

# ДВУХФОТОННАЯ КОНВЕРСИЯ ГРАВИТОНА НА СВЯЗАННЫХ АТОМНЫХ СОСТОЯНИЯХ

Т. А. Залиютдинов<sup>a,b\*</sup>, В. К. Дубрович<sup>c</sup>, Д. А. Соловьев<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Санкт-Петербургский государственный университет  
198504, Санкт-Петербург, Россия

<sup>b</sup> Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова,  
НИЦ «Курчатовский институт»  
188300, Гатчина, Ленинградская обл., Россия

<sup>c</sup> Специальная астрофизическая обсерватория  
Санкт-Петербургского отделения Российской академии наук  
196140, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 13 марта 2024 г.,  
после переработки 13 марта 2024 г.  
Принята к публикации 13 мая 2024 г.

Развивается квантовополевой подход, объединяющий релятивистскую электродинамику и линейризованную квантовую гравитацию в приложении к задаче электромагнитной конверсии гравитонов на связанных атомных состояниях. Используется атом водорода в качестве примера и рассматривается процесс неупругого рассеяния гравитона на атомном электроде с последующим переизлучением двух фотонов. Получены выражения для сечения процесса и угловых корреляций. Обсуждаются перспективы экспериментального обнаружения двухфотонной конверсии гравитонов с применением оптического усиления слабых сигналов.

DOI: 10.31857/S0044451024090025

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Под влиянием основополагающих принципов квантовой теории поля современная гравитационная физика предполагает, что эффекты квантовой гравитации должны быть наблюдаемы при чрезвычайно высоких энергиях и невероятно малых масштабах длины [1, 2]. Эта область, известная как планковский масштаб, включает в себя энергии частиц, достигающие  $10^{19}$  ГэВ, или длины порядка  $10^{-35}$  м. Доступ к этому диапазону представляет значительные трудности, приводя к весьма ограниченной перспективе достижения необходимых технологических решений в ближайшие десятилетия [3]. Текущий уровень достигнутого энергетического диапазона при столкновениях на Большом адронном коллайдере все еще на много порядков ниже энергий, связанных с планковским

масштабом. Тем не менее некоторые гипотезы предполагают потенциально более сильное гравитационное взаимодействие при повышенных энергиях, объясняя это, в частности, наличием дополнительных измерений [4, 5]. Несмотря на продолжающиеся усилия, из-за огромных технологических препятствий, связанных с достижением крайне высоких энергий в ускорителях частиц, убедительных доказательств в пользу таких расширений стандартной модели все еще не найдено. Напротив, при более низких энергиях лабораторные эксперименты с квантовыми системами с массами, значительно превосходящими атомные [6, 7], постепенно становятся доступными в лабораторных условиях [8]. В рамках такого подхода существующие теории предполагают, что гравитация оказывает влияние на динамику квантовых состояний. В последнее время был предложен ряд идей, касающихся проявления различных аспектов квантовой гравитации, таких как суперпозиции гравитационных полей [9], коллапс волновой функции, вызванный гравитацией через самогравитацию, или декогеренция [10], вызванная внешними гравитационными полями.

\* E-mail: zalialutdinov@gmail.com, t.zalialutdinov@spbu.ru

Обнадеживающим является и то, что многие из этих предложений кажутся экспериментально и технологически достижимыми в ближайшем будущем.

Другой подход к исследованию квантовых свойств гравитации состоит в астрофизических наблюдениях за Вселенной. В частности, в работе [11] было отмечено, что квантовая природа гравитации может проявляться в  $\gamma$ -всплесках сверхновых. Кроме того, важнейшим аспектом в современной космологии является понимание того, как квантованное гравитационное поле влияет на ранние этапы формирования Вселенной. Несмотря на то что характерные сигнатуры могли исчезнуть во время более позднего расширения Вселенной, обнаружение первичных гравитационных волн могло бы дать представление об эффектах квантовой гравитации вскоре после Большого взрыва [12]. В недавней работе [13] также обсуждалось что специфические особенности космического микроволнового фона могут предоставить дополнительную информацию об этой эпохе. Кроме того, были предложены различные астрофизические тесты, такие как исследование света от далеких квазаров [14, 15]. Однако до сих пор не было обнаружено никаких достоверных признаков квантовой природы гравитации.

