

ДВУМЕРНЫЕ МАГНИТОПЛАЗМОНЫ В ПОЛОСЕ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

Р. З. Витлина^{a}, Л. И. Магарилл^{a,b**}, А. В. Чаплик^{a***}*

*^a Институт физики полупроводников им А. В. Ржанова
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

*^b Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 10 июня 2024 г.,
после переработки 1 августа 2024 г.
Принята к публикации 25 сентября 2024 г.

Влияние границ образца на спектр магнитоплазменных колебаний двумерного электронного газа исследовано на примере прямолинейной полосы. Как и следовало ожидать, при длине волны плазмона много большей ширины полосы дисперсия магнитоплазмона следует формуле для плазменных волн в одномерной системе в смысле зависимости от волнового вектора, однако коэффициент перед главным членом зависит от магнитного поля. Найдены законы дисперсии внутриволноводных плазмонов в случае заселения одной и двух подзон, деполяризационный сдвиг межволноводного плазмона и пространственное распределение электрического поля плазменной волны по поперечной координате. Концентрационные и магнитополевые зависимости плазменной частоты найдены численными методами.

DOI: 10.31857/S0044451025010080

1. ВВЕДЕНИЕ

Краевой магнитоплазмон (КМП) в двумерной (2D) электронной системе был впервые теоретически исследован в работах Волкова и Михайлова [1, 2]. Авторы провели как классическое, так и квантовое рассмотрение проблемы для полуплоскости и нашли закон дисперсии КМП $\omega(k)$, где k — одномерный импульс плазменной волны вдоль края образца. Естественно поставить вопрос о роли границ в реальном эксперименте, в частности о плазменных волнах в полосе заданной ширины, когда следует учесть также влияние противоположного края. Такая постановка задачи была декларирована во введении к статье Балева и Василюса [3]. Авторы сформулировали модель полосы с «мягкими» стенками: параболический потенциал для электронов на границах полосы. Однако в дальнейшем при рассмотрении плазменных колебаний ограничились

фактически учетом лишь одного края и получили, естественно, уже известный результат для частоты плазмона. Между тем наличие второй границы приводит к качественно новым чертам явления: следует, строго говоря, рассматривать не краевой плазмон, а собственные моды плоского плазменного волновода (при этом надо иметь в виду, что в таком «волноводе» ограничено в одном направлении лишь движение электронов, тогда как электрическое поле плазменной волны простирается формально до бесконечности). В рамках классического гидродинамического описания 2D-плазмы такая задача решена в работах [4, 5]. Плазменный спектр в полосе 2D-электронов в условиях сильного экранирования металлическим электродом найден в работе [6] в рамках классического рассмотрения в приближении локальной емкости.

В предлагаемой работе мы строим квантовую теорию магнитоплазменных волн в полосе 2D-электронного газа заданной ширины $L = 2w$. Граничные условия для волновых функций соответствуют твердым стенкам, т.е. поперечное к полосе движение (вдоль оси x) соответствует «обрезанному» при $x = \pm w$ гармоническому осциллятору с циклотронной частотой ω_c и с точкой подвеса

* E-mail: ritta@isp.nsc.ru

** E-mail: levni@isp.nsc.ru

*** E-mail: chaplik@isp.nsc.ru

(suspension point) $X = -pl^2$, где p — сохраняющаяся в калибровке Ландау y -компонента импульса электрона, l — магнитная длина ($\hbar = 1$). Для уровня Ландау номера n волновая функция имеет вид

$$\Psi_{n,X}(x, y) = N_{n,X} \psi_{n,X}(x) \frac{\exp(i\pi y)}{\sqrt{L_y}}. \quad (1)$$

Здесь $N_{n,X}$ — нормировочный коэффициент, L_y — длина полосы. Для функции $\psi_{n,X}(x)$ имеем (см., например, [7])

$$\begin{aligned} \psi_{n,X}(x) = & e^{-(x-X)^2/2l^2} \times \\ & \times \left[\Phi(-q_n(X)/2, 1/2, (x-X)^2/l^2) - \right. \\ & \left. - B(x-X)\Phi((1-q_n(X))/2, 3/2, (x-X)^2/l^2) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Первый индекс вырожденной гипергеометрической функции в (2) определяет энергию подзон Ландау:

$$q_n(X) = E_n(X)/\omega_c - 1/2$$

через дисперсионное уравнение, следующее из граничных условий $\psi_{n,X}(x = \pm w) = 0$. Из этих же условий находится константа B .

