

# СВЕТОВОЙ КОНТРОЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАНОЧАСТИЦ В КОЛЛОИДАХ С УСИЛЕНИЕМ И ПОГЛОЩЕНИЕМ

А. А. Жаров <sup>a</sup>, Н. А. Жарова <sup>b\*</sup>

<sup>a</sup> Институт физики микроструктур Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия

<sup>b</sup> Институт прикладной физики Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 5 июня 2024 г.,  
после переработки 4 августа 2024 г.  
Принята к публикации 14 августа 2024 г.

Изучается воздействие света на композитную систему, которая представляет собой сбалансированный по поглощению/усилению коллоидный раствор поглощающих наночастиц в усиливающей жидкости. Рассмотрена модель плоского слоя коллоида, на который по нормали падает плоская (ТЕМ) электромагнитная волна. Совместное действие стрикции и силы увлечения (сила, возникающая вследствие передачи поглощающим частицам импульса фотонов) вызывает пространственное перераспределение концентрации частиц, в результате чего локальный баланс поглощения и усиления в слое нарушается, и выделяются пространственные области, в которых происходит усиление и поглощение света. Показано, что в зависимости от интенсивности падающего излучения могут реализоваться как плавные, так и почти ступенчатые профили концентрации наночастиц. Соответствующие распределения эффективной диэлектрической проницаемости коллоида обладают РТ (Parity-Time)-симметрией (отвечает условию  $\varepsilon(z) = \varepsilon^*(-z)$ ) при малой интенсивности поля накачки, но отличаются от РТ-симметричных распределений при умеренных и высоких интенсивностях. Создание контролируемого профиля локального усиления и поглощения света может служить платформой для изучения специфических неэрмитовых оптических эффектов, а также расширяет возможности оптической диагностики распределения наночастиц в коллоидных растворах со скомпенсированным поглощением.

DOI: 10.31857/S0044451024120022

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Управление потерями и особенно создание условий для распространения незатухающих оптических мод является давней, но до сих пор актуальной проблемой в оптике. Полная компенсация неоднородных в пространстве потерь за счет включения в систему активных оптических элементов (накачки) носит индивидуальный характер: для каждой моды в принципе нужно подбирать свой профиль накачки. Однако существует целый класс РТ (Parity-Time)-симметричных систем (инвариантных по отношению к инверсии пространственных координат и обращению времени [1]), в которых такая компенсация (для РТ-симметричных мод) достигается автоматически.

Концепция РТ-симметрии происходит из квантовой механики [2], где было показано, что гипотетический комплексный РТ-симметричный потенциал может иметь состояния (также РТ-симметричные собственные функции) с действительными собственными значениями. В оптике для квазимонохроматических ( $\propto \exp(i\omega t)$ ) процессов обращение времени соответствует обращению знака при мнимой единице, и РТ-симметрия отвечает условию, определяющему специфическое пространственное распределение действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости,  $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon^*(-\mathbf{r})$  [3].

Теоретические и экспериментальные исследования показали, что изменение параметров в РТ-симметричной системе (обычно это рост мнимой части проницаемости, как положительной, так и отрицательной) может приводить к нарушению РТ-симметрии моды и трансформации ее спектра из чисто действительного в комплексный. Соответствующую

\* E-mail: zhani@appl.sci-nnov.ru

щую точку перехода, в которой происходит вырождение собственных значений, принято называть «исключительной» (exceptional point), а сам переход от действительных к комплексным собственным значениям можно трактовать как фазовый переход второго рода [4].

Экспериментальная доступность оптических РТ-симметричных систем и, в частности, эффект исключительных точек дали толчок для ряда новых приложений, таких как устройства для индуцированного поглощения и усиления [1,5,6], невзаимный транспорт фотонов [7], сенсинг [8] и т.д. В настоящее время оптические РТ-симметричные структуры получают на основе полупроводниковых материалов III–V групп [6] или допированного кристалла кремния [9].

В этой работе мы предлагаем модель неэрмитовой оптической системы на основе перестраиваемого и конфигурируемого жидкого метаматериала (коллоидный раствор поглощающих частиц в усиливающей жидкости [10]), который под действием света может демонстрировать как РТ-симметричные, так и отличные от РТ-симметричных распределения диэлектрической проницаемости.

Аналогичная постановка задачи применялась в недавней работе авторов [11], где в качестве метаматериальной среды рассматривался коллоид со взвешенными в нем частицами двух типов (усиливающие и поглощающие), которые обеспечивали нулевой баланс усиления–поглощения. Под действием света в такой системе поглощающие частицы испытывают силу увлечения, которая направлена вдоль волнового вектора и связана с передачей импульса фотона, в то время как сила, действующая на активные частицы, направлена в противоположную сторону и появляется в результате стимулированного излучения [12–14]. В [11] было показано, что перераспределение под действием этих сил пространственной плотности усиливающих и поглощающих частиц всегда приводит к образованию РТ-симметричного профиля эффективной диэлектрической проницаемости.

Более реалистичная модель среды, используемая в настоящей работе, предполагает, что усиление света достигается за счет фотоактивного геля [15] и остается однородным в пространстве, а структурная неоднородность среды появляется из-за сил увлечения и стрикции, действующих на поглощающие частицы. В отличие от [11], здесь мы не ограничиваемся линейным приближением при расчете динамики частиц.

Как будет показано ниже, при высокой интенсивности излучения устанавливается сильно нелинейный режим, в котором возмущение концентрации частиц может стать порядка и больше невозмущенной плотности. Это приводит к возможности формирования как плавных, так и квазиступенчатых профилей концентрации частиц, которые могут обладать РТ-симметрией, а могут и отличаться от нее. Это дает основание рассматривать такую перестраиваемую систему в качестве платформы для изучения специфических неэрмитовых оптических эффектов, а также для диагностики пространственных распределений наночастиц с помощью пробных волн.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим рассеяние электромагнитного излучения плоским слоем композитной среды, которая представляет собой коллоидный раствор поглощающих наночастиц в активной жидкости (геле). Жидкость обеспечивает усиление электромагнитных волн такое, что в равновесном состоянии, когда частицы равномерно распределены по объему, потери и усиление оказываются скомпенсированы, и в среднем среда не усиливает и не ослабляет проходящее через нее излучение.