Следует отметить, что обнаружение отдельных гравитонов, являющихся ключевым индикатором квантования гравитации, исторически представляло существенные трудности [16–18]. Несмотря на это, исследование инновационных подходов к этой проблеме все еще продолжается [19]. Заметное внимание уделяется изучению элементарных процессов, связанных с рассеянием гравитонов, в частности в приложении к астрофизическим исследованиям ранней Вселенной [20], а также лабораторным методам для детектирования признаков квантовой природы гравитации. В связи с этим чрезвычайно важным становится развитие соответствующих теоретических методов и подходов для исследования данной проблемы.

С учетом актуальности затрагиваемой тематики в современной теоретической физике целью настоящего исследования является применение квантовополевого подхода, объединяющего релятивистскую квантовую электродинамику и линеаризованную квантовую теорию гравитации, к задаче рассеяния гравитонов на связанных атомных состояниях. Используя атом водорода в качестве примера, мы

рассматриваем процесс неупругого рассеяния гравитона на атомном электроны с последующей конверсией в два фотона. Применяя аппарат релятивистской квантовой теории поля для связанных состояний, приводим последовательный вывод выражения для сечения процесса, включая угловые корреляции между налетающими и рассеянными частицами. Обсуждаем перспективы экспериментального обнаружения двухфотонной конверсии гравитонов и оптическое усиления слабых сигналов.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 приводится краткий вывод линеаризованных уравнений Эйнштейна, обсуждается их квантование и решение в виде волновых функций гравитона в координатном пространстве. Затем, в разд. 3, в рамках метода контура линии и  $S$ -матрицы для связанных состояний дается последовательный вывод сечения неупругого рассеяния гравитона на атоме водорода. Обсуждение полученных выражений в приложении к проблеме обнаружения отдельных гравитонов даны в разд. 4. На протяжении всей статьи используются релятивистские единицы, в которых  $\hbar = c = 1$ . Гравитационная постоянная  $G$  в этих единицах может быть найдена из определения планковской длины

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616 \cdot 10^{-35} \text{ м.}$$

## 2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Простейшая квантовополевая модель гравитации с гравитонами как квантовой частицей со спином 2 может быть получена из рассмотрения линеаризованных уравнений Эйнштейна для гравитации [1]. Следуя стандартному подходу к описанию этой проблемы [21], будем рассматривать малые возмущения  $h_{\mu\nu}$  метрического тензора Минковского,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Здесь мы предполагаем, что  $h_{\mu\nu}$  представляет малые добавки, определяющие гравитационное взаимодействие. В этом приближении тензор Риччи дается выражением

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\mu h_\nu^\sigma + \partial_\sigma \partial_\nu h_\mu^\sigma - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(h^2), \quad (2)$$

где введены обозначения  $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$  и  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ .

В линеаризованной квантовой теории гравитации калибровка потенциала  $h_{\mu\nu}$ , удовлетворяющая уравнению

$$\partial_\mu h_\nu^\mu = \frac{1}{2} \partial_\nu h_\rho^\rho, \quad (3)$$

называется гармонической [21] (это аналог калибровки Лоренца  $\partial_\mu A^\mu = 0$  для электромагнитного потенциала  $A^\mu$ ). С учетом выражения (3) линеаризованное уравнение Эйнштейна сводится к следующему равенству:

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_\rho^\rho \right), \quad (4)$$

где  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса.