Дисперсия подзон Ландау $E_n(X)$ хорошо известна, графики неоднократно приводились в литературе в связи с исследованиями квантового эффекта Холла (краевые каналы, краевые состояния). Функции $\psi_{n,X}(x)$ и $E_n(X)$ нужны для формулировки уравнения плазменных волн.

2. БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваемая здесь задача относится к группе задач о плазменных колебаниях многокомпонентных низкоразмерных систем. Схема решения, т.е. нахождение собственных частот плазмонов таких систем через матричную диэлектрическую функцию в приближении самосогласованного поля изложена в [8] на примере двумерных систем — пленочные структуры типа квантовой ямы с более чем одним заселенным уровнем поперечного квантования, двойные квантовые ямы или многослойные сверхрешетки. В случае магнитоплазмонов в полосе 2D-электронного газа отдельным компонентам плазмы соответствуют группы электронов на различных уровнях Ландау (подзоны $E_n(X)$), т.е. одномерные системы. Поэтому меняется вид гриновской функции уравнения Пуассона: теперь $G_k(x-x') = -K_0(|k(x-x')|)/2\pi$, где K_0 — функция Макдональда. Другим существенным отличием от [8] является зависимость волновых функций

поперечного движения $\psi_{n,X}(x)$ (2) от продольного импульса электрона p через точку подвеса осциллятора. С учетом этих отличий уравнение для матричных элементов потенциала плазменной волны $\varphi(x)e^{iky}$ приобретает вид (мы учли, что правила отбора по импульсу вдоль полосы допускают лишь переходы $(n, X) \rightarrow (m, X + kl^2)$)

$$\begin{aligned} \varphi_{n,X;m,X+kl^2} = & \\ = & \frac{2e^2}{\varepsilon L_y} \sum_{m',n',X'} \frac{f(E_{m'}(X'+kl^2)) - f(E_{n'}(X'))}{E_{m'}(X'+kl^2) - E_{n'}(X') + \omega + i\delta} \times \\ & \times J_{m,n;m',n'}(X, X') \varphi_{n',X';m',X'+kl^2}, \quad (3) \end{aligned}$$

где ε — средняя диэлектрическая постоянная двух сред, разделенных 2D-электронным газом, f — фермиевские числа заполнения, а формфакторы $J_{mn;m'n'}$ определяются формулой

$$\begin{aligned} J_{m,n;m',n'}(X, X') = & \\ = & \int_{-w}^w \int_{-w}^w dx dx' \tilde{\psi}_{n,X}(x) \tilde{\psi}_{m,X+kl^2}(x) \times \\ & \times K_0(|k(x-x')|) \tilde{\psi}_{n',X'}(x') \tilde{\psi}_{m',X'+kl^2}(x'). \quad (4) \end{aligned}$$

В выражении (4) $\tilde{\psi}_{n,X}(x) = N_{n,X} \psi_{n,X}(x)$ — нормированная волновая функция поперечного движения. Таким образом, имеем систему линейных однородных интегральных уравнений для функций $\varphi_{n,X;m,X+kl^2}$, которые для краткости будем обозначать $\Phi_{nm}(X)$. При неограниченном дискретном спектре электронов число уравнений, а следовательно, и число различных плазменных мод также бесконечно, даже если заселенным будет только один уровень, например, $E_0(X)$. Недиагональные члены в (3) $m \neq n$ соответствуют виртуальным переходам с изменением энергии не меньшим ω_c , т.е. отвечают межподзонным плазмонам, спектр которых имеет щель $\Delta > \omega_c$ при $k = 0$. Если интересоваться только низкочастотной частью плазменного спектра $\omega \ll \omega_c$, то нужно ограничиться лишь случаем $m = n$ (внутриподзонные плазмоны) и дополнительно потребовать выполнения условия длинноволнового приближения $kl \ll 1$. Мы рассмотрим далее как внутри-, так и межподзонные плазмоны из нижней части спектра, т.е. те, которые связаны с уровнями $E_0(X)$ и $E_1(X)$.