Эффективную диэлектрическую проницаемость среды в дипольном приближении при достаточно низкой концентрации наночастиц можно записать в виде

$$\varepsilon \cong \varepsilon_0 + V[\alpha(1+n) + i\tilde{\alpha}n], \quad (1)$$

где  $\varepsilon_0$  — действительная часть проницаемости жидкости без частиц,  $V = 4\pi b^3 N_0/3$  — объемная доля частиц в жидкости,  $N_0$  — средняя по объему концентрация наночастиц,  $b$  — радиус частиц (для простоты будем полагать, что частицы имеют сферическую форму),  $\alpha$  и  $\tilde{\alpha}$  — действительная и мнимая части поляризуемости частиц, и мы ввели безразмерную переменную  $n = N/N_0 - 1$ , характеризующую отклонение локальной плотности частиц  $N$  от равновесного значения  $N_0$ . Здесь также учтено, что в однородной среде ( $n = 0$ ) поглощение и усиление скомпенсированы,  $\text{Im } \varepsilon = 0$ .

Жидкостная компонента среды обеспечивает усиление, а наночастицы отвечают за поглощение. Однако каждая отдельная частица в процессе поглощения электромагнитной волны получает не только ее энергию, но и импульс. В результате на частицу действует эффективная сила увлечения

(drag, or scattering force). Эта сила и связанный с ней эффект радиационного давления проявляются в экспериментах по лазерному охлаждению и захвату нейтральных частиц [16], разделению, обнаружению и сортировке наночастиц [17, 18]. Очевидно, что сила увлечения пропорциональна произведению плотности потока энергии электромагнитного поля на коэффициент поглощения (мнимую часть дипольного момента частицы).

В квазистатическом приближении выражение для силы увлечения имеет вид

$$F^{sc} = -i\tilde{\alpha}\frac{b^3}{6}\left(E\frac{\partial E^*}{\partial z} - E^*\frac{\partial E}{\partial z}\right) = \tilde{\alpha}\frac{b^3}{3}\text{Im}\left(E^*\frac{\partial E}{\partial z}\right). \quad (2)$$

Кроме того, на частицы также действует ponderomotorная градиентная (стрикционная) сила

$$F^{grad} = \alpha\frac{b^3}{3}\text{Re}\left(E^*\frac{\partial E}{\partial z}\right) = \alpha\frac{b^3}{6}\nabla|E|^2. \quad (3)$$

Градиентная сила не связана с поглощением, но приводит в зависимости от знака  $\alpha$  либо к втягиванию частиц в область сильного поля, либо к выталкиванию из этой области <sup>1)</sup>.

Под действием этих сил и градиента теплового давления частицы начинают двигаться, и в вязкой среде их скорость  $u$  определяется из уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\tau} = \frac{F^{grad} + F^{sc}}{m} - V_T^2\frac{\partial n/\partial z}{1+n}, \quad (4)$$

где  $\tau$  — характерное время релаксации скорости частиц в вязкой жидкости,  $m$  — масса частицы,  $V_T = \sqrt{k_B T/m}$  — тепловая скорость,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура.

При распространении электромагнитного излучения в среде произойдет перераспределение концентрации наночастиц, что, в свою очередь, приведет к появлению внутри слоя локальных областей с усилением и поглощением. В стационарном состоянии распределение концентрации частиц будет удовлетворять уравнению

$$\frac{F^{grad} + F^{sc}}{m} = V_T^2\frac{n'}{1+n}, \quad (5)$$

где штрих обозначает пространственную производную  $\partial/\partial z$ .

<sup>1)</sup> Наночастицы поглощают световое излучение, поэтому коэффициент  $\tilde{\alpha}$  должен быть положительным,  $\tilde{\alpha} > 0$ . Положительный знак стрикционного параметра  $\alpha$  означает, что частицы должны втягиваться в область сильного поля. Это справедливо для диэлектрических частиц, однако знак  $\alpha$  может меняться в случае металлических наночастиц.

### 3. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА: СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассмотрим нормальное падение плоской (ТЕМ) электромагнитной волны на слой толщиной  $L$  ( $-L/2 \leq z \leq L/2$ ). Будем считать, что снаружи слоя диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 1$ . Под действием электромагнитного излучения (стрикции и силы увлечения) устанавливается стационарное состояние с неоднородной концентрацией частиц,  $n \neq 0$ . Важно отметить, что перераспределение частиц в слое не меняет их полное число, так что возмущение концентрации, усредненное по толщине слоя, равно нулю,

$$\int_{-L/2}^{L/2} ndz = 0.$$

В приближении медленно меняющихся амплитуд поле внутри слоя является суперпозицией плоских волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях вдоль  $z$ ,

$$E = A_+(z)\exp(ikz) + A_-(z)\exp(-ikz),$$

где комплексные амплитуды

$$A_{\pm} \equiv a_{\pm}\exp(i\phi_{\pm})$$

слабо меняются на длине волны,

$$|A'_{\pm}| \ll k|A_{\pm}|, \quad k = k_0\sqrt{\varepsilon_0 + V\alpha},$$

$k_0 = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света. В этом случае можно приближенно записать <sup>2)</sup>

$$E^*E' \approx ika_+^2 + a_+a'_+ + i\phi'_+a_+^2 - ika_-^2 + a_-a'_- + i\phi'_-a_-^2$$

и, подставляя это выражение в (5), получить соотношение <sup>3)</sup>

$$\frac{n'}{1+n} = \alpha(a_+^2 + a_-^2)' + \tilde{\alpha}[k(a_+^2 - a_-^2) + \phi'_+a_+^2 + \phi'_-a_-^2], \quad (6)$$

<sup>2)</sup> В дальнейшем мы считаем электрическое поле нормированным на величину  $E_c = \sqrt{6k_B T/b^3}$ .