Теперь перейдем к обсуждению процедуры вторичного квантования для тензорного поля  $h_{\mu\nu}$ . Для этого необходимо записать общее решение линеаризованного уравнения движения в отсутствие материи ( $T_{\mu\nu} = 0$ ), которое имеет вид

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) представляет собой свободную гравитационную волну. Исходя из этих линейных уравнений движения для метрических возмущений, можно построить согласованную теорию свободного квантового поля для  $h_{\mu\nu}$ . Принимая во внимание вид уравнения (5), квантование гравитационного поля можно выполнить в полной аналогии с квантованием электромагнитного поля. Это приводит к следующему разложению для потенциала:

$$\hat{h}_{\mu\nu}(x) = \sum_{\lambda_g} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_g}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda_g)} \times \\ \times \left( \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda_g}^\dagger e^{-ikx} + \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda_g} e^{ikx} \right). \quad (6)$$

Здесь  $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda_g}^\dagger$  и  $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda_g}$  представляют собой операторы рождения и уничтожения соответственно, которые подчиняются каноническим коммутационным соотношениям для бозонов [22];  $k = (k_0, \mathbf{k}_g)$  — четырехмерный вектор импульса гравитона,  $\mathbf{k}_g$  — соответствующий трехмерный волновой вектор,  $x = (t, \mathbf{r})$  — четырехмерный пространственный вектор,  $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda_g)}$  — тензор поляризации с  $\lambda_g = 0, 1, 2, 3$ .

Гармоническое условие, задаваемое уравнением (3), пока еще неоднозначным образом определяет выбор инерциальной системы отсчета. Очевидно, что над полем  $h_{\mu\nu}$  можно выполнить новое преобразование координат вида

$$h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x), \quad (7)$$

где параметры  $\xi_\nu(x)$  подчиняются условию  $\square \xi_\nu = 0$ .

Поскольку  $h_{\mu\nu}$  есть решение волнового уравнения (5), четырехмерный вектор  $k$  удовлетворяет также равенству  $k^2 = k_\mu k^\mu = 0$ . Тогда гармоническое условие для тензора поляризации, вытекающее из уравнения (3), принимает вид [21]

$$k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2} k_\nu \varepsilon_{\mu\mu}. \quad (8)$$

Положив  $\xi_\nu(x) = i\xi_\nu e^{-ikx}$  в уравнении (7), можно получить следующее соотношение:

$$\varepsilon'_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} - k_\mu \xi_\nu - k_\nu \xi_\mu. \quad (9)$$

Оба этих уравнения подразумевают, что компоненты тензора  $\varepsilon_{\mu\nu}$  не могут быть произвольными: они должны удовлетворять ограничениям, заданным уравнениями (8) и (9). Чтобы определить, какие поляризации допустимы, рассмотрим гравитационную волну, движущуюся вдоль оси  $z$ , т.е. выберем четырехмерный вектор импульса в виде  $k = \omega_g(1, 0, 0, 1)$ . Тогда, согласно уравнению (9), можно выбрать функцию  $\xi_\mu$  таким образом, чтобы компоненты тензора поляризации  $\varepsilon_{00}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$  и  $\varepsilon_{33}$  были исключены. Следовательно, останутся только два независимых тензора поляризации для гравитационной волны, которые могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где коэффициент  $1/\sqrt{2}$  выбран так, чтобы выполнялось условие нормировки

$$\sqrt{\text{Tr}(\varepsilon \cdot \varepsilon^T)} = 1.$$

Представление тензоров поляризации гравитационной волны в форме уравнений (10) соответствует так называемой поперечной бесследовой (Transverse Traceless) калибровке. При таком выборе условие поперечности, заданное уравнением (8), сводится к

$$k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0. \quad (11)$$

С учетом того, что времениподобные компоненты тензоров поляризации равны нулю, для (10) допускается параметризация в сферических координатах

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi & \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi & -\sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi & \cos^2 \theta \sin^2 \phi - \cos^2 \phi & -\sin \theta \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \cos \theta \sin \phi & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \cos \theta \sin \phi \cos \phi & \cos \theta \cos^2 \phi - \cos \theta \sin^2 \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos^2 \phi - \cos \theta \sin^2 \phi & 2 \cos \theta \sin \phi \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Таким образом, в линеаризованной теории все угловые корреляции в процессе рассеяния гравитационной волны полностью определяются матрицами двух возможных поляризаций (12), (13).

