

ЭФФЕКТЫ ДЛИННОЙ ПАМЯТИ ПРИ РАЗВИТИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

А. П. Очир-Горяева ^{a,c*}, Д. Д. Соколов ^{a,b,c}, Е. А. Илларионов ^b

^a Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
физический факультет
119991, Москва, Россия

^b Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
119991, Москва, Россия

^c Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения
радиоволн им. Н. В. Пушкова Российской академии наук
108840, Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 марта 2024 г.,
после переработки 9 августа 2024 г.
Принята к публикации 10 августа 2024 г.

При изучении развития неустойчивостей в случайной среде часто предполагается, что память в среде теряется мгновенно в предписанные моменты времени, тогда как естественно предполагать, что потеря памяти происходит постепенно. В работе изучаются эффекты, возникающие в результате постепенной потери памяти. Оказывается, что длинная память может повышать скорость развития неустойчивости (увеличивать показатель Ляпунова). Устанавливается связь этого эффекта с эффектами перемежаемости, возникающими при развитии неустойчивостей в случайной среде. Исследование проводится в рамках простой модели, предложенной Я. Б. Зельдовичем для описания развития неустойчивости, возникающей под действием флуктуаций кривизны при распространении света во Вселенной, однородной и изотропной лишь в среднем.

DOI: 10.31857/S0044451024120113

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи о развитии неустойчивостей в случайной среде содержат в качестве своей составной части задачу о перемножении случайных матриц вдоль лагранжевой траектории (например, [1]). К ним относится, например, задача гидромагнитного динамо, в которой изучается генерация магнитного поля \mathbf{H} в нерелятивистском случайном потоке \mathbf{v} проводящей жидкости в результате эффекта электромагнитной индукции (например, [2,3]). Этот процесс описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (1)$$

которое с помощью перехода в лагранжеву систему отсчета и в пренебрежении малым коэффи-

циентом магнитной диффузии ν_m сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль лагранжевой траектории

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v}. \quad (2)$$

Если предположить, что матричный случайный процесс

$$\hat{A} = \nabla \mathbf{v} = \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\| \quad (3)$$

теряет свою память в фиксированные моменты времени, отстоящие друг от друга на равные временные промежутки τ (промежутки обновления), то решение начальной задачи для уравнения (2) сводится к перемножению случайных матриц \hat{B} , описывающих эволюцию магнитного поля в случайном поле скорости \mathbf{v} . Если, например, матрица \hat{A} постоянна на промежутке обновления, то $\hat{B} = \exp \tau(\hat{A})$, если же матрица \hat{A} меняется во времени, то вместо экспоненты в

* E-mail: alinaocirgoraeva259@gmail.com

последнем соотношении возникает мультипликативный интеграл Вольтерра, или (в более физической терминологии) t -экспонента. Матрицы B , отвечающие различным интервалам обновления, очевидно, независимы, так что полное решение уравнения (2) сводится к произведению независимых случайных матриц. Если рассматривается стационарная в среднем случайная среда, то эти матрицы равномерно распределены. Определители этих матриц, будучи скалярами, выносятся из матричного произведения, поэтому достаточно рассматривать произведения унимодулярных матриц, а дополнение полученных результатов произведением их определителей проблем не вызывает.

Свойства произведения большого числа независимых унимодулярных случайных матриц хорошо изучены в теории вероятностей и составляют содержание классической теории Ферстенберга (ее основные черты описаны ниже). В частности, выясняется, что это произведение экспоненциально растет с ростом числа сомножителей, предлагаются методы для вычисления показателя Ляпунова, характеризующего скорость этого роста. Обнаруживается также явление перемежаемости, состоящее в том, что скорость роста статистических моментов, нормированная на номер момента, увеличивается с номером момента (см., например, [4,5]).

Разумеется, полное исследование свойств неустойчивости этим не ограничивается. В частности, приходится так или иначе учитывать роль малой диффузии ν_m , однако это достигается уже иными методами.

Описанная выше схема исследования неустойчивости содержит ряд очевидных идеализаций. В частности, она предполагает, что память случайного потока полностью исчезает в моменты обновления. Гораздо более реалистичным является представление о том, что память исчезает не полностью, а последующий интервал обновления сохраняет небольшую память о предыдущем интервале обновления. Остатки этой памяти, экспоненциально уменьшаясь от одного момента обновления к последующему, в принципе сохраняются на протяжении всей эволюции магнитного поля.

Изучение эффектов, связанных в рамках описанного подхода с этой длинной памятью потока, практически отсутствует в литературе. В частности, при наличии подобной памяти перестают действовать аналитические методы теории Ферстенберга, однако исследование этих эффектов методами прямого численного моделирования не вызывает принципиальных затруднений, поскольку система обыкновенных дифференциальных уравнений (2) гораздо проще исходной системы (1). Это исследование и составляет содержание данной работы.