<sup>3)</sup> Хотя, как отмечалось выше, концентрация наночастиц предполагается малой, но относительное возмущение концентрации может оказаться значительным, вплоть до полного выталкивания частиц из некоторой локальной области. Поэтому мы учитываем слагаемое  $n$  в знаменателе выражения (6).

причем вклад от слагаемых  $\phi'_{\pm} a_{\pm}^2$  в изменение концентрации можно не учитывать, поскольку  $\phi'_{\pm} \ll k$ .

Распространение светового излучения в слое описывается волновым уравнением,

$$d^2 E/dz^2 + k_0^2 \varepsilon E = 0,$$

которое в первом порядке малости по амплитуде возмущений принимает форму

$$\pm 2ik(a'_{\pm} + i\phi'_{\pm} a_{\pm}) + k_0^2 V(\alpha(1+n) + i\tilde{\alpha}n)a_{\pm} = 0. \quad (7)$$

Разделяя в уравнении (7) действительную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} \frac{(a_+^2)'}{a_+^2} &= -\Gamma n, & \frac{(a_-^2)'}{a_-^2} &= \Gamma n, \\ \phi'_{\pm} &= \pm \Gamma(\alpha/2\tilde{\alpha})(1+n), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Gamma = k_0^2 \tilde{\alpha} V/k.$$

Суммируя первые два из уравнений (8), мы найдем, что в рамках использованных приближений произведение амплитуд волн, распространяющихся вдоль  $z$  и в противоположном направлении, не зависит от  $z$ :

$$a_+^2 a_-^2 = C. \quad (9)$$

Здесь  $C$  — константа, которая, как будет показано ниже, определяется условиями непрерывности электрического и магнитного полей на границах слоя.

Основную систему уравнений удобно представить в безразмерном виде с минимальным числом коэффициентов. Соответствующая нормировка пространственной переменной,  $\tilde{z} = \Gamma z$  (в дальнейшем мы опускаем знак  $\sim$ ), позволяет записать первое уравнение системы (7) в виде

$$\frac{s'}{s} = -n, \quad (10)$$

где мы ввели величину  $s \equiv a_+^2$ . Уравнение для концентрации (6) переписется с учетом локальной связи амплитуд (9),  $a_-^2 = C/s$ , как

$$\begin{aligned} \frac{n'}{1+n} &= \gamma \left[ (s - C/s) + \frac{\alpha}{k\tilde{\alpha}}(s + C/s)' \right] = \\ &= \gamma(s - C/s)(1 - \beta n) \end{aligned} \quad (11)$$

с коэффициентами

$$\gamma = k\tilde{\alpha}/\Gamma, \quad \beta = \alpha\Gamma/(k\tilde{\alpha}).$$

Деление выражения (10) на (11) дает дифференциальную связь между  $s$  и  $n$ :

$$\gamma \frac{(s - C/s)ds}{s} = -\frac{ndn}{(1+n)(1-\beta n)}. \quad (12)$$

Это соотношение можно проинтегрировать и получить в результате

$$\begin{aligned} \frac{\log|1+n| + (1/\beta)\log|1-\beta n|}{\gamma(1+\beta)} - \\ - \left( s + \frac{C}{s} \right) = \text{const}. \end{aligned} \quad (13)$$

Заменив в последней формуле  $n$  на  $-s'/s$ , найдем зависимость  $s'(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\log|1-s'/s| + (1/\beta)\log|1+\beta s'/s|}{\gamma(1+\beta)} - \\ - \left( s + \frac{C}{s} \right) = \text{const}, \end{aligned} \quad (14)$$

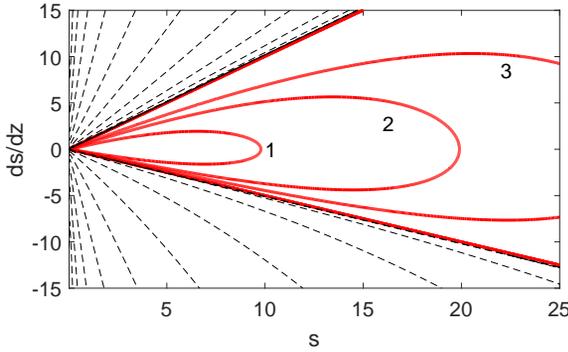
и таким образом получим фазовую плоскость исходной системы.

Для анализа решения на фазовой плоскости прежде всего отметим, что для значений  $n = -1$  и  $n = 1/\beta$  выражение в левой части уравнения (13) обращается по абсолютной величине в бесконечность. Соответственно, на плоскости  $(s', s)$  прямые линии, задаваемые уравнениями  $s' = s$  и  $s' = -s/\beta$ , делят фазовую плоскость на три сектора:  $s' < -s/\beta$ ,  $-s/\beta < s' < s$  и  $s < s'$ . Фазовые траектории не могут пересечь границы между секторами, поэтому физический смысл имеют лишь решения, относящиеся к центральному сектору, где фазовые траектории проходят через области как с положительными, так и с отрицательными значениями  $s'$ . В двух других секторах  $s'$  (и соответственно  $n = -s'/s$ ) не меняет знак, в результате чего невозможно удовлетворить условию равенства нулю концентрации, усредненной по какому-либо отрезку фазовой траектории.