### 3. S-МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАССЕЯНИЯ ГРАВИТОНА НА СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ

Выражение для сечения процесса двухфотонной конверсии на связанном электроны может быть получено из рассмотрения элемента  $S$ -матрицы, соответствующего процессу возбуждения атомного электрона гравитоном, за которым следует излучение двух фотонов, см. рис. 1. Согласно правилам Фейнмана в импульсном пространстве для линеаризованной теории гравитации, см. [24, 25], соответствующая вершина взаимодействия квантованного гравитационного поля со спинорным полем задается выражением [26, 27]

$$\Gamma^{\mu\nu} = -\frac{i\kappa}{8} [(p_1 + p_2)^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu (p_1 + p_2)^\nu - 2\eta^{\mu\nu} (\not{p}_1 + \not{p}_2 - 2m)]. \quad (14)$$

Здесь  $\kappa = \sqrt{32\pi G}$ , где  $G$  — гравитационная постоянная;  $\gamma_\mu = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma})$  — дираковские матрицы;  $p_1$  и  $p_2$  — 4-импульсы входящей и выходящей спинорной

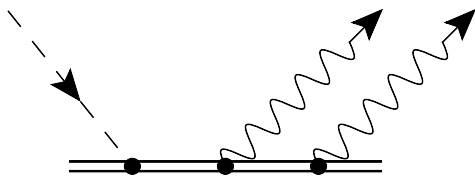


Рис. 1. Диаграмма Фейнмана, описывающая конверсию налетающего гравитона (штриховая линия) в два фотона (волнистые линии) на связанном атомном электроны в картине Фарри (двойная сплошная линия).

тах для произвольного направления вектора  $\mathbf{k}_g$ , которое задается сферическими углами  $\theta$  и  $\phi$  [23]:

частиц соответственно). Взаимодействие спинорно-го и фотонного полей задается стандартной вершиной  $-ie\gamma^\mu$ . Учитывая закон сохранения  $p_2 = p_1 - k_1$  в вершине фермион–гравитон, условие поперечности (11), свойства тензора поляризации гравитона в ТТ-калибровке, соответствующий диаграмме рис. 1 элемент  $S$ -матрицы в координатном представлении можно записать в виде

$$\hat{S}_{if}^{(3)} = (-ie)^2 \left( -\frac{ik}{2} \right) \int d^4x_3 d^4x_2 d^4x_1 \bar{\psi}_f(x_3) \times \\ \times \gamma^{\mu_3} A_{\mu_3}^*(x_3) S(x_3, x_2) \gamma^{\mu_2} A_{\mu_2}^*(x_2) S(x_2, x_1) \times \\ \times (-i\partial^{\nu_1}) \psi_i(x_1) \gamma^{\mu_1} h_{\mu_1\nu_1}(x_1). \quad (15)$$

В выражении (15) учтено, что оператор импульса, входящий в  $\Gamma^{\mu\nu}$ , в координатном представлении переходит в оператор  $-i\partial_\mu$ ;  $\psi_a(x) = \psi_a(\mathbf{r})e^{-i\mathcal{E}_a t}$ ,  $\psi_a(\mathbf{r})$  — решение уравнения Дирака для связанного электрона,  $\mathcal{E}_a$  — дираковская энергия,  $\bar{\psi}$  обозначает дираковское сопряжение,  $S(x_1, x_2)$  — электронный пропагатор,  $A_\mu(x)$  — волновая функция фотона в координатном представлении [28],