Представляется, что в рамках подобного исследования разумно отделить изучение эффектов памяти от технических проблем вычисления матричных экспонент, показателя Ляпунова и т.п., которые важны сами по себе, но в контексте данной работы играют второстепенную роль. Поэтому мы исследуем эффекты памяти на примере простой модели неустойчивости в случайной среде, которая была предложена Я.Б. Зельдовичем еще в 1964 г. [6]. В этой работе рассматривается распространение света в космологической модели, которая является однородной и изотропной лишь в среднем. Оказывается, что за счет флуктуаций кривизны свет от далеких источников распространяется так, что создается впечатление, что кривизна пространственного сечения отрицательна, даже если средняя плотность Вселенной равна критической. Это происходит за счет своеобразной неустойчивости, в результате которой с удалением от наблюдателя экспоненциально растет расстояние между близкими геодезическими, по которым распространяется свет.

Статья Зельдовича интересна с различных сторон и была воспринята в космологии, хотя сам по себе описанный в ней эффект количественно невелик просто потому, что в естественных для его оценки единицах Вселенная еще очень молода и развитие рассматриваемой неустойчивости еще не успело зайти слишком далеко. Для нас сейчас интересен лишь один аспект этой работы — формальное описание неустойчивости сводится к очень простой системе уравнений, которая, с одной стороны, воспроизводит основные черты более сложных задач, а, с другой стороны, достаточно проста, чтобы не вносить не имеющие прямого отношения к рассматриваемому вопросу и сложные в техническом отношении детали. Поэтому в данной работе мы используем открытую Зельдовичем неустойчивость как модельную задачу для исследования на ее примере эффектов памяти при развитии неустойчивостей в случайной среде.

Развитие неустойчивостей в случайной среде содержит много разнообразных и важных эффектов, которые рассматривались в широко известных работах. Например, в работе [7] предложена качественная картина возникновения экспоненциальной расходимости траекторий динамических систем, а в работе [8] выяснена зависимость скорости роста от корреляционного времени. В данной работе мы ставим перед собой более локальную, но, как нам ка-

жется, осмысленную задачу — выяснить, чем развитие неустойчивости при условии, что память случайной среды теряется мгновенно в предписанные моменты времени, отличается от развития неустойчивости в среде, в которой память теряется постепенно. Поскольку обнаруживаемый при этом эффект невелик, мы проводим свое исследование так, чтобы отделить его от иных эффектов. Поэтому проводимое нами исследование не ориентировано на выяснение зависимости скоростей роста от других параметров задачи. Такому исследованию посвящены, в частности, работы [9, 10].

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При описании интересующей нас неустойчивости мы опираемся на работу [11], в которой формальное содержание исходной работы Зельдовича в методических целях отделено от наблюдательного аспекта. Исходная работа была написана тогда, когда изучение неустойчивостей в случайных средах еще делало свои первые шаги, так что было неясно, как конкретная ситуация данной задачи вписывается в более общий контекст.

Рассмотрим искривленное риманово многообразие (пространственное сечение космологической модели), точку X и две близкие геодезические Γ_1 и Γ_2 , исходящие из этой точки. Пусть θ — малый угол между этими геодезическими в точке X . Одна из геодезических считается базовой и от нее отсчитывается угол θ . Отложим на каждой из геодезических отрезок длины x . Расстояние между полученными таким образом точками пропорционально малому углу θ , а возникающий здесь коэффициент пропорциональности y называется геодезическим отклонением, или полем Якоби. Важным замечанием Зельдовича было то, что описанное построение по существу двумерно, так что можно отвлекаться от трехмерности пространственного сечения космологической модели и считать величину y скаляром.

Оказывается, что поле Якоби удовлетворяет простому дифференциальному уравнению (уравнение геодезических отклонений):

$$y'' + ky = 0, \tag{4}$$

где производные берутся по расстоянию x , которое при соответствующем выборе системы единиц можно отождествить со временем t , а k — гауссова кривизна в соответствующей точке на базовой геодезической. Если бы мы хотели более последовательно рассматривать четырехмерное пространство-время,

в котором проводится это построение, уравнение (4) обросло бы тензорными индексами, гауссова кривизна двумерного пространства превратилась бы в секционную кривизну, пришлось бы учесть общее космологическое расширение и т.д. Замечательным обстоятельством, в полной мере использованном в оригинальной работе, является то, что все эти усложнения можно вводить в рассмотрение постепенно, а в рамках нашей работы мы от них отвлекаемся.

По смыслу поля Якоби $y(0) = 0$, а второе начальное условие, а именно значение $y'(0)$, для уравнения Якоби можно рассматривать как нормировку для угла θ . Для постоянного $k > 0$ решение уравнения Якоби осциллирует как $\sin(\sqrt{k}t)$, для $k < 0$ оно экспоненциально растет как $\exp(\sqrt{|k|}t)$, а для $k = 0$ оно растет линейно. На этом различии основано большинство космологических тестов, само построение было предложено еще Гауссом в его работах по геодезической съемке, а идея приложения к космологии восходит к работам Н. И. Лобачевского.

При изучении роли флуктуаций кривизны (в космологическом контексте — плотности) в распространении света величину k нужно считать не константой, а случайным процессом. Эффект Зельдовича состоит в том, что если среднее значение случайного процесса k равно нулю (пространственное сечение в среднем является плоским, а плотность в среднем равна критической), то поле Якоби растет не линейно, а экспоненциально, как и для открытой Вселенной.