На рис. 1 приведена в качестве примера фазовая плоскость системы уравнений для параметров  $C = 2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 0.0125$ . Соответствующие значения константы в (14) равны  $-10$  (кривая 1),  $-20$  (кривая 2) и  $-30$  (кривая 3).

Приближение медленных амплитуд предполагает, что волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях по оси  $z$ , не взаимодействуют внутри слоя, они могут обмениваться энергией лишь на границах. В задаче о рассеянии падающего излучения на слое граничные условия при  $z = L/2$  записываются как

$$a_-/a_+(z = L/2) = \mu,$$



**Рис. 1.** Фазовая плоскость системы уравнений (10), (11) для параметров  $C = 2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 0.0125$ . Соответствующие значения константы в (14) равны  $-10$  (кривая 1),  $-20$  (кривая 2),  $-30$  (кривая 3). Фазовые траектории, относящиеся к верхнему и нижнему секторам фазовой плоскости, не имеют физического смысла, поскольку на любом отрезке таких траекторий интеграл от  $s'/s$  (от концентрации частиц) отличен от нуля

где  $\mu = (k - 1)/(k + 1)$  и  $k = \sqrt{\epsilon}$ . Таким образом, на границе слоя отношение амплитуд гармоник, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях, определяется материальными параметрами слоя и окружающей среды (напомним, что диэлектрическая проницаемость окружающей среды равна 1). С другой стороны, для любой точки внутри слоя, в том числе и на границе, мы имеем из соотношения (9)

$$a_+^2 a_-^2 = C.$$

Из соотношений (8) можно найти зависимость амплитуд от  $z$ ,

$$a_{\pm}^2(z) = a_{\pm}^2(-L/2) \exp\left(\mp \Gamma \int_{-L/2}^z ndz\right),$$

и заметить, что амплитуды на границах равны

$$a_+(z = L/2) = a_+(z = -L/2),$$

$$a_-(z = L/2) = a_-(z = -L/2),$$

поскольку

$$\int_{-L/2}^{L/2} ndz = 0$$

(число частиц в слое сохраняется). Таким образом, слой не усиливает и не ослабляет излучение.

Решая линейную задачу рассеяния падающей волны с амплитудой  $A_{inc}$  на слое, получим связь между  $a_{\pm}$  и  $A_{inc}$ :

$$2A_{inc} = \sqrt{s_0}(1 + k)|1 - \mu^2 \exp(2ikL)|, \quad (15)$$

$$a_-(z = \pm L) = \mu a_+(z = \pm L), \quad C = \mu^2 s_0^2,$$

где

$$s_0 = a_{\pm}^2(z = -L/2).$$

Эти соотношения полностью определяют связь между константами задачи и физическими параметрами. Еще раз отметим, что коэффициенты отражения и прохождения даже в сильно нелинейном случае оказываются такими же, как при рассеянии излучения на слое с невозмущенной диэлектрической проницаемостью, и для стороннего наблюдателя нелинейные эффекты внутри слоя никак не проявляются.

#### 4. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

В случае  $\beta = 1$ , когда задача является РТ-симметричной, нетрудно найти в линейном приближении по параметрам  $s - s_0$ ,  $n$  полное решение. Упрощенная система уравнений

$$s' = -ns_0, n' = \gamma(s - C/s)$$

сводится к гармоническому уравнению для величины  $\nu$ <sup>4</sup>,

$$\nu = \int_{-L/2}^z ndz,$$

$$\nu'' = \gamma s_0(1 - \nu - (1 + \nu)\mu^2) \quad (16)$$

и имеет решение в виде

$$\nu = A + B \cos(\kappa z)$$

с параметрами

$$\kappa = \sqrt{\gamma s_0(1 + \mu^2)},$$

$$A = (1 - \mu^2)/(1 + \mu^2),$$

$$B = -A/\cos(\kappa L/2).$$

В итоге для  $n = \nu'$  получаем

$$n = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \kappa \frac{\sin(\kappa z)}{\cos(\kappa L/2)}.$$

Очевидно, что если  $\kappa L = m\pi$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), то это решение неприменимо. На первый взгляд, для малых  $\kappa \ll 1$ , исключив резонансные точки,  $\kappa L \neq m\pi$ ,

<sup>4</sup> Если  $\beta \neq 1$ , то в тех же приближениях основное уравнение заменяется на уравнение гармонического осциллятора с затуханием ( $\beta > 1$ ) или с накачкой ( $\beta < 1$ ), и аналитическое решение выглядит довольно громоздко.

этой формулой можно пользоваться, поскольку все условия применимости выполняются, но это не так. При получении упрощенного уравнения (16) мы использовали условие  $\nu \ll 1$ , и в этом случае правая часть формулы будет почти постоянной и не меняет знак, а в левой части стоит производная от концентрации по координате. Таким образом, фактически мы полагали, что  $n'(z)$  — знакопостоянная функция, и соответственно  $n(z)$  — монотонная функция. С другой стороны, формальное использование полученного аналитического решения говорит, что при увеличении параметра  $\kappa L > \pi$  профиль  $n(z)$  становится немонотонным (при больших  $L$  может включать даже несколько периодов синуса). Численное исследование подтверждает, что такого рода немонотонные распределения концентрации не реализуются, так что грубая оценка применимости найденного решения сводится к неравенству  $\kappa L/\pi < 1$ .