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\gamma}} \epsilon_\mu^{(\lambda_\gamma)} e^{-ikx}. \quad (16)$$

В уравнении (16)  $k$  — 4-вектор импульса фотона  $(\omega_\gamma, \mathbf{k}_\gamma)$ ,  $\mathbf{k}_\gamma$  — волновой вектор фотона,  $\omega_\gamma = |\mathbf{k}_\gamma|$  — энергия фотона,  $x^\mu$  — пространственный 4-вектор. Для компонент 4-вектора поляризации фотона введено обозначение  $\epsilon_\mu^{(\lambda_\gamma)}$  ( $\lambda_\gamma = 0, 1, 2, 3$ ), где  $A_\mu$  соответствует поглощенному фотону, а  $A_\mu^*$  (комплексно сопряженная функция) — испущенному фотону. В полной аналогии с (16) волновая функция гравитона  $h_{\mu\nu}(x)$  в выражении (15) записывается в виде

$$h_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_g}} \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda_g)} e^{-ikx}, \quad (17)$$

где  $\omega_g = |\mathbf{k}_g|$  — энергия гравитона,  $\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda_g)}$  — компоненты тензора поляризации, см. уравнения (12) и (13). Разложение электронного пропагатора  $S(x_1, x_2)$  в уравнении (15) по одноэлектронным собственным состояниям дираковского гамильтониана для атома водорода удобно записать следующим образом [28]:

$$S(x_1, x_2) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{-i\Omega(t_1-t_2)} \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_2)}{\Omega - \mathcal{E}_n(1-i0)}, \quad (18)$$

где сумма по  $n$  подразумевает суммирование по всему дираковскому спектру для электрона в кулоновском поле ядра, включая континуум.

Описание реальных фотонов также подразумевает условие поперечности  $k^\mu \epsilon_\mu = 0$ ,  $k^2 = k_\mu k^\mu = 0$ . Тогда для фотонной волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ , существуют две независимые поляризации:

$$\epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Для произвольного направления волнового вектора  $\mathbf{k}_\gamma$ , задаваемого сферическими углами  $\theta$  и  $\phi$ , пространственная часть этих векторов поляризации может быть найдена путем поворота оси  $z$  в направлении  $\mathbf{k}_\gamma$ . Это приводит к следующей параметризации:

$$\epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Отметим, что два тензора поляризации гравитона, заданные уравнениями (12) и (13), могут быть получены из выражений (20) как линейная комбинация тензорных произведений:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon^{(1)} \otimes \epsilon^{(1)} - \epsilon^{(2)} \otimes \epsilon^{(2)}), \quad (21)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon^{(1)} \otimes \epsilon^{(2)} + \epsilon^{(2)} \otimes \epsilon^{(1)}). \quad (22)$$

Подставляя выражения (18), (17) и (16) в уравнение (15) и проводя интегрирование по временным переменным и частотам электронных пропагаторов, получаем

$$\hat{S}_{if}^{(3)} = -2\pi i \delta(\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i + \omega_2 + \omega_1 - \omega_g) U_{if}^{(3)}, \quad (23)$$

где введено обозначение для амплитуды процесса

$$U_{if}^{(3)} = \frac{\kappa e^2}{4\sqrt{2}\omega_g\omega_{\gamma_1}\omega_2} \times \sum_{n_1, n_2} \left[ \frac{\langle f | \alpha \epsilon_2^{*(\lambda_2)} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} | n_2 \rangle \langle n_2 | \alpha \epsilon_1^{*(\lambda_1)} e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} | n_1 \rangle}{\mathcal{E}_f + \omega_2 - \mathcal{E}_{n_2}} + \frac{\langle f | \alpha \epsilon_1^{*(\lambda_1)} e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} | n_2 \rangle \langle n_2 | \alpha \epsilon_2^{*(\lambda_2)} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} | n_1 \rangle}{\mathcal{E}_f + \omega_1 - \mathcal{E}_{n_2}} \right] \times \frac{\langle n_1 | p_i \alpha_j \epsilon_{ij}^{(\lambda_g)} e^{i\mathbf{k}_g \mathbf{r}} | i \rangle}{\mathcal{E}_i + \omega_g - \mathcal{E}_{n_1}}. \quad (24)$$