3. ВНУТРИЗОННЫЙ ПЛАЗМОН НУЛЕВОЙ ПОДЗОНЫ

В этом случае вместо (3) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{00}(X) &= \\ &= \frac{e^2}{\pi \varepsilon l^2} \int dX' \frac{f(E_0(X' + kl^2)) - f(E_0(X'))}{E_0(X' + kl^2) - E_0(X') + \omega + i\delta} \times \\ &\quad \times J_{00,00}(X, X') \Phi_{00}(X'). \end{aligned} \quad (5)$$

Считая $k \ll p \sim p_F$ (p_F — фермиевский импульс), разложим в (5) разности до линейного по k члена. При этом в формфакторах J следует положить $k = 0$. При $T = 0$ в числителе появится $\delta(E_0(X') - E_F)$ (E_F — энергия Ферми) и интеграл сведется к сумме двух слагаемых — к сумме значений подынтегральной функции в точках $X' = \pm X_0$, где $\pm X_0$ — корни уравнения $E_0(X) = E_F$ ($E_0(X)$ — четная функция X).

Придавая в левой части (5) переменной X значения $\pm X_0$, приходим к двум линейным однородным уравнениям для величин $\Phi_{\pm} \equiv \Phi_{00}(\pm X_0)$:

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= \beta k \left(\frac{J_{+-}}{\omega - kV_0} \Phi_- - \frac{J_{++}}{\omega + kV_0} \Phi_+ \right), \\ \Phi_- &= \beta k \left(\frac{J_{--}}{\omega - kV_0} \Phi_- - \frac{J_{-+}}{\omega + kV_0} \Phi_+ \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\beta = e^2/\pi\varepsilon$, V_0 — фермиевская скорость в нулевой подзоне, а

$$\begin{aligned} J_{\pm\pm} &= J_{00,00}(\pm X_0, \pm X_0), \\ J_{\pm\mp} &= J_{00,00}(\pm X_0, \mp X_0). \end{aligned}$$

Очевидно, что $J_{-+} = J_{+-}$. В Приложении показано, что $J_{--} = J_{++}$. Таким образом, имеются два независимых формфактора. Корни детерминанта системы (6) определяют частоту плазмона $\omega_0(k)$:

$$\omega_0^2(k) = k^2 (V_0^2 + \beta^2 (J_{++}^2 - J_{+-}^2) + 2\beta V_0 J_{++}). \quad (7)$$

В интегралах, определяющих $J_{\pm\pm}$, функции $\psi_0^2(x)$ локализованы вблизи точек $X_0, \pm X_0$ в окрестности порядка l . Поэтому для J_{++} аргумент K_0 мал при условии $k \rightarrow 0$ и можно воспользоваться асимптотической функцией Макдональда

$$K_0(|k(x - x')|) = -\ln(|k(x - x')|e^\gamma/2),$$

γ — константа Эйлера. Тогда для J_{++} получаем

$$J_{++} = \ln \left(\frac{2e^{-\gamma}}{|k|l} \right) + \bar{J}_{++}, \quad (8)$$

где

$$\bar{J}_{++} = \int dx dx' \tilde{\psi}_{0,X_0}^2(x) \ln \left(\frac{l}{|x - x'|} \right) \tilde{\psi}_{0,X_0}^2(x'). \quad (9)$$

Главный член в J_{++} есть $|\ln(|k|l)|$. Для формфактора J_{+-} аргумент у функции K_0 можно положить равным $2|k|X_0$, что может и не быть малой величиной даже при $kl \ll 1$. Тогда $J_{+-} = K_0(2|k|X_0)$ и дает логарифмический вклад при более сильном условии $kX_0 \ll 1$. При выполнении этого условия для частоты плазмона имеем

$$\begin{aligned} \omega_0^2(k) &= k^2 \left\{ 2\beta \left[\beta(\bar{J}_{++} - \bar{J}_{+-}) + V_0 \right] \ln \left(\frac{2e^{-\gamma}}{|k|l} \right) + \right. \\ &\quad \left. + V_0^2 + \beta^2 (\bar{J}_{++}^2 - \bar{J}_{+-}^2) + 2\beta V_0 \bar{J}_{++} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, получен ожидаемый результат для одномерного (1D) плазмона, найденный в [9,10]:

$$\omega \sim k \sqrt{|\ln(|k|l)|}.$$

Заметим, однако, что в рассматриваемом нами случае зависимость частоты магнитоплазмона от концентрации электронов и от магнитного поля не может быть выражена аналитически. Другим важным отличием является изменение коэффициента перед главным членом с логарифмом: к фермиевской скорости V_0 (случай 1D-плазмона без магнитного поля) добавляется первое слагаемое в квадратной скобке в (10), которое может значительно превышать V_0 (например, при $N_L = 10^6 \text{ см}^{-1}$, $H = 1.6 \text{ Тл}$ превышение более, чем на порядок). Результаты численного расчета приведены ниже.