3. РОСТ ПОЛЯ ЯКОБИ БЕЗ УЧЕТА ПАМЯТИ

Для связности изложения напомним кратко, как исследуются решения уравнения Якоби без учета эффектов памяти. Уравнение (4) удобно свести к системе линейных уравнений первого порядка:

$$\frac{dz}{dx} = \mathbf{z}\hat{A}, \tag{5}$$

где двумерный вектор-строка \mathbf{z} имеет компоненты $y, y'\tau$, а бесследовая матрица

$$\hat{A} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -K\Delta \\ 1/\Delta & 0 \end{array} \right\| \tag{6}$$

постоянна на каждом интервале обновления. Начальное условие для этой системы имеет вид $\mathbf{z}_0 = (1, 0)$. Решение системы (5) на n -м интервале обновления имеет вид

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_{n-1} \hat{B}_n = \mathbf{z}_0 \hat{B}_1 \dots \hat{B}_n, \quad (7)$$

где \mathbf{z}_n — значение вектора \mathbf{z} в конце n -го интервала обновления, а $\hat{B}_n = \exp \hat{A}_n \tau$ (\hat{A}_n — значение матрицы \hat{A} на n -м интервале обновления). Отметим, что матрицы \hat{B}_n равномерно распределены, независимы и унимодулярны. Таким образом, задача сводится к изучению поведения произведения большого числа независимых равномерно распределенных унимодулярных случайных матриц.

С помощью представления решения уравнения Якоби в виде (7) рассчитываются различные характеристики роста решения. Проще всего найти скорость роста среднего значения модуля решения, т.е.

$$\gamma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle |z(n\Delta)| \rangle}{n\Delta}. \quad (8)$$

Для этого достаточно найти среднее значение матриц \hat{B}_n , которое в силу равномерности этих матриц не зависит от номера n и тоже представляет собой матрицу $\langle \hat{B} \rangle$, а далее старшее собственное значение полученной матрицы, которое и определяет скорость роста первого момента. Несколько более сложное построение [9] дает матрицу, старшее собственное значение определяет скорость роста второго момента:

$$\gamma_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle |z(n\Delta)|^2 \rangle}{2n\Delta}. \quad (9)$$

Скорость роста самого решения (усредняется логарифм модуля решения, а не логарифмируется среднее значение степеней модуля!), т.е. показатель Ляпунова

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \ln |z(n\Delta)| \rangle}{n\Delta}, \quad (10)$$

можно найти как решение некоторого интегрального уравнения [10]. Замечательно, что эти характеристики роста не совпадают друг с другом, в чем проявляется явление перемежаемости [4]. В принципе аналогичным образом вычисляются скорости роста решения. Модельная задача, предложенная Зельдовичем, важна потому, что в ней строение матрицы \hat{A} достаточно просто для того, чтобы ее можно было легко параметризовать с помощью генератора случайных чисел, а потом явно или приближенно найти конкретные скорости роста.

Отметим, что, в принципе, эти скорости роста можно найти и путем прямого численного моделирования решений исходного уравнения со случайной кривизной, хотя для выявления эффекта перемежаемости потребуется очень большой (до полумиллиона) набор реализаций.

Центральную роль в этой аналитической теории играет предположение о том, что в момент обновления полностью теряется память случайного процесса $K(x)$. Задача настоящей работы состоит в том, чтобы прояснить, насколько важно это предположение и как небольшая память, переходящая от одного интервала обновления к другому, меняет эти результаты.

4. МОДЕЛЬ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

4.1. Модель потери памяти

Теперь нам необходимо описать, как именно происходит потеря памяти в рассматриваемой модели. Будем отталкиваться от конструкции, в которой значения кривизны k на различных интервалах обновления, т.е. случайные величины k_n , независимы в совокупности при различных n . Заменяем в уравнении (4) случайный процесс $k(x)$ на другой случайный процесс

$$q_1(t_n) = \frac{k(t_n) + k(t_{n-1})a}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad (11)$$

где величина $a \in [0, 1]$ показывает, во сколько раз теряется память при переходе от $(n - 1)$ -го интервала обновления к n -му интервалу, а знаменатель введен для того, чтобы случайные процессы k и q имели равные дисперсии. Случайный процесс q_1 , как и случайный процесс k , является кусочно-постоянным: оба они принимают постоянные значения на каждом интервале обновления. В стандартном гауссовом случае совпадают и их функции распределения. Однако значения процесса q_1 на различных интервалах обновления не являются независимыми. Память о значении q_1 на $(n - 1)$ -м интервале обновления сохраняется и на n -м интервале, но уже теряется на $(n + 1)$ -м интервале, хотя на нем процесс еще помнит свое значение на n -м интервале обновления. Можно сказать, что у процесса q_1 глубина памяти равна τ .

Аналогично можно построить процесс с глубиной памяти 2τ :

$$q_2(t_i) = \frac{k(t_i) + k(t_{i-1})a + k(t_{i-2})a^2}{\sqrt{1 + a^2 + a^4}}, \quad (12)$$

и при необходимости построить модели со сколь угодно длинной, но фиксированной глубиной памяти.

Подчеркнем, что рассматриваемая модель потери памяти не является единственной возможной, однако она уже достаточно сложна для того, чтобы сделать невозможным использование аналити-

ческих методов, описанных в предыдущем разделе. Для конкретности в данной работе мы не занимаемся развитием аналитических методов и ограничиваемся изучением выборочного роста поля Якоби для нашей модели методами прямого численного моделирования.