Здесь мы опустили бесконечно малую часть в знаменателях уравнения (18) для краткости, а индексы  $n_{1(2)}$ ,  $i$  и  $f$  подразумевают набор всех квантовых чисел, описывающих промежуточные, начальные и конечные атомные состояния соответственно. Второй член в квадратных скобках выражения (24) возникает при учете перестановок фотонных вершин на рис. 1 между собой. Оставшиеся четыре члена, возникающие из полного набора всех шести калибровочно-инвариантных фейнмановских диаграмм и учитывающие также перестановки фотонных вершин с гравитоном, представляют собой малые нерезонансные поправки к амплитуде резонансного рассеяния [28, 29]. Таким образом, амплитуда (24) выписана в резонансном приближении [28, 29].

Если перейти к нерелятивистскому пределу с помощью преобразования Фолди–Вутхайзена, что в первом порядке подразумевает  $\psi^+ \alpha \psi \approx \phi^+ \frac{\hat{\mathbf{p}}}{m} \phi$ , где  $\phi$  — решение уравнения Шредингера с соответствующим нерелятивистским собственным значением  $E$ , и учесть, что  $\mathbf{k} \mathbf{r} \ll 1$ , то уравнение (24) упрощается до

$$U_{if}^{(3)} = \frac{\kappa e^2}{4\sqrt{2}\omega_g\omega_{\gamma_1}\omega_2} \times \sum_{n_1, n_2} \left[ \frac{\langle f | \epsilon_2^{*(\lambda_2)} \mathbf{p} | n_2 \rangle \langle n_2 | \epsilon_1^{*(\lambda_1)} \mathbf{p} | n_1 \rangle}{E_f + \omega_2 - E_{n_2}} + \frac{\langle f | \epsilon_1^{*(\lambda_1)} \mathbf{p} | n_2 \rangle \langle n_2 | \epsilon_2^{*(\lambda_2)} \mathbf{p} | n_1 \rangle}{E_f + \omega_1 - E_{n_2}} \right] \times \frac{\langle n_1 | \epsilon_{ij} p_i p_j | i \rangle}{E_i + \omega_g - E_{n_1}}. \quad (25)$$

Здесь, в отличие от уравнения (24), предполагается, что матричные элементы вычисляются уже с нерелятивистскими волновыми функциями и нерелятивистским спектром энергий.

Поскольку нас интересует конкретный процесс рассеяния

$$1s + g \rightarrow 3d \rightarrow 1s + \gamma_1 + \gamma_2,$$

следует положить  $i = f = 1s$  и  $n_1 = 3d$ . Тогда согласно правилам отбора для матричных элементов дипольного оператора немедленно следует, что разрешены только переходы в промежуточные состояния с  $n_2 = np$ . Используя известное коммутационное соотношение  $p_i = i[H_S, r_i]$  и применяя условие полноты

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$$

в матричном элементе, включающем только пространственные компоненты оператора  $\epsilon_{ij}p_i p_j$ , уравнение (25) можно переписать в «форме длины» следующим образом:

$$U_{if}^{(3)} = \frac{\kappa e^2 \omega_2 \omega_1 \omega_g^2}{4\sqrt{2\omega_g \omega_{\gamma_1} \omega_2}} \mathcal{M}(\omega_1, \omega_2). \quad (26)$$