В заключение этого раздела заметим, что полученные в нем формулы применимы вплоть до самого начала плазмонного спектра ($k=0$), когда длина волны плазмона много больше всех характерных длин задачи, в том числе и ширины полосы L . В этом пределе система эффективно одномерна. Переход в полученных формулах к пределу полуплоскости, исследованной в [1,2], невозможен, так как ему соответствует бесконечно большая L . Законы дисперсии различаются: в полуплоскости частота пропорциональна $\ln k$, а в полосе — $\sqrt{\ln k}$, как и должно быть для одномерных систем [9,10].

4. ВНУТРИПОДЗОННЫЕ ПЛАЗМОНЫ В ДВУХПОДЗОННОЙ СИСТЕМЕ

Пусть теперь заселены состояния $E_0(X)$ и $E_1(X)$, но недиагональным вкладом $\Phi_{0,1}$ будем

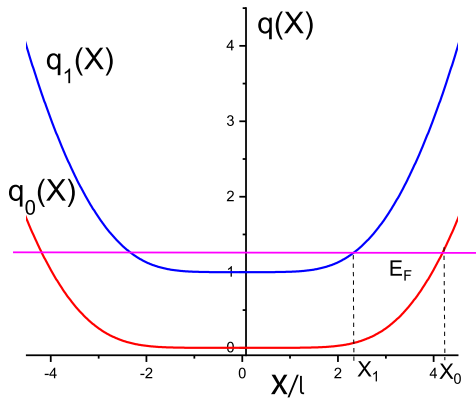


Рис. 1. Электронный спектр полосы. Показаны две нижние подзоны Ландау, горизонтальная прямая указывает положение уровня Ферми; $w/l = 4$

пренебрегать. Уровень Ферми лежит между $E_1(0)$ и $E_2(0)$ и пересекает кривые $E_0(X)$ и $E_1(X)$ соответственно в точках $\pm X_0$ и $\pm X_1$ (см. рис. 1). Четыре уравнения для $\Phi_{00}(\pm X_0)$ и $\Phi_{11}(\pm X_1)$ приводят к биквадратному уравнению для частот, корни которого равны (здесь мы приводим результаты для предельно малых импульсов плазмона $kX_0 \ll 1$, чтобы выяснить поведение $\omega(k)$ в самом начале спектра):

$$\omega_{ac}^2 = \frac{k^2}{2} \left(V_0^2 + V_1^2 + \beta^2 [\bar{J}_{0+,0+}^2 - \bar{J}_{0+,0-}^2 + \bar{J}_{1+,1+}^2 - \bar{J}_{1+,1-}^2 + 2\bar{J}_{0+,1+}^2 - 2\bar{J}_{0+,1-}^2] + 2\beta(V_0\bar{J}_{0+,0+} + V_1\bar{J}_{1+,1+}) \right), \quad (11)$$

$$\omega_{opt}^2 = \omega_{ac}^2 + 2k^2 \ln \left(\frac{2e^{-\gamma}}{|k|l} \right) \left[\beta(V_0 + V_1) + \beta^2 (\bar{J}_{0+,0+} - \bar{J}_{0+,0-} + \bar{J}_{1+,1+} - \bar{J}_{1+,1-} + 2\bar{J}_{0+,1+} - 2\bar{J}_{0+,1-}) \right]. \quad (12)$$

Здесь $V_{0,1}$ — фермиевские скорости в нулевой и первой подзонах; шесть независимых формфакторов вида $\bar{J}_{0+,0+}$, $\bar{J}_{0+,1+}$ и т.п. определяются аналогично тому, как это сделано в предыдущем разделе.

Подчеркнем, что в формуле (11) все логарифмические вклады в точности сокращаются. Соответствующий корень дисперсионного уравнения дает линейную зависимость $\omega_{ac}(k)$ при $k \rightarrow 0$, что

и служит основанием назвать эту ветвь акустической. Второй корень (оптическая ветвь, формула (12)) при $k \rightarrow 0$ дает уже известную сингулярность в нуле:

$$\omega_{opt}^2(k) \sim k^2 |\ln(|k|l)|.$$

5. МЕЖПОДЗОННЫЙ ПЛАЗМОН В ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ

Ранг характеристического детерминанта при учете N подзон равен N^2 , т.к. диэлектрическая функция есть матрица 4-го ранга. Из N^2 корней N соответствуют внутривозонным плазмонам, а в остальных $N(N - 1)$ каждая пара дает одну межподзонную ветвь, число которых, таким образом, равно $N(N - 1)/2$. Мы рассмотрим низшую из них, связанную с уровнями E_0 и E_1 . Решение задачи в общем виде (при произвольных импульсах плазмона k) связано с чрезвычайно сложными численными расчетами, поскольку ни законы дисперсии электронов, ни формфакторы не выражаются в аналитическом виде. Ограничимся поэтому нахождением пороговой частоты $\omega_{01}(k = 0)$, определяющей щель в спектре межподзонного плазмона. Отличие этой величины от минимального расстояния между уровнями E_0 и E_1 известно под названием деполаризационного сдвига.