4.2. Вычисление показателя Ляпунова

Теоретическое определение показателя Ляпунова предполагает переход к пределу при стремлении к бесконечности числа интервалов обновления. В этих предположениях существование положительного показателя Ляпунова доказано в математической теории Ферстенберга (см. изложение этой теории, ориентированное на читателя-физика в работе [12]). Естественно, в точном смысле слова это свойство нельзя проверить в рамках прямого численного моделирования, которое по своему смыслу предполагает вычисления на конечном отрезке изменения аргумента. Поэтому мы будем (не оговаривая это каждый раз специально) говорить о приближенной оценке скорости роста решения. Доказательство или опровержение того, что при бесконечном увеличении числа интервалов обновления эти оценки сходятся к определенному пределу и в случае нашей модели, представляет собой важную математическую задачу, но представляет ограниченный интерес для физики, поскольку практически интересные неустойчивости развиваются лишь конечное, хотя и большое время (в случае исходной задачи Зельдовича оно ограничено возрастом Вселенной). Поэтому мы решаем уравнение Якоби на конечном интервале, как правило, составляющем сто времен обновления. Опыт численного моделирования задачи показывает, что без учета эффектов памяти для вычисления показателя Якоби с разумной точностью вполне достаточно ста интервалов обновления. Поскольку показатель Ляпунова, вычисленный разумным образом в нормированных единицах, сопоставим с единицей, то длина этого промежутка интегрирования кажется более чем достаточной в контексте физики.

Искомую оценку показателя Ляпунова мы будем определять по графику, по вертикальной оси которого отложен логарифм решения, а по горизонтальной — длина отрезка интегрирования. Показатель Ляпунова представляет собой угловой коэффициент прямой, аппроксимирующей такую зависимость. Непосредственная мотивация задачи предполагает, что по вертикальной оси откладывается $\ln |y|$. Однако y хотя и растет в целом экспоненциально, в

редких случаях в точках, практически никогда не совпадающих с точками обновления, обращается в нуль, так что на подобном графике образуются узкие и глубокие минимумы (часто говорят — спайки). Они интересны сами по себе. В рамках исходной космологической задачи они интерпретируются как гравитационные линзы, образованные не отдельными небесными телами, а Вселенной как целым. Однако для нашей задачи эти спайки не важны и лишь затрудняют исследование. Поэтому мы вычисляем логарифм от длины вектора \mathbf{z} , равной $\sqrt{y^2 + (\tau y')^2}$. В работе [13] проверено, что таким образом получается правильная оценка показателя Ляпунова в задаче без учета памяти.

Поскольку уравнение Якоби на каждом интервале обновления решается явно в виде некоторой матрицы, действующей на решение на предыдущем интервале обновления, мы получаем решение нашего уравнения за несколько интервалов обновления, просто перемножая соответствующие матрицы.

4.3. Статистические свойства k

Для получения оценок показателя Ляпунова мы должны задать распределение вероятностей для k . В соответствии с исходным смыслом задачи естественно задать плотность вероятности k , симметричную относительно $k = 0$. При этом можно считать k распределенной по Гауссу. Однако нам представляется разумным рассмотреть и случаи флуктуирующей, но остающейся положительной (а в противоположном случае — отрицательной) кривизны, и сравнивать их с результатами, полученными для знакопеременной кривизны. Дело в том, что интересующая нас неустойчивость может быть трех типов [10]:

- решение экспоненциально растет и без флуктуаций кривизны, но они ответственны за флуктуации скорости роста ($k < 0$);
- решение растет на одних интервалах обновления и осциллирует на других, но, как оказывается, рост побеждает осцилляции (k знакопеременно);
- на всех интервалах обновления решение осциллирует, но может в итоге расти из-за наличия флуктуаций. Это явление похоже на явление резонанса ($k > 0$). Подобное поведение решения похоже на поведение решения системы линейных дифференциальных уравнений вида $dX/dt = \hat{A}X$ с постоянной матри-

цей в правой части, у которой старшее собственное значение комплексно, причем действительная часть старшего собственного значения положительна.

Исторически Зельдовича интересовал, конечно, второй из этих случаев, но он отмечал необходимость исследования и третьей возможности. В работе [10] показано, что третья ситуация действительно может реализовываться в данной модельной задаче, хотя в других задачах подобное явление было известно и ранее [14]. Мы рассмотрим, как влияет наличие памяти и в этих случаях. Поскольку гауссова случайная величина всегда, пусть и с малой вероятностью, знакопеременна, мы для сохранения знакоопределенности k рассматриваем модели с равномерным распределением k .

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Равномерное распределение кривизны, симметричное относительно ее нулевого значения

Рассмотрим сначала, как влияет память на рост решения при распределении кривизны, равномерном и симметричном относительно значения $K = 0$ (рис. 1). На рисунке видно, что решение растет экспоненциально во всех трех случаях, скорости роста (см. таблицу) близки друг к другу, однако в целом график для моделей с памятью лежит даже несколько выше, чем аналогичный график без учета эффектов памяти. Замечательно также, что решение с глубиной памяти 2 лежит выше, чем решение с глубиной памяти 1, хотя различие этих кривых меньше, чем при переходе от первой кривой ко второй. Естественно, результаты несколько зависят от реализации случайной последовательности кривизн. На рис. 1 показаны результаты для двух различных реализаций.