Здесь и далее используется обозначение для амплитуды процесса:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\omega_1, \omega_2) = & \sum_{n, m_p, m_d} \times \\ & \times \left[ \frac{\langle 1s | \epsilon_2^{*(\lambda_2)} \mathbf{r} | np, m_p \rangle \langle np, m_p | \epsilon_1^{*(\lambda_1)} \mathbf{r} | 3d, m_d \rangle}{E_{1s} + \omega_2 - E_{np}} + \right. \\ & \left. + \frac{\langle 1s | \epsilon_1^{*(\lambda_1)} \mathbf{r} | np, m_p \rangle \langle np, m_p | \epsilon_2^{*(\lambda_2)} \mathbf{r} | 3d, m_d \rangle}{E_{1s} + \omega_1 - E_{np}} \right] \times \\ & \times \frac{\langle 3d, m_d | \epsilon_{ij}^{(\lambda_g)} r_i r_j | 1s \rangle}{E_{1s} + \omega_g - E_{3d} + i\frac{\Gamma_{3d}}{2}}, \quad (27) \end{aligned}$$

где  $m_p$  и  $m_d$  — магнитные квантовые числа состояний с  $p$ - и  $d$ -орбитальными моментами соответственно. Важно отметить, что в нерелятивистском выражении (25) вклад, возникающий при суммировании по отрицательному спектру, в точности сокращается при переходе от формы скорости к «форме длины» (27) при использовании упомянутого коммутационного соотношения. Подробное обсуждение соответствующих преобразований можно найти в книге [30] (см. уравнение (29.37) в главе 29.8, а также главу 35) и работах [31, 32].

Дифференциальное сечение рассеяния может быть получено из квадрата модуля амплитуды (23) с последующим его умножением на соответствующие фазовые объемы двух излученных фотонов  $\frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}$ . Если поляризации частиц в начальных и конечных состояниях считаются неизвестными, то

также необходимо выполнить дополнительное суммирование по всем возможным поляризациям каждой из частиц, участвующих в рассматриваемом процессе. Это приводит к следующему выражению для сечения:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\omega_1 d\Omega_1 d\Omega_2} = & \frac{\alpha^2 l_p^2}{2\pi^2} (\omega_1 \omega_g)^3 (\omega_g - \omega_1)^3 \times \\ & \times \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_g} |\mathcal{M}(\omega_1, \omega_g - \omega_1)|^2, \quad (28) \end{aligned}$$

где учтено, что  $\kappa^2 = 32\pi G = 32\pi l_p^2$  и  $e^2 = 4\pi\alpha$ .

Если провести суммирование по поляризациям в уравнении (28) и проекциям угловых моментов промежуточных состояний, с использованием теоремы Вигнера – Эккарта [33], а также выполнить угловое интегрирование в матричных элементах, то радиальная и угловая зависимости сечения рассеяния факторизуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\omega_1 d\Omega_1 d\Omega_2} = & \frac{\alpha^2 l_p^2}{2\pi^2} (\omega_1 \omega_g)^3 (\omega_g - \omega_1)^3 \times \\ & \times \left| \sum_n \left( \frac{D_{1s;np} D_{np;1s}}{E_{1s} + \omega_1 - E_{np}} + \frac{D_{1s;np} D_{np;1s}}{E_{1s} + \omega_g - \omega_1 - E_{np}} \right) \right|^2 \times \\ & \times \frac{Q_{3d;1s}^2}{(E_{3d} - E_{1s} - \omega_g)^2 + \frac{\Gamma_{3d}^2}{4}} A(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \theta_g, \phi_g). \quad (29) \end{aligned}$$