Приближенное решение можно найти также в другом предельном случае сильных возмущений концентрации и сильных полей. Полученная в результате структура может при этом существенно отличаться от РТ-симметричной. Численное исследование (см. ниже) показывает, что при больших  $L$  и  $s_0$  плотность частиц  $N$  имеет вид ступеньки с почти нулевой концентрацией в области слоя  $-L/2 < z < z_{st}$  (вблизи от точки входа излучения) и постоянной плотностью в оставшейся части слоя. Предполагая, что профиль концентрации имеет ступенчатую структуру

$$N \approx \begin{cases} 0, & -L/2 < z < z_{st}, \\ N_{max}, & z_{st} < z < L/2, \end{cases}$$

где  $z_{st}$  — координата скачка плотности, а  $N_{max}$  — максимальная плотность в слое, можно найти оба этих параметра. Положение ступеньки

$$z_{st}/L = 0.5(1 - \beta)/(1 + \beta)$$

определяется из условия сохранения числа частиц, а величина

$$N_{max} = 1 + 1/\beta$$

находится из формулы (11), если в ней положить  $n' = 0$ . Заметим, что при малых  $\beta$  область локализации частиц сжимается, приближаясь к выходной границе слоя. Экспоненциальный рост поля в области  $z < z_{st}$ ,

$$s = s_0 \exp(z + L/2),$$

при  $z > z_{st}$  сменяется его экспоненциальным убыванием,

$$s = s_0 \exp[z_{st} - (N_{max}/N_0 - 1)z].$$

## 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

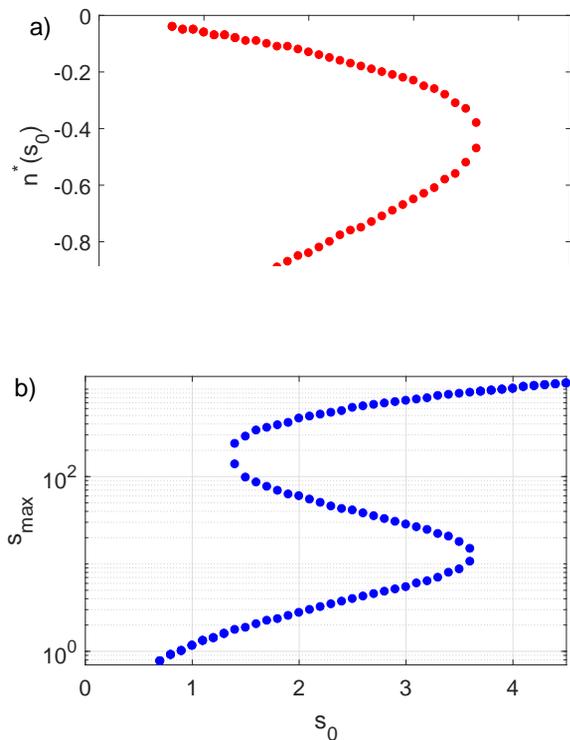
Для нахождения стационарного распределения интенсивности поля и концентрации численно решалась система дифференциальных уравнений первого порядка (10), (11). На входной границе слоя  $z = -L/2$  задавались значения

$$a_+^2(-L/2) = s_0, \quad a_-^2(-L/2) = C/s_0$$

(см. (15)), найденные из решения задачи рассеяния падающей волны на невозмущенном слое, а также возмущение концентрации частиц  $n_0 = n(-L/2)$ . В отличие от параметров  $s_0$  и  $C$ , величина  $n_0$  не может быть прямо определена через физические (внешние) параметры задачи, но очевидно также, что она не может быть произвольной. Дополнительным условием, определяющим  $n_0$ , является сохранение числа частиц в слое,  $\langle n \rangle = 0$ . Однако для того, чтобы проверить выполнение этого условия, нужно сначала решить задачу и найти зависимость  $n(z)$  на всем интервале от  $-L/2$  до  $L/2$ . Поэтому численное решение приходится находить для массива значений  $n_0$  (от  $-1$  до  $0$ ) и затем выбирать из этого множества решений те, которые удовлетворяют условию  $\langle n \rangle = 0$ .

При фиксированной толщине слоя и (нормированных) материальных параметрах  $\gamma, \beta$  (см. систему уравнений (10), (11)), характеризующих усиление в активной среде и роль стрикции по отношению к силе увлечения, интересно найти зависимость стационарного решения от интенсивности падающей волны. Чтобы получить ответ на этот вопрос, следует многократно повторить описанную выше процедуру для двумерного массива параметров  $(n_0, s_0)$  и получить в результате кривую  $n^*(s_0)$  на плоскости  $(n_0, s_0)$ .

Такая процедура была проделана для набора параметров  $L = 9, \gamma_0 = 1.25 \cdot 10^{-2}, k = 2, \beta = 0.6$ , и результаты вычислений показаны на рис. 2. Оказывается, что стационарное решение не всегда является единственным. Существует диапазон значений интенсивности падающей волны (на рисунке это примерно отвечает интервалу  $s_0$  от 1.5 до 3.5), в котором таких стационарных решений три, а зависимость  $n^*(s_0)$  имеет характерный вид гистерезисной кривой (см. рис. 2 а). Эффект гистерезиса проявляется также в зависимости максимального значения интенсивности поля внутри слоя от входной интенсивности, которая изображена в качестве примера на рис. 2 б. Соответствующая структура трех потенциально возможных стационарных решений приведена на рис. 3: для одной входной мощности падаю-