Перед тем, как перейти к более детальному сравнению результатов для модели с памятью с результатами, которые получаются без учета эффектов памяти, обратим внимание на то, что это сравнение можно проводить двумя способами, причем оба способа представляют, как нам кажется, самостоятельный интерес. Во-первых, при построении последовательности случайных кривизн для различных интервалов обновления можно в обеих моделях использовать один и тот же набор случайных чисел. Во-вторых, в этих моделях можно использовать независимые наборы случайных чисел. В пер-

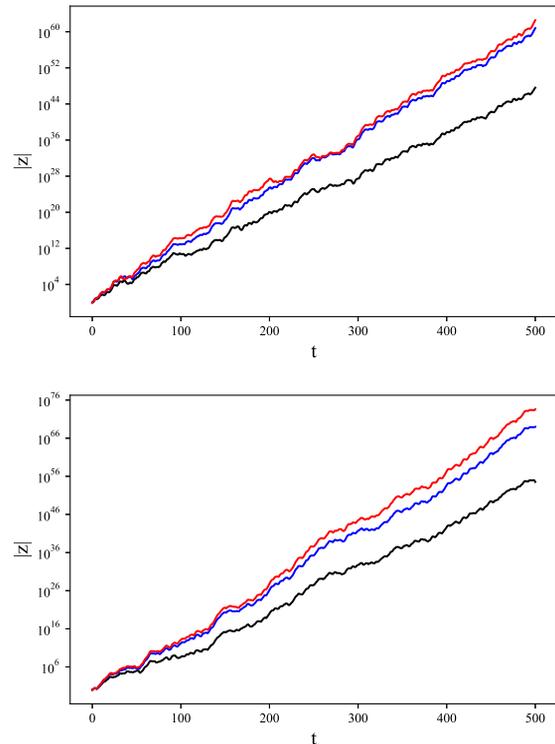


Рис. 1. Зависимости $|z|$ от t при $a = 0.5$, черные кривые — модель без учета памяти, синие — модель с глубиной памяти 1, красные — модель с глубиной памяти 2. Верхняя и нижняя панели — результаты для двух независимых реализаций K

вом случае мы выявляем, насколько возможно, эффекты памяти, отвлекаясь от всех других эффектов случайности, а во втором — выясняем, насколько велики эти эффекты по сравнению с другими эффектами, вызванными случайностью. Поскольку и то и другое кажется важным, на рис. 2, 3 мы приводим оба вида сравнения.

Оказывается, что дальнейшее увеличение глубины памяти не приводит к существенному изменению роста решения (рис. 2).

Увеличим теперь степень зависимости кривизны, т.е. коэффициент a . Теперь вторая и третья кривые гораздо больше отстоят друг от друга, чем на предыдущих рисунках. Однако, пожалуй, более значительное отличие состоит в том, что на кривой с наибольшей глубиной памяти хорошо виден участок, на котором рост практически прекращается, так что на графике образуется своеобразная полочка.

Количественные оценки скорости роста для нескольких реализаций в нескольких моделях распределения кривизны приведены в таблице. Эти

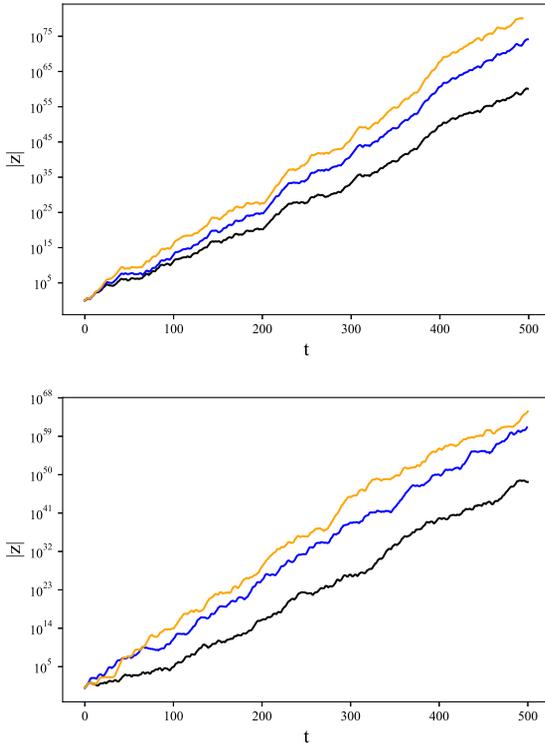


Рис. 2. Зависимости $|z|$ от t при $a = 0.5$, черные кривые — модель без учета памяти, синие — модель с глубиной памяти 1, желтые — модель с глубиной памяти 10. Верхняя панель — сравнение результатов для модели с памятью и без памяти для одного и того же набора случайных чисел, использованных для генерации последовательности кривизн. Нижняя панель — сравнение результатов для моделей, в которых последовательности кривизн порождены различными наборами случайных чисел

данные позволяют судить о степени статистической устойчивости полученных результатов, которая нам представляется соответствующей сделанным выводам.

