cos 2\alpha_3 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha_2 \sin(2\alpha_3) \right),$$

$$\langle 1|(S_l^y)^2|\bar{1}\rangle = \langle \bar{1}|(S_l^y)^2|1\rangle, \quad \langle 0|(S_l^y)^2|\bar{1}\rangle = \langle \bar{1}|(S_l^y)^2|0\rangle, \quad \langle 0|(S_l^y)^2|1\rangle = \langle 1|(S_l^y)^2|0\rangle.$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ С. БОЗОНИЗАЦИЯ СПИНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ $S = 1$

Используя представление (28) в формулах (27) и оставляя только слагаемые не выше второго порядка по бозе-операторам, получаем следующее представление спиновых операторов через бозевские:



$$\begin{aligned}
S_l^x &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(s_{0,1}^x(c_l^+ + c_l) + s_{1,1}^x(d_l^+ + d_l)) + \\
&+ s_{1,0}^x(d_l^+ c_l + c_l^+ d_l) + s_{1,1}^x + (s_{0,0}^x - s_{1,1}^x)c_l^+ c_l + \\
&+ (s_{1,1}^x - s_{1,1}^x)d_l^+ d_l], \\
S_l^y &= \frac{i}{\sqrt{2}}[s_{0,1}^y(c_l^+ - c_l) + s_{1,1}^y(d_l^+ - d_l) + \\
&+ s_{1,0}^y(d_l^+ c_l - c_l^+ d_l)], \\
S_l^z &= s_{0,1}^z(c_l^+ + c_l) + s_{1,1}^z(d_l^+ + d_l) + \\
&+ s_{1,0}^z(d_l^+ c_l + c_l^+ d_l) + s_{1,1}^z + (s_{0,0}^z - s_{1,1}^z)c_l^+ c_l + \\
&+ (s_{1,1}^z - s_{1,1}^z)d_l^+ d_l, \\
(S_l^y)^2 &= \frac{1}{2}[(s_{1,0}^y)^2 - (s_{1,1}^y)^2]c_l^+ c_l + \\
&+ ((s_{1,0}^y)^2 - (s_{0,1}^y)^2)d_l^+ d_l - \\
&- s_{1,0}^y s_{0,1}^y (d_l^+ + d_l) + s_{1,0}^y s_{1,1}^y (c_l^+ + c_l) + \\
&+ ((s_{0,1}^y)^2 + (s_{1,1}^y)^2) + s_{0,1}^y s_{1,1}^y (d_l^+ c_l + c_l^+ d_l)].
\end{aligned}$$

Приведенные выражения после усреднения и применения спектральной теоремы для вычисления средних от бозе-операторов использовались для получения формул, на основе которых рассчитывались параметры порядка  $R_L$ ,  $M$  и  $Q_2^0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. Barbara, Y. Imry, G. Sawatzky, and P. C. E. Stamp, *Quantum Magnetism*, NATO Science for Peace and Security, Series B: Physics and Biophysics, Springer (2008).
2. *Introduction to Frustrated Magnetism*, Springer Series in Solid-State Sciences, ed. by C. Lacroix, P. Mendels, and F. Mila, Springer (2011).
3. A. Auerbach, *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*, Springer-Verlag, New York, Inc. (1994).
4. В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, *Операторы Хаббарда и спин-волновая теория гейзенберговских магнетиков с произвольным спином*, ТМФ **50**, 466 (1982).
5. H. H. Chen and P. M. Levy, *Quadrupole Phase Transitions in Magnetic Solids*, Phys. Rev. Lett. **27**, 1383 (1971).
6. V. M. Matveev, *Quantum Quadrupolar Magnetism and Phase Transitions in the Presence of Biquadratic Exchange*, JETP **38**, 813 (1973).
7. M. P. Kashchenko, N. F. Balakhonov, and L. V. Kurbatov, *Spin Waves in an Heisenberg Ferromagnetic Substance with Single-Ion Anisotropy*, JETP **37**, 201 (1973).
8. V. M. Loktev and V. S. Ostrovskii, *Quantum Theory of Uniaxial Ferromagnetic in Transverse Magnetic Field*, Ukr. J. Phys. **23**, 1717 (1978).
9. F. P. Onufrieva, *Exact Solution of the One-Ion Problem for a Magnet with One-Ion Anisotropy in a Field of Arbitrary Direction*, JETP **53**, 1241 (1981).
10. A. F. Andreev and I. A. Grishchuk, *Spin Nematics*, JETP **60**, 267 (1984).
11. F. P. Onufrieva, *Low-Temperature Properties of Spin Systems with h Tensor Order Parameters*, JETP **62**, 1311 (1985).
12. N. Papanicolaou, *Unusual Phases in Quantum Spin-1 Systems*. Nucl. Phys. B **305**, 367 (1988).
13. A. V. Chubukov, *Fluctuations in Spin Nematics*, J. Phys.: Condens. Matter **2**, 1593 (1990).
14. V. V. Val'kov and T. A. Val'kova, *Application of an Indefinite Metric to Go Over to a Bose Description of  $Su(3)$  Hamiltonians: The Excitation Spectrum of Spin Nematics*, JETP **72**, 1053 (1991).
15. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and Ph. N. Klepets, *Spin Nematic and Orthogonal Nematic States in  $S=1$  Non-Heisenberg Magnet*, J. Magn. Magn. Mat. **325**, 125 (2013).
16. А. И. Смирнов, *Магнитный резонанс спинов в квантовых магнетиках*, УФН **186**, 633 (2016) [A. I. Smirnov, *Magnetic Resonance of Spinons in Quantum Magnets*, Physics Uspekhi **59**, 564 (2016)].
17. O. A. Kosmachev, Ya. Yu. Matyunina, and Yu. A. Fridman, *Dynamic and Static Properties of a Non-Heisenberg Ferrimagnet with Single-Ion Easy-Axis Anisotropy*, JETP **135**, 354 (2022).
18. H. F. Verona de Resende, F. C. SaBarreto, and J. A. Plascak, *Renormalization Group Treatment of the Mixed-Spin System in D-Dimensional Lattices*, Physica A **149**, 606 (1988).
19. G. M. Zhang and C. Z. Yang, *Monte-Carlo Study of the Two-Dimensional Quadratic Ising Ferromagnet with Spins  $S = 1/2$  and  $S = 1$  and with Crystal-Field Interactions*, Phys. Rev. B **48**, 9452 (1993).
20. A. Bobak and M. Jurcisin, *A Discussion of Critical Behaviour in a Mixed-Spin Ising Model*, Physica A **240**, 647 (1997).