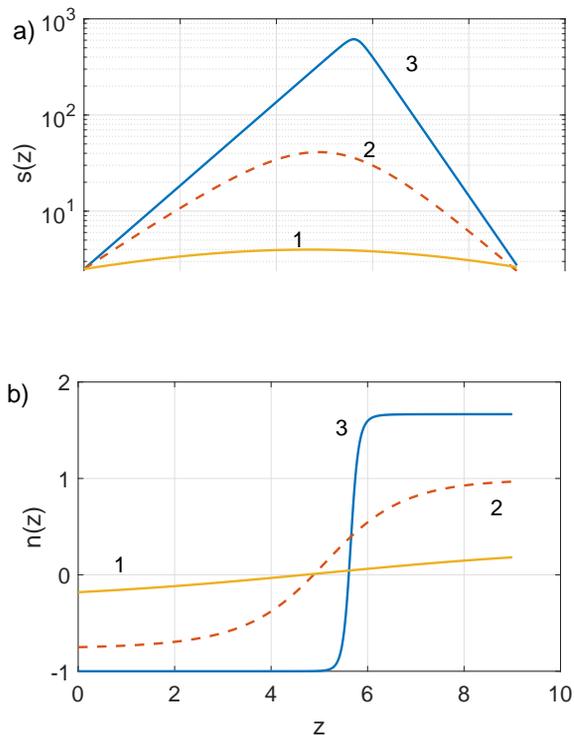


**Рис. 2.** *a* — Найденная численно зависимость  $n^*(s_0)$ : для каждого значения входной мощности (и в соответствии с (15) для каждого  $s_0$ ) стационарное распределение поля и частиц устанавливается, если возмущение плотности частиц при  $z = -L/2$  будет равно  $n^*(s_0)$ . *b* — Максимальное значение интенсивности излучения внутри слоя в зависимости от  $s_0$ . Неоднозначный характер зависимости говорит об эффекте гистерезиса. Для численного моделирования использовались следующие параметры:  $L = 9$ ,  $\gamma_0 = 1.25 \cdot 10^{-2}$ ,  $k = 2$ ,  $\beta = 0.6$

щего излучения  $P_{in}$  ( $P_{in}$  пропорциональна величине  $s_0$ , см. (15)) стационарные распределения плотности частиц и интенсивности поля внутри слоя сильно различаются, причем максимальное усиление интенсивности поля может в этих решениях отличаться на порядки (здесь примерно в 100 раз). Кроме того, в разных стационарных состояниях значительно меняется профиль концентрации  $N(z)$  и нарушение РТ-симметрии становится заметным.

Для того чтобы определить, какое из этих стационарных состояний реализуется, нужно решить динамическую задачу, в которой на невозмущенный начальный профиль  $N(z) = N_0$  падает внешнее излучение. Эволюция плотности частиц при этом описывается нелинейным уравнением диффузии, следующим из уравнения движения частиц и уравнения непрерывности,

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial n}{\partial z} - \gamma(s - C/s)(1+n)(1-\beta n) \right], \quad (17)$$



**Рис. 3.** Структура мультстабильного решения с параметром  $s_0 = 2.5$ . При соответствующей интенсивности (см. (15)) существует не одно, а три стационарных решения, которые сильно различаются по максимальной амплитуде поля и профилю концентрации частиц. *a* — Зависимость  $s(z)$  (логарифмический масштаб): в то время, как для кривых 1 и 2 усиление поля относительно небольшое, кривая 3 демонстрирует локальное усиление интенсивности в максимуме  $s_{max}/s_0 \approx 200$ . Следует также отметить для этого случая заметное нарушение РТ-симметрии, которое, однако, не приводит к какому-либо усилению поля на полной длине слоя. *b* — Зависимость  $n(z)$  для трех стационарных решений: почти линейно растущее с увеличением координаты  $z$  слабое возмущение концентрации отвечает решению с минимальным усилением поля, а максимальное усиление достигается, когда практически все поглощающие частицы вытесняются в область  $z > L/(1+\beta)$ , и формируется ступенчатый профиль концентрации. Для численного моделирования использовались следующие параметры:  $L = 9$ ,  $\gamma_0 = 1.25 \cdot 10^{-2}$ ,  $k = 2$ ,  $\beta = 0.6$

которое является (нормированным) уравнением непрерывности

$$\partial N / \partial t + \partial / \partial z (Nu) = 0,$$

где скорость частиц  $u$  дается выражением (4).

При вычислениях мы считаем, что величина  $s_0$  постоянна во времени (падающее излучение скачком «включается» в момент времени  $t = 0$  и мощность его в дальнейшем не меняется), а интенсивность излучения внутри слоя, как и раньше, определяется

выражением (10), т. е. зависит от профиля концентрации поглощающих частиц в каждый заданный момент времени.

Бистабильность достаточно частое явление в нелинейных системах [19]. В стандартной постановке задачи предполагается медленное изменение (рост или уменьшение) входной мощности. Исследование временной динамики системы показывает, что при увеличении входной мощности реализуется стационарное решение с наименьшим из возможных реализаций возмущением концентрации и соответствующим (наименьшим из возможных) усилением интенсивности поля внутри слоя. Аналогично, если медленно уменьшать интенсивность падающего излучения (величину  $s_0$ ), то будет устанавливаться максимально возмущенное распределение частиц и поля. Промежуточная ветвь решений неустойчива, так что в области параметров, где решение не единственное, система бистабильна. Очевидно, что при этом выход за границу бистабильности (на рис. 2 при  $s_0 \approx 1.5$  и  $s_0 \approx 3.5$ ) сопровождается резкой перестройкой структуры стационарного решения.

Следует отметить, что на результаты существенно может влиять эффект насыщения усиления, если внутри слоя достигаются большие поля. Для учета этого эффекта можно использовать следующую приближенную формулу для локального коэффициента усиления:

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + P/P_{\text{sat}}},$$

где  $\gamma_0$  — усиление слабых сигналов (инкремент без учета насыщения),  $P$  — локальная мощность,  $P_{\text{sat}}$  — мощность насыщения. В нашем случае эту зависимость можно переписать как

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \mu_{\text{sat}}(s + C/s)},$$

и в исходных соотношениях формулы (9) и (11) останутся неизменными, а уравнение (10) следует заметить на

$$\frac{s'}{s} = - \left( \frac{\mu_{\text{sat}}(s + C/s)}{1 + \mu_{\text{sat}}(s + C/s)} + n \right). \quad (18)$$

Очевидно, что в области с большой интенсивностью излучения эффективная среда окажется несбалансированной, и слой будет поглощать проходящее через него излучение.