5.2. Зависимость показателя Ляпунова от длин временных интервалов обновлений

Примененный нами подход ориентирован на выделение эффектов долгой памяти, а не на исследование параметрического пространства моделей. Однако мы в качестве примера исследовали зависимость показателя Ляпунова от времени памяти. На рис. 4 построены оценки для показателей Ляпунова, усредненные по 100 реализациям, и указаны оценки статистических погрешностей средних. По смыслу задачи мы использовали каждый раз для построения последовательности случайных кривизн незави-

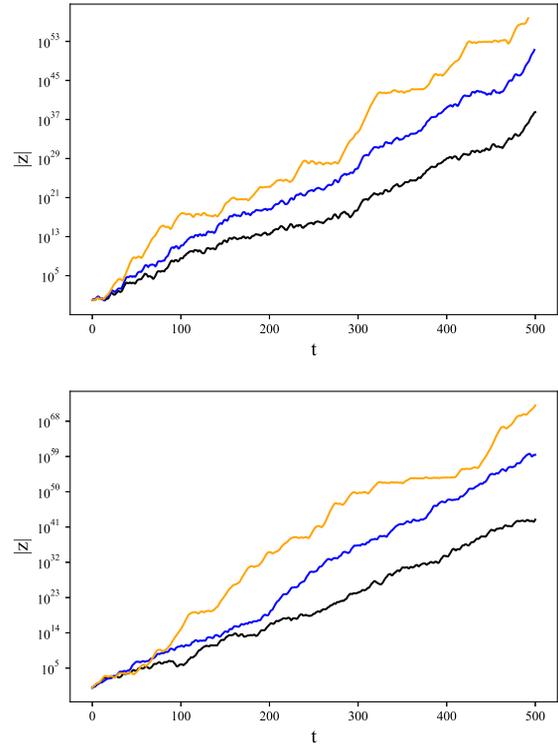


Рис. 3. Зависимости $|z|$ от t при $a = 1$, черные кривые — модель без учета памяти, синие — модель с глубиной памяти 1, желтые — модель с глубиной памяти 10. Верхняя и нижняя панели построены так же, как на рис. 2.

симые наборы случайных чисел, т.е. использовали второй метод сравнения. На рис. 4 видно, что интересующий нас эффект больше для малых времен памяти Δ , что не кажется противоречащим здравому смыслу.

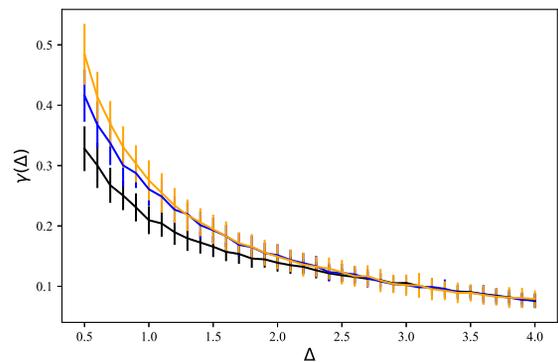


Рис. 4. Зависимости $\gamma(\Delta)$, черная кривая — модель без учета памяти, синяя — модель с глубиной памяти 1, желтая — модель с глубиной памяти 10

Таблица. Значения оценок коэффициента Ляпунова для 10 реализаций в нескольких моделях распределения кривизны и средние значения этих оценок

Угловые коэффициенты						
	Равномерное на $(-1, 1)$			Гаусс $N(0, 1)$		
	Глубина памяти					
n	0	1	10	0	1	10
1	0.197	0.257	0.283	0.37	0.43	0.46
2	0.21	0.256	0.283	0.273	0.31	0.312
3	0.196	0.249	0.337	0.333	0.37	0.35
4	0.21	0.29	0.233	0.313	0.347	0.352
5	0.233	0.308	0.343	0.303	0.363	0.372
6	0.22	0.283	0.369	0.34	0.37	0.40
7	0.24	0.288	0.322	0.32	0.378	0.364
8	0.195	0.237	0.286	0.363	0.388	0.432
9	0.208	0.264	0.298	0.298	0.368	0.401
10	0.208	0.281	0.332	0.28	0.328	0.305
$\bar{\gamma}$	0.211	0.272	0.309	0.319	0.365	0.375

6. МОДЕЛЬ С ГАУССОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КРИВИЗНЫ

Поскольку мы изучаем эффекты длинной памяти сравнивая поведение поля Якоби для случаев, когда кривизна флуктуирует, будучи отрицательной, положительной и знакопеременной, то нам неудобно рассматривать в качестве типичного примера гауссово распределение кривизны, которое всегда знакопеременно. Однако вне нашего сопоставления изучение случая, в котором кривизна распределена по Гауссу, представляет также очевидный интерес. Рассмотрение этого случая не вызывает технических трудностей. Для того чтобы сделать результаты сравнимыми с результатами с равномерным распределением, мы выбираем параметры гауссова распределения так, чтобы среднее совпадало со средним в равномерном распределении, т.е. было равно нулю, а среднеквадратичное значение — с половиной размаха равномерного распределения. Соответствующие результаты приведены на рис. 5 и в таблице. Видно, что оценки показателей Ляпунова при переходе к гауссову распределению, как правило, несколько увеличиваются, что, как нам представляется, вписывается в нашу интерпретацию результатов.