Если в системе (3) оставить лишь уравнения с $m = 0, 1$ и $n = 0, 1$ и перейти к пределу $k \rightarrow 0$, то в правых частях останется только недиагональный элемент φ , т.к. в диагональных разность чисел заполнения в числителе при $k = 0$ обратится в нуль. В том же пределе функция $K_0(|k(x - x')|)$ заменяется выражением

$$\ln(2e^{-\gamma}/|k(x - x')|) = \ln(2e^{-\gamma}/|k|l) + \ln(l/|x - x'|).$$

Первое слагаемое не дает вклада в формфактор $J_{01,01}$ из-за ортогональности волновых функций $\psi_{0,X}(x)$ и $\psi_{1,X}(x)$. В результате приходим к уравнению

$$\Phi_{01}(X) = \frac{2\beta}{l^2} \int_{-X_0}^{X_0} dX' \times \times \frac{\Delta(X')}{\omega^2 - \Delta(X')^2} Q(X, X') \Phi_{01}(X'), \quad (13)$$

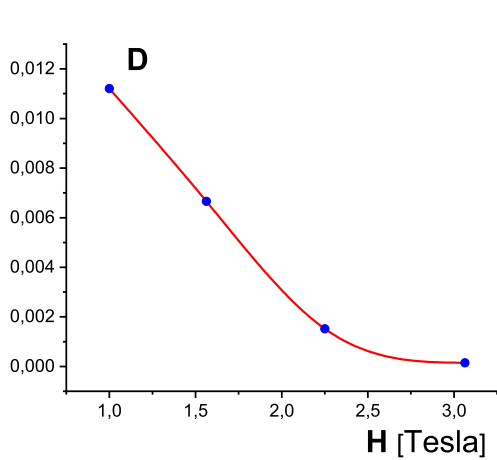


Рис. 2. Зависимость деполяризационного сдвига межподзонного плазмона на уровнях 0 и 1 от магнитного поля; $D = \Omega/\Delta(X = 0) - 1$, $N_L = 0.47 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}$, $L = 0.1 \text{ мкм}$

где $\Delta(X) = E_1(X) - E_0(X)$. В однородном интегральном уравнении (13) ω^2 является искомым собственным числом, причем нужно его минимальное значение ω_{min}^2 , а множитель $Q(X, X')$ в ядре уравнения равен

$$Q(X, X') = \int_{-w}^w \int_{-w}^w dx dx' \tilde{\psi}_{0,X}(x) \tilde{\psi}_{1,X}(x) \times \ln(l/|x - x'|) \tilde{\psi}_{0,X'}(x') \tilde{\psi}_{1,X'}(x'). \quad (14)$$

Значение ω_{min}^2 было найдено численно. Мы заменили интеграл соответствующей ему суммой Римана, разбив интервал интегрирования на большое число точек, т.е. свели задачу к нахождению собственных чисел системы линейных однородных уравнений, число которых равно числу точек разбиения. Деполяризационный сдвиг Ω определяется как разность минимальной частоты ω_{min} и минимального расстояния между уровнями $\Delta(0)$. Его зависимость от магнитного поля приведена на рис. 2.

Как известно, деполяризационный сдвиг определяет также частоту ИК-поглощения при межподзонном (в безграничной плоскости межуровневом) переходе, которая не равна расстоянию между уровнями из-за динамического экранирования электрического поля возбуждающей волны.