В качестве примера на рис. 4 приведена структура решения с учетом эффекта насыщения усиления для тех же параметров, что и на рис. 3, и параметра насыщения  $\mu_{\text{sat}} = 0.003$ . Этот нелинейный

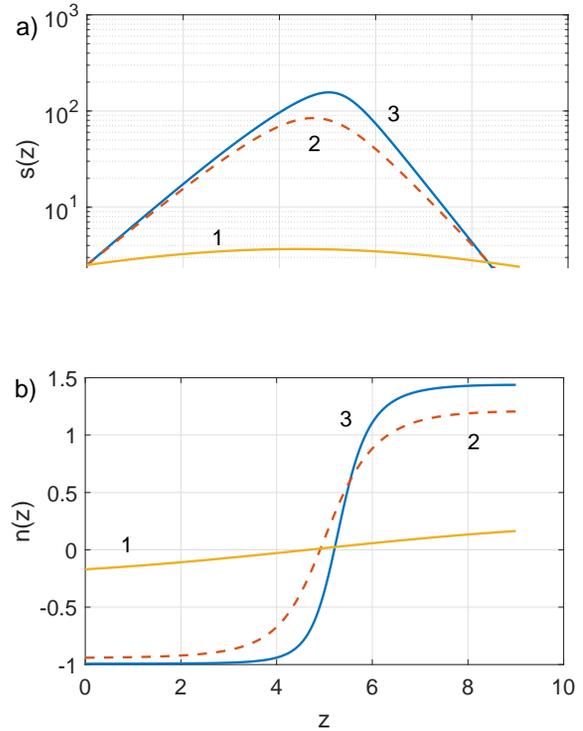


Рис. 4. Структура бистабильного решения с учетом эффекта насыщения усиления: а — зависимость  $s(z)$  (логарифмический масштаб); б — зависимость  $n(z)$  для трех стационарных решений с минимальным (кривые 1), средним (кривые 2, неустойчивое решение) и максимальным (кривые 3) усилением поля и возмущением концентрации частиц внутри слоя. Сравнение с результатами на рис. 3 показывает заметное сглаживание неоднородности поля и концентрации в слое и нарушение баланса поглощение–усиление для проходящего сквозь слой интенсивного излучения (см. кривые 2 и 3 на панели а). Для численного моделирования использовались те же параметры, что и на рис. 3, и параметр насыщения  $\mu_{\text{sat}} = 0.003$

эффект заметно влияет на решения с высокой интенсивностью поля, где нарушается баланс между поглощением и усилением. С точки зрения эксперимента в области РТ-симметрии эту проблему можно решить за счет увеличения мощности накачки так, чтобы интенсивности поля на входе и выходе из слоя сравнялись. Однако это приведет к разбалансировке усиления–поглощения для решения со слабым усилением и возмущением плотности, и такую коррекцию входной мощности нужно будет проводить в каждом индивидуальном случае.

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ

Кроме одностороннего ввода излучения в слой можно также рассмотреть постановку задачи с его запуском с обеих сторон слоя, причем здесь возмож-

но контролировать не только амплитуды, но и фазовый сдвиг  $\Delta\phi$  падающих справа и слева волн. В таком случае можно получить почти любое отношение амплитуд  $a_+/a_-$  на границе слоя, поскольку оно будет определяться не только диэлектрическими проницаемостями слоя и среды, но также и этими дополнительными входными параметрами.

Интересный вариант получается, если параметр  $\beta = 1$ . В этом случае решение будет обладать РТ-симметрией (диэлектрическая проницаемость нечетная, а интенсивность поля четная функция  $z$ ) независимо от толщины слоя и амплитуды падающего излучения. При больших амплитудах стационарное распределение концентрации частиц будет приближаться к ступенчатому с нулевой плотностью во входной половине слоя,

$$N(-L/2 < z < 0) \approx 0,$$

$$n(-L/2 < z < 0) \approx -1,$$

и удвоенной средней концентрацией частиц в выходной половине,

$$N(0 < z < L/2) \approx 2N_0,$$

$$n(0 < z < L/2) \approx 2.$$

Область перехода между этими значениями имеет некоторую конечную толщину  $\Delta$ , причем рост мощности падающей волны приводит к уменьшению  $\Delta$ . Соответственно, как по отношению к распределению концентрации частиц, так и относительно профиля интенсивности поля режим взаимодействия излучения с частицами выходит на насыщение, а распределение  $\text{Im}\varepsilon$  стремится к ступенчатому.

В стандартной задаче с заранее заданным ступенчатым профилем мнимой части проницаемости [20],

$$\text{Im}\varepsilon \sim \theta(z) - 1/2$$

( $\theta(z)$  — функция Хевисайда), рост толщины слоя приводит к нарушению РТ-симметрии и возникновению неустойчивости, причем граница между устойчивым и неустойчивым режимами представляет собой исключительную точку (exceptional point) в пространстве параметров (здесь параметром является толщина слоя). Многие важные для приложений эффекты обусловлены наличием исключительной точки и проявляются непосредственно вблизи от нее. В рассматриваемой здесь постановке задачи эффект исключительной точки сложно реализовать, поскольку он связан с обменом энергией между двумя модами  $a_+$  и  $a_-$  на скачке  $\text{Im}\varepsilon$ , а для оптического излучения масштаб скачка (области перехода от поглощающей среды к усиливающей)  $\Delta$