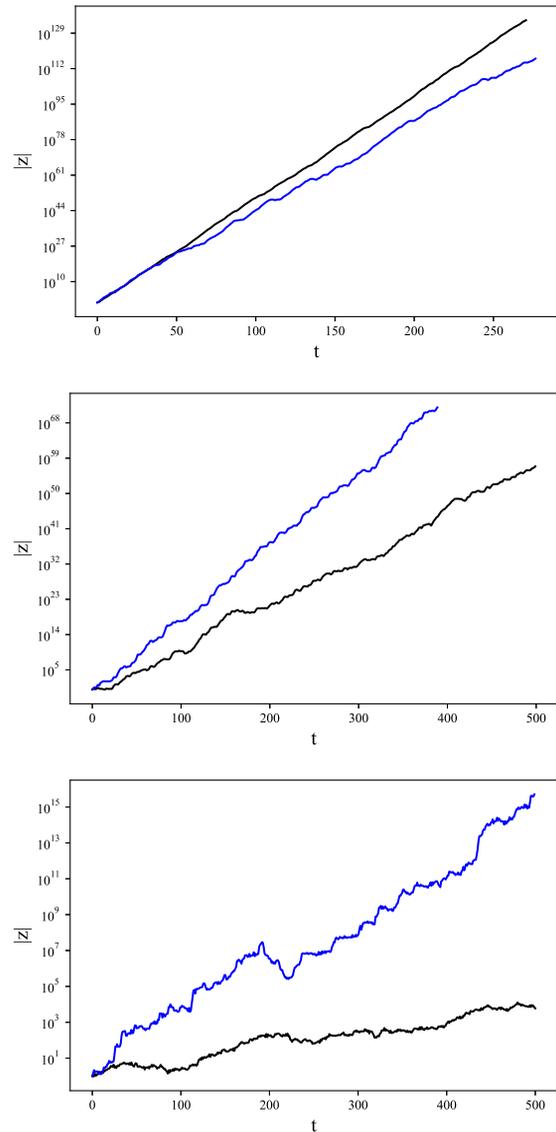


Рис. 5. Зависимости $|z|$ от t при $a = 0.5$, синие кривые — модель с использованием распределения Гаусса и глубиной памяти 1, черные — модель с использованием равномерного распределения и глубиной памяти 1. Для первого (сверху вниз) графика среднее равно -1 , для второго — 0 , для третьего — 1

7. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Суммируя полученные результаты, можно отметить следующие выводы. Учет эффектов памяти по крайней мере в рамках рассмотренной модели не приводит к радикальному пересмотру результатов, полученных для модели с обновлением. Решение изучаемой системы по-прежнему растет экспоненциально, полученные скорости роста (показатели Ляпунова) близки к тем, которые получаются

для модели с обновлением, во всяком случае, это величины одного порядка. Естественно, эти результаты, полученные для очень простой модели, хочется экстраполировать на гораздо более сложные задачи — прежде всего, на изучение мелкомасштабного динамо, т.е. на изучение самовозбуждения магнитного поля в турбулентном или конвективном потоке проводящей среды, не связанном непосредственно с эффектами зеркальной асимметрии течения. В этом контексте результаты выглядят оптимистически и снимают естественные опасения, возникающие в связи с пренебрежением эффектами памяти в аналитической теории, опирающейся на уравнение Казанцева. Что касается результатов прямого численного моделирования, то их возможности тоже небезграничны, а интерпретация полученных результатов вызывает непростые проблемы даже в тех случаях, когда решены все проблемы получения решения трехмерных уравнений, управляющих эволюцией магнитного поля и течения (см., например, [15, 16]). Во всяком случае, получение оценок скоростей роста, аналогичных полученным выше, потребовало бы многолетних специализированных исследований научной группы, не испытывающей материальных ограничений в своей работе. В принципе, изучение рассматриваемых вопросов экспериментальными методами тоже возможно, однако даже для тех неустойчивостей, документирование которых представляет непосредственный экономический интерес, обнаружение выборки экспериментальных данных с фиксированными статистическими свойствами и объемом, достаточным для подобных исследований, вызывает серьезные затруднения [17]. Поэтому можно надеяться, что с прагматической точки зрения роль эффектов памяти в рассматриваемом круге задач прояснена достаточно, так что эффекты памяти при экстраполяции имеющихся сведений, скажем, о мелкомасштабном динамо на реалистические ситуации опасений, по крайней мере на имеющемся уровне знаний, не вызывают.

С другой стороны, в полученных результатах есть элементы, которые кажутся неожиданными, контринтуитивными. Прежде всего кажется неожиданным, что учет памяти приводит не к уменьшению, а к некоторому увеличению скорости роста изучаемого поля. Естественно было бы думать, что учет памяти делает среду менее случайной, поэтому эффект, тесно связанный со случайностью, должен уменьшаться.

Хотелось бы более глубоко разобраться в причине, вызывающей такое усиление неустойчивости. Это оказывается возможным, если несколько изме-

нить модель памяти. Будем считать, что в каждый момент обновления случайным образом определяется, останется ли величина K той же, что и на предыдущем этапе эволюции (это происходит с малой вероятностью μ), или она примет новое значение, независимое от предыдущего (это происходит с вероятностью $1 - \mu$). Эта вероятностная модель тоже, как нам кажется, представляет научный интерес, но ее изучение в полном объеме выходит за рамки данной статьи. Нам однако сейчас важно, что эта модель допускает аналитическое исследование. В рамках этого исследования обнаруживается следующий важный эффект.