21. G. M. Buendia and M. A. Novotny, *Numerical Study of a Mixed Ising Ferrimagnetic System*, J. Phys.: Condens. Matter **9**, 5951 (1997).
22. M. Godoy and W. Figueiredo, *Competing Dynamics in the Mixed-Spin Ising Model with Crystal-Field Interaction*, Physica A **339**, 392 (2004).
23. T. Iwashita and N. Uryu, *The Curie Temperature of the Two-Dimensional Quadratic Ising Ferromagnet with Mixed Spins of  $S = 1/2$  and  $S=1$* , J. Phys. Soc. Japan **53**, 721 (1984).
24. J. Oitmaa, *Ferrimagnetism and the Existence of Compensation Points in Layered Mixed Spin (1/2,1) Ising Models*, Phys. Rev. B **72**, 224404 (2005).
25. J. Oitmaa and I. G. Enting, *A Series Study of a Mixed-Spin  $S = (1/2, 1)$  Ferrimagnetic Ising Model*, J. Phys.: Condens. Matter **18**, 10931 (2006).
26. W. Selke and J. Oitmaa, *Monte Carlo Study of Mixed-Spin  $S = (1/2, 1)$  Ising Ferrimagnets*, J. Phys.: Condens. Matter **22**, 076004 (2010).
27. Ю. А. Фридман, О. А. Космачев, *Квантовые эффекты в анизотропном ферримagnetике*, ФТТ **51**, 1104 (2009).
28. M. Zukovic and A. Bobak, *Frustrated Mixed Spin-1/2 and Spin-1 Ising Ferrimagnets on a Triangular Lattice*, Phys. Rev. E **91**, 052138 (2015).
29. M. Zukovic and A. Bobak, *Mixed Spin-1/2 and Spin-1 Ising Ferromagnets on a Triangular Lattice*, Physica A **436** 509 (2015).
30. E. S. de Santana, A. S. de Arruda, and M. Godoy, *Random-Anisotropy Mixed-Spin Ising on a Triangular Lattice*, Condensed Matter Physics, **26**, 23601 (2023)
31. A. S. Martynov and D. M. Dzebisashvili, *Quantum  $Su(3)$ -Ferrimagnet on Triangular Lattice*, J. Magn. Magn. Mat. **584**, (2024) 171906.
32. B. A. Ivanov and A. K. Kolezhuk, *Effective Field Theory for the  $S=1$  Quantum Nematic*, Phys. Rev. B **68**, 052401 (2003).
33. A. Lauchli, F. Mila, and K. Penc, *Quadrupolar Phases of the  $S=1$  Bilinear-Biquadratic Heisenberg Model on the Triangular Lattice*, Phys. Rev. Lett. **97**, 087205 (2006).
34. В. В. Вальков, М. С. Шустин, *Квантовые ренормировки в анизотропных многоподрешеточных магнетиках и модификация магнитной восприимчивости при облучении*, ЖЭТФ **148**, 984 (2015) [V. V. Val'kov and M. S. Shustin, *Quantum Renormalizations in Anisotropic Multisublattice Magnets and the Modification of Magnetic Susceptibility Under Irradiation*, JETP **121**, 860 (2015)].
35. V. V. Val'kov and M. S. Shustin, *Quantum Theory of Strongly Anisotropic Two- and Four-Sublattice Single-Chain Magnets*, J. Low Temp. Phys. **185**, 564 (2016).
36. Yu. A. Fridman and D. V. Spirin, *Spin Waves in Two-Dimensional Ferromagnet with Large Easy-Plane Anisotropy*, J. Magn. Magn. Mat. **253**, 111 (2002).
37. J. Hubbard, *Electron Correlations in Narrow Energy Bands III. An Improved Solutions*, Proc. Roy. Soc. A **281**, 401 (1964).
38. A. V. Chubukov and D. I. Golosov, *Quantum Theory of an Antiferromagnet on a Triangular Lattice in a Magnetic Field*, J. Phys.: Condens. Matter **3**, 69 (1991).
39. C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Wiley-VCH (2019), Vol. 1.
40. V. V. Val'kov, *Unitary Transformations of the Group  $U(n)$  and Diagonalization of Multilevel Hamiltonians*, Theor. Math. Phys. **76**, 766 (1988).
41. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелегминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
42. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Elsevier (2013), Vol. 3.
43. T. Coletta, T. A. Toth, K. Penc et al., *Semiclassical Theory of the Magnetization Process on the Triangular Lattice Heisenberg Model*, Phys. Rev. B **94**, 075136 (2016).