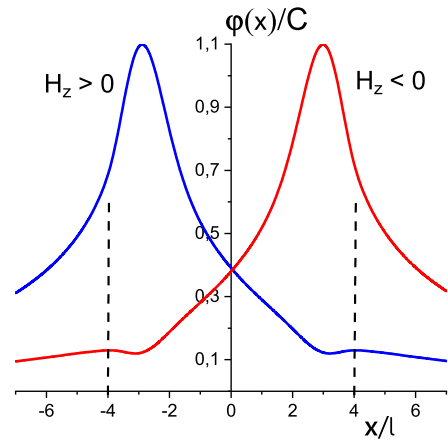


Рис. 3. Распределение потенциала плазменной волны по поперечной координате для двух противоположных направлений распространения или направлений магнитного поля; $N_L = 10^6 \text{ см}^{-1}$, $L = 0.2 \text{ мкм}$, $H = 1 \text{ Тл}$

6. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛНЫ

В этом разделе мы получим выражение для координатной зависимости потенциала $\varphi(x)$ плазмона, соответствующего нулевой подзоне, т.е. самой нижней по частоте ветви плазмонного спектра. В рамках теории самосогласованного поля $\varphi(x)$ подчиняется уравнению Пуассона (квазистатическое приближение, запаздывание не учитывается), в правой части которого стоит добавка к электронной плотности, индуцированная плазменной волной. В рассматриваемом случае нужно учесть лишь вклад в эту добавку от нулевой подзоны:

$$\Delta_{x,z} \varphi_0(x, z, k) - k^2 \varphi_0(x, z, k) = -\frac{4\pi e^2}{\varepsilon L_y} \delta(z) \sum_X \frac{f(E_0(X + kl^2)) - f(E_0(X))}{E_0(X + kl^2) - E_0(X) + \omega + i\delta} \times \Phi_{00}(X) \tilde{\psi}_{0,X}^2(x). \quad (15)$$

Уравнение (15) соответствует плазмону в виде плоской волны Ce^{iky} , а матричный элемент $\Phi_{00}(X)$ в правой части берется на плоскости полосы $z = 0$. Решение уравнения (15) записывается через гриновскую функцию $G(x-x')$, определенную в разд. 2 уже на плоскости $z = 0$. Получившийся интеграл для $\varphi_0(x)$ в длинноволновом пределе и при $T = 0$ вычисляется таким же образом, как при нахождении частоты $\omega_0(k)$. Теперь необходимо найти сами решения системы двух уравнений (6) для матричных

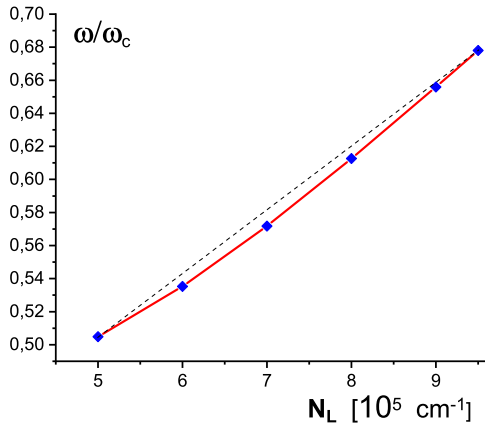


Рис. 4. Зависимость частоты плазмона от линейной концентрации электронов. Магнитное поле $H = 1$ Тл, ширина полосы $L = 0.2$ мкм

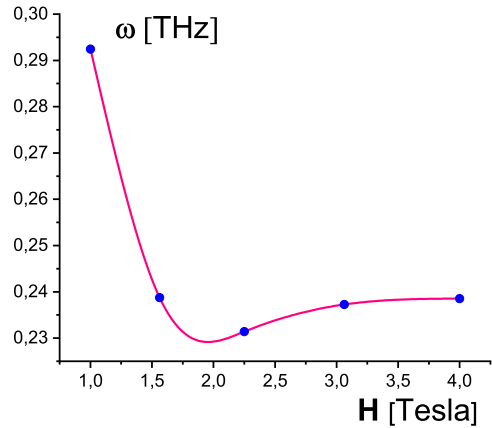


Рис. 5. Магнитополевая зависимость частоты плазмона; $N_L = 10^6 \text{ см}^{-1}$, $L = 0.2 \text{ мкм}$, $k = 0.4 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}$

элементов $\Phi_{00}(X)$ в точках $\pm X_0$. Результат имеет вид (C — амплитуда волны, задаваемая условиями ее возбуждения)

$$\varphi_0(x) = Ck\beta \left(\frac{I_-(x)}{\omega_0(k) - kV_0} - \frac{RI_+(x)}{\omega_0(k) + kV_0} \right),$$

$$I_{\pm}(x) = \int_{-w}^w dx' K_0(|k(x-x')|) \tilde{\psi}_{0,\pm X_0}^2(x'), \quad (16)$$

$$R = \frac{\omega_0(k) + kV_0}{\omega_0(k) - kV_0} \frac{k\beta J_{++} - \omega_0(k) + kV_0}{k\beta J_{+-}}.$$

На рис. 3 показано поле плазмона $\varphi_0(x)$ для противоположных направлений распространения. Как видно, при заданном направлении распространения максимум $\varphi(x)$ имеется лишь у какого-то одного края полосы. Этот результат был получен в работе [2] в рамках гидродинамического подхода.