Природа рассматриваемой неустойчивости связана с векторным характером эволюционирующей величины. Поэтому в решении (7) эволюционного уравнения фигурируют матрицы, которые, вообще говоря, некоммутативны. Если бы мы рассматривали эволюцию скалярной величины, которая описывается уравнением

$$(d/dt)y = a(t)y, \tag{13}$$

где $a(t)$ — обновляющийся случайный процесс с нулевым средним и среднеквадратичным значением σ , постоянный на интервалах обновления, то его решение росло бы как

$$y = \exp(\sqrt{t\Delta}\sigma\zeta), \tag{14}$$

где ζ — гауссова случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией, т.е. субэкспоненциально (для определенности мы предположили, что a в каждый момент времени распределено по Гауссу). Если же теперь мы рассмотрим это же уравнение, но предположим, что случайный процесс a имеет память, описываемую нашей второй моделью, то при вычислении показателя Ляпунова придется отдельно рассмотреть различные варианты того, как теряется память в данной реализации случайного процесса, причем среди этих вариантов возникнет и такой, в котором величина a примет положительное значение $a_0 > 0$ и будет сохранять его в ходе всех следующих обновлений. Естественно, статистический вес этого варианта уменьшается как $\mu^n \propto \exp(t/\Delta \ln \mu)$, однако уменьшение статистического веса компенсируется экспоненциальным ростом вклада этой реализации $\propto \exp(a_0 t)$. В итоге решение может расти экспоненциально, что невозможно без учета эффектов памяти.

Иными словами, по крайней мере часть обнаруженного эффекта памяти связана с тем, что память дает возможность дольше обычного поработать

таким реализациям K , которые особо благоприятны для роста решения. Понятно теперь, почему возникают и участки решения, на которых рост уменьшается или вовсе прекращается — память иногда дает возможность подольше поработать и неудачным реализациям K .

Вопрос о том, насколько реалистична модель памяти, которая в принципе дает возможность (пусть и с экспоненциально уменьшающейся вероятностью) возникать реализациям, в которых среда фактически перестает быть случайной, выходит, конечно, за рамки возможностей теории вероятностей или теоретической физики. Во многих случаях такими маловероятными событиями можно свободно пренебрегать, но наличие явлений перемежаемости при развитии неустойчивостей в случайных средах показывает, что здесь это приходится делать с определенной осторожностью. Во всяком случае, такая объяснительная модель непривычна в кругу вопросов, рассматриваемых в физике. Отметим однако с некоторым удивлением, что гуманитарные науки легко привлекают подобные модели в тех случаях, когда нужно объяснить, как в группе более-менее однотипных участников конкуренции выделяется бесспорный лидер (см., например, [18]).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. S. Il'yn, A. V. Kopyev, V. A. Sirota, and K. P. Zybin, *Phys. Rev. E* **105**, 054130 (2022).
2. Д. Д. Соколов, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик, *УФН* **184**, 313 (2014).
3. E. A. Illarionov and D. D. Sokoloff, *Phys. Rev. E* **104**, 015214 (2021).
4. Я. Б. Зельдович, С. А. Молчанов, А. А. Рuzмайкин, Д. Д. Соколов, *УФН* **152**, 3 (1987).
5. D. D. Sokoloff and E. A. Illarionov, *J. Plasma Phys.* **81**, 395810402 (2015).
6. Я. Б. Зельдович, *Астрон. ж.* **41**, 19 (1964).
7. I. Goldhirsch, P. L. Sulem, and S. A. Orszag, *Physica D* **27**, 311 (1987).
8. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Phys. Rev. E* **51**, 5609 (1995).
9. Д. Д. Соколов, А. А. Чикина, Е. А. Илларионов, *Астрон. ж.* **98**, 355 (2021).
10. E. A. Illarionov and D. D. Sokoloff, *Phys. Rev. E* **107**, 044110 (2023).
11. V. Lamburt, D. Sokoloff, and V. Tutubalin, *Astrophys. Space Sci.* **298**, 409 (2005).
12. Ya. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin, S. A. Molchanov, and D. D. Sokoloff, *J. Fluid Mech.* **144**, 1 (1984).
13. А. Э. Мамедова, Д. Д. Соколов, *Вестник МГУ, физика, астрон.* **78**, 2350102 (2023).
14. В. Н. Тутубалин, *Вестник МГУ, матем., мех.* **3**, 6 (1990).
15. A. Brandenburg and D. Sokoloff, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **96**, 319 (2002).
16. A. Brandenburg, K. Subramanian, and D. Sokoloff, *Space Sci. Rev.* **169**, 123 (2012).
17. А. О. Калинин, Д. Д. Соколов, В. Н. Тутубалин, *Вестник МГУ, физика, астрон.* **5**, 17 (2017).
18. Ф. Бродель, *Материальная цивилизация, экономика и капитализм*, т. 1–3, Весь Мир, Москва (2007).