должен быть порядка длины волны. С другой стороны, если ввести в слой в некоторой точке  $z_{def}$  дефект, который вызывает частичное отражение и тем самым взаимодействие мод, то при изменении величины дефекта в системе возникнет исключительная точка. Причем в этом случае эффект исключительной точки легко контролировать, но он не будет связан с нарушением РТ-симметрии, а лишь с появлением комплексных собственных значений в спектре и развитием неустойчивости.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в настоящей работе изучено взаимодействие света со слоем жидкого метаматериала, представляющего собой коллоидный раствор поглощающих наночастиц в усиливающей жидкости (геле) со скомпенсированными поглощением и усилением. В результате воздействия пондеромоторных сил, градиентной и силы увлечения, происходит перераспределение концентрации наночастиц, что приводит к появлению пространственно-разделенных областей поглощения и усиления света. Показано, что в зависимости от интенсивности падающей световой волны могут иметь место как плавные, обладающие РТ-симметрией, распределения эффективной диэлектрической проницаемости коллоида, так и квазиступенчатые, для которых РТ-симметрия нарушена. Также показана возможность возникновения бистабильных состояний, реализация которых зависит от предыстории процесса. Во всех рассмотренных случаях величины коэффициентов отражения и прохождения света через слой не зависят от его интенсивности света и совпадают с «невозмущенным» пределом исчезающе малых амплитуд падающей электромагнитной волны из-за отсутствия взаимодействия встречных мод внутри слоя. Возможность управляемого создания заданных профилей концентрации наночастиц и, как следствие, перестраиваемых пространственных областей поглощения и усиления дает надежду, что рассматриваемая оптическая система может оказаться полезным объектом для изучения неэрмитовых оптических эффектов и диагностики распределения концентрации наночастиц с помощью пробных волн.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ: государственные задания FFUF-2023-0002 (разд. 4, 5) и FFUF-2024-0019 (остальные разделы).

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan et al., *Non-Hermitian Physics and Pt Symmetry*, Nature Phys. **14**, 11 (2018).
2. C. M. Bender and S. Boettcher, *Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having Pt Symmetry*, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).
3. А. А. Зябловский, А. П. Виноградов, А. А. Пухов, А. В. Дорофеенко, А. А. Лисянский, *PT-симметрия в оптике*, УФН **184**, 1177 (2014) [A. A. Zyablovsky, A. P. Vinogradov, A. A. Pukhov, A. V. Dorofeenko, and A. A. Lisyansky, *Pt-Symmetry in Optics*, Phys. Uspekhi **57**, 1063 (2014)].
4. W. D. Heiss, J. Phys. A **37**, 2455 (2004).
5. Y. D. Chong, L. Ge, and A. D. Stone, *Pt-Symmetry Breaking and Laser-Absorber Modes in Optical Scattering Systems*, Phys. Rev. Lett. **106**, 093902 (2011).
6. Z. J. Wong, J. Kim, K. O'Brien, Y. Wang, L. Fencs, and X. Zhang, *Lasing and Anti-Lasing in a Single Cavity*, Nature Photon. **10**, 796 (2016).
7. X. Zhu, L. Feng, P. Zhang, X. Yin, and X. Zhang, *One-Way Invisible Cloak Using Parity-Time Symmetric Transformation Optics*, Opt. Lett. **38**, 2821 (2013).
8. W. Chen, S. K. Ozdemir, G. Zhao, J. Wiersig, and L. Yang, *Exceptional Points Enhance Sensing in an Optical Microcavity*, Nature **548**, 192 (2017).
9. M. A. Noginov, G. Zhu, A. M. Belgrave, R. Bakker, V. M. Shalaev, E. E. Narimanov, S. Stout, E. Herz, T. Suteewong, and U. Wiesner, *Demonstration of a Spacer-Based Nanolasers*, Nature Lett. **460**, 1110 (2009).
10. Y. Wu, Zh. Huang, Qi Sun, V. D. Ta, S. Wang, and Y. Wang, *A New Generation of Liquid Lasers from Engineered Semiconductor Nanocrystals with Giant Optical Gain*, Laser Photon. Rev. **17**, 2200703 (2023).
11. A. A. Zharov and N. A. Zharova, *Light-Driven Pt-Symmetry in Colloids with Gain and Loss Nanoparticles*, J. Opt. Soc. Am. B **40**, 2618 (2023).
12. D. Gao, R. Shi, Y. Huang, and L. Gao, *Fano-Enhanced Pulling and Pushing Optical Forces on Active Nanoparticles*, Phys. Rev. A **96**, 043826 (2017).
13. H. Chen, L. Gao, C. Zhong, G. Yuan, Y. Huang, Z. Yu, M. Cao, and M. Wang, *Optical Pulling Force on Nonlinear Nanoparticles with Gain*, AIP Advances **10**, 015131 (2020).
14. X. Bian, D. L. Gao, and L. Gao, *Tailoring Optical Pulling Force on Gain Coated Nanoparticles with Nonlocal Effective Medium Theory*, Opt. Express **25**, 24566 (2017).
15. Y. Wu, Z. Huang, Q. Sun, V. D. Ta, S. Wang, and Y. Wang, *A New Generation of Liquid Lasers from Engineered Semiconductor Nanocrystals with Giant Optical Gain*, Laser Photon. Rev. **17**, 2200703 (2023).
16. B. Yang, H. Sun, C.-J. Huang, H.-Y. Wang, Y. Deng, H.-N. Dai, Z.-S. Yuan, and J.-W. Pan, *Cooling and Entangling Ultracold Atoms in Optical Lattices*, Science **369**, 550 (2020).
17. H. Xin, Y. Li, Y.-C. Liu, Y. Zhang, Y.-F. Xiao, and B. Li, *Optical Forces: from Fundamental to Biological Applications*, Adv. Mater. **32**, 2001994 (2020).
18. A. A. Zharov, Jr., A. A. Zharov, I. V. Shadrivov, and N. A. Zharova, *Grading Plasmonic Nanoparticles with Light*, Phys. Rev. A **93**, 013814 (2016).
19. Х. Гиббс, *Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света*, Мир, Москва (1988).
20. Y. D. Chong, Li Ge, and A. D. Stone, *Pt-Symmetry Breaking and Laser-Absorber Modes in Optical Scattering Systems*, Phys. Rev. Lett. **106**, 093902 (2011).