Такое же зеркальное отображение имеет место при изменении направления магнитного поля: легко понять, что под X следует понимать $-pl^2 \text{sign}(H)$, а $l^2 = c/|eH|$. Поэтому при смене знака H точки X_0 и $-X_0$ меняются местами. Это «отражение» поля плазмона относительно срединной линии полосы при изменении знака магнитного поля в принципе доступно экспериментальному наблюдению. При $l \ll w$ и при энергии Ферми такой, что точки $\pm X_0$ близки к краям полосы, максимум $\varphi(x)$ также близок к одному из краев, и в этом смысле такую волну можно назвать краевым магнитоплазмонном.

7. ЗАВИСИМОСТИ ОТ КОНЦЕНТРАЦИИ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Дисперсия электрона $E_0(p)$ (см. рис. 1) существенно отличается от стандартной параболической $p^2/2m$. Соответственно, и все характеристики магнитоплазмона в полосе (зависимость частоты от концентрации электронов и от магнитного поля) выглядят необычно. Для внутриподзонного плазмона нулевой подзоны система эффективно одномерна, поэтому $p_F = \pi N_L/2$, где N_L — линейная плотность электронов (спиновым расщеплением пренебрегаем), а $X_0 = \pi N_L l^2/2$. Зависимость E_F от N_L дается, следовательно, правой половиной нижней кривой на рис. 1. Зависимость частоты ω_0 от линейной плотности содержится в фермиевской скорости V_0 и через X_0 в факторах, входящих в формулу (7). Результаты приведены на рис. 4.

Пунктирная прямая на этом рисунке проведена, чтобы показать суперлинейный характер зависимости. Напомним в связи с этим, что классический 2D-плазмон имеет частоту, сублинейно зависящую от поверхностной плотности N_s :

$$\omega = (\omega_c^2 + \omega_p^2)^{1/2},$$

где $\omega_p^2 \propto N_s$.

Магнитная дисперсия плазмона еще более необычна: кривая на рис. 5 имеет минимум при $H \approx 2$ Тл. Дело в том, что, как видно из (10), зависимость частоты плазмона от магнитного поля обусловлена вкладами двух типов. Члены, содержащие фермиевскую скорость V_0 , обеспечивают

падающий участок кривой на рис. 5, поскольку при заданной плотности уровень Ферми быстро опускается с ростом H и приближается к плоскому участку электронной дисперсии $E_0(p)$, где V_0 обращается в нуль. Тогда главным остается первое (кулоновское) слагаемое в (10), которое дает логарифмически медленный рост частоты.

Для деполяризационного сдвига (рис. 2) характерно быстрое убывание при относительно небольшом увеличении H : более, чем на порядок при $\delta H/H = 75\%$. С увеличением поля поведение волновых функций электронов приближается к тому, которое реализуется в безграничной плоскости, так как уменьшается влияние границ полосы. Но в бесконечной плоскости $\Omega = 0$, поскольку в сильном магнитном поле отсутствует экранирование (во всяком случае линейное) и вместе с ним отсутствуют возмущения плотности электронов, линейные по возмущающему потенциалу.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что на магнитоплазменные колебания двумерного электронного газа существенно влияет учет границ образца. Математически задача значительно усложняется нестандартным законом дисперсии «замагниченных» электронов – зависимостью энергии от сохраняющейся компоненты импульса в калибровке Ландау. В простом случае прямолинейной полосы аналитически удастся найти лишь дисперсию внутриподзонных плазмонов в длинноволновом пределе, относящихся к нижней части спектра плазменных колебаний, содержащего, вообще говоря, бесконечное число ветвей. Концентрационные и магнитопольные зависимости плазменной частоты найдены численными методами.

Благодарности. Авторы благодарны В. А. Волкову и И. В. Кукушкину за помощь в ознакомлении с библиографией вопроса, а также А. В. Ненашеву за полезные советы при проведении численных расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы покажем справедливость соотношения $J_{--} = J_{++}$. Для этого нам понадобится выражение для $\psi_{n,X}(x)$, уже учитывающее граничные условия. Оно имеет вид

$$\psi_{n,X}(x) = e^{-(x-X)^2/2l^2} \times$$

$$\times \left[\Phi(-q_n(X)/2, 1/2, (x-X)^2/l^2) - \Phi((1-q_n(X))/2, 3/2, (x-X)^2/l^2) \times \frac{(x-X)\Phi(-q_n(X)/2, 1/2, (w-X)^2/l^2)}{(w-X)\Phi((1-q_n(X))/2, 3/2, (w-X)^2/l^2)} \right] \quad (17)$$

Кроме того, необходим явный вид уравнения, определяющего спектр электрона, т. е. параметр $q_n(X)$. Для него имеем

$$F(q_n(X)) = 0, \quad (18)$$

$$F(q) = \frac{\Phi(-q/2, 1/2, (w-X)^2/l^2)}{(w-X)\Phi((1-q)/2, 3/2, (w-X)^2/l^2)} + \frac{\Phi(-q/2, 1/2, (w+X)^2/l^2)}{(w+X)\Phi((1-q)/2, 3/2, (w+X)^2/l^2)}. \quad (19)$$

Используя явные выражения для формфакторов $J_{\pm\pm}$, запишем разность $J_{--} - J_{++}$:

$$J_{--} - J_{++} = \int_{-w}^w \int_{-w}^w dx dx' K_0(|k(x-x')|) \times \left[N_{0,-X}^4 \psi_{0,-X}^2(x) \psi_{0,-X}^2(x') - N_{0,X}^4 \psi_{0,X}^2(x) \psi_{0,X}^2(x') \right], \quad (20)$$

где $\psi_{n,X}(x)$ определена в (17). Сделав замену переменных интегрирования в первом слагаемом в квадратных скобках (20), приходим к выражению

$$J_{--} - J_{++} = \int_{-w}^w \int_{-w}^w dx dx' K_0(|k(x-x')|) \times \left[N_{0,-X}^4 \psi_{0,-X}^2(-x) \psi_{0,-X}^2(-x') - N_{0,X}^4 \psi_{0,X}^2(x) \psi_{0,X}^2(x') \right]. \quad (21)$$

Видно, что для доказательства равенства $J_{--} = J_{++}$ достаточно показать, что выполняются соотношения $\psi_{0,-X}(-x) = \psi_{0,X}(x)$ и $N_{0,-X} = N_{0,X}$.

Воспользовавшись (17), получаем

$$\begin{aligned} \psi_{0,-X}(-x) - \psi_{0,X}(x) = & e^{-(x-X)^2/2l^2} (x-X) \times \\ & \times \Phi((1-q_0(X))/2, 3/2, (x-X)^2/l^2) \times \\ & \times \left[\frac{\Phi(-q_0(X)/2, 1/2, (w-X)^2/l^2)}{(w-X)\Phi((1-q_0(X))/2, 3/2, (w-X)^2/l^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{\Phi(-q_0(X)/2, 1/2, (w+X)^2/l^2)}{(w+X)\Phi((1-q_0(X))/2, 3/2, (w+X)^2/l^2)} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

В квадратные скобки в (22) заключена функция $F(q_0(X))$, определенная в (19), и следовательно

$$\psi_{0,-X}(-x) = \psi_{0,X}(x). \quad (23)$$

Для $N_{0,-X}$ имеем

$$N_{0,-X} = \left(\int_{-w}^w dx \psi_{0,-X}^2(x) \right)^{-1/2}.$$

Сделаем в интеграле по x замену $x \rightarrow -x$. В результате с учетом (23) доказывается четность нормировочного коэффициента по X .

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Волков, С. А. Михайлов, Письма в ЖЭТФ **42**, 450 (1985).
2. В. А. Волков, С. А. Михайлов, ЖЭТФ **94**, 217 (1988).
3. O. G. Balev and V. Vasilopoulos, Phys. Rev. B **59**, 2807 (1999).
4. I. L. Aleiner, D. Xue, and L. I. Glazman, Phys. Rev. B **51**, 13467 (1995).
5. G. Eliasson, J. Wu, P. Hawrylak, and J. J. Quinn, Solid State Commun. **60**, 4111 (1986).
6. Д. А. Родионов, И. В. Загороднев, Письма в ЖЭТФ **118**, 90 (2023).
7. A. H. MacDonald and P. Streda, Phys. Rev. B **29**, 1616 (1984).
8. Р. З. Витлина, А. В. Чаплик, ЖЭТФ **81**, 1011 (1981).
9. A. V. Chaplik and M. V. Krasheninnikov, Surface Science **98**, 533 (1980).
10. S. Das Sarma and W. Y. Lai, Phys. Rev. B **32**, 1401 (1985).