Множитель, определяющий корреляцию между направлениями падающего гравитона и излучаемых фотонов, дается выражением

$$\begin{aligned} A(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \theta_g, \phi_g) = & \frac{1}{28800} \left[ 8 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_g \times \right. \\ & \times \cos 2(\phi_1 - \phi_g) + 8 \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_g \cos(\phi_1 - \phi_g) + \\ & + 3 \cos 2(\theta_1 - \theta_g) + 3 \cos 2(\theta_1 + \theta_g) + \\ & \left. + 2 \cos 2\theta_1 + 2 \cos 2\theta_g + 22 \right] \times \\ & \times \left[ 8 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_g \cos 2(\phi_2 - \phi_g) + \right. \\ & + 8 \sin 2\theta_2 \sin 2\theta_g \cos(\phi_2 - \phi_g) + \\ & \left. + 3 \cos 2(\theta_2 - \theta_g) + 3 \cos 2(\theta_2 + \theta_g) + \right. \\ & \left. + 2 \cos 2\theta_2 + 2 \cos 2\theta_g + 22 \right], \quad (30) \end{aligned}$$

где  $\theta_g, \phi_g$  — сферические углы, определяющие направление налетающего на атом гравитона,  $\theta_i, \phi_i$  ( $i = 1, 2$ ) — сферические углы, определяющие направление вылета излучаемых фотонов. Суммирование по  $n$  в выражении (29) подразумевает как суммирование как по дискретным состояниям, так и интегрирование по импульсу непрерывных состояний радиальных решений уравнения Шредингера

для атома водорода. Дипольные и квадрупольные радиальные матричные элементы в (29) определяются следующим образом:

$$D_{n'l';nl} = \int_0^\infty dr r^3 R_{n'l'}(r)R_{nl}(r), \quad (31)$$

$$Q_{n'l';nl} = \int_0^\infty dr r^4 R_{n'l'}(r)R_{nl}(r). \quad (32)$$

Структура полученного сечения рассеяния гравитона на атоме водорода аналогична структуре сечения рассеяния фотона при поглощении в линии  $1s \rightarrow 3d$  с последующим двухфотонным переизлучением в распаде  $3d \rightarrow 1s + \gamma(E1) + \gamma(E1)$  [34]. Единственное отличие заключается в том, что угловая корреляция, определяемая выражением (30), имеет иную угловую зависимость вследствие тензорной структуры поляризации гравитона. Следует к тому же принять во внимание, что в эксперименте по рассеянию гравитона такой переход мог бы быть вызван также «паразитным» чернотельным излучением, неизбежно действующим на атомную систему. Следовательно, помимо различного углового распределения в этих двух процессах важно понять, до какой температуры стены предполагаемой установки должны быть охлаждены, чтобы однозначно подавить такое воздействие. Оценку скорости поглощения тепловых фотонов в квадрупольном переходе  $1s - 3d$ , обозначаемую далее как  $W_{1s3d}^{E2,abs}$ , следует сравнить с соответствующим поглощением гравитонов  $W_{1s3d}^g$  в этой же линии. Скорость поглощения  $W_{1s3d}^{E2,abs}$  относится к скоростям спонтанных,  $W_{3d1s}^{E2,spont} = 594 \text{ с}^{-1}$  [35], и индуцированных,  $W_{3d1s}^{E2,ind}$ , излучений согласно соотношениям

$$W_{1s3d}^{E2,abs} = \frac{g_{1s}}{g_{3d}} W_{3d1s}^{E2,ind} = \frac{g_{1s}}{g_{3d}} W_{3d1s}^{E2,spont} \frac{1}{e^{\frac{\omega_{3d1s}}{k_B T}} - 1}, \quad (33)$$

где заселенность уровня  $g_a = 2(2l_a + 1)$ ,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура в кельвинах. При  $T = 300 \text{ К}$  (комнатные температуры) вероятность поглощения тепловых фотонов в единицу времени  $W_{1s3d}^{E2,abs} \sim 10^{-200} \text{ с}^{-1}$  и, следовательно, может считаться пренебрежимо малой, поскольку  $W_{3d1s}^{E2,ind} \ll W_{1s3d}^g$ . С учетом этого рассеяние гравитонов в линии  $1s - 3d$  более предпочтительно, чем рассеяние тепловых фотонов в этом же переходе при типичных комнатных температурах.

Полученные угловые зависимости (30) значительно упрощаются, если предположить, что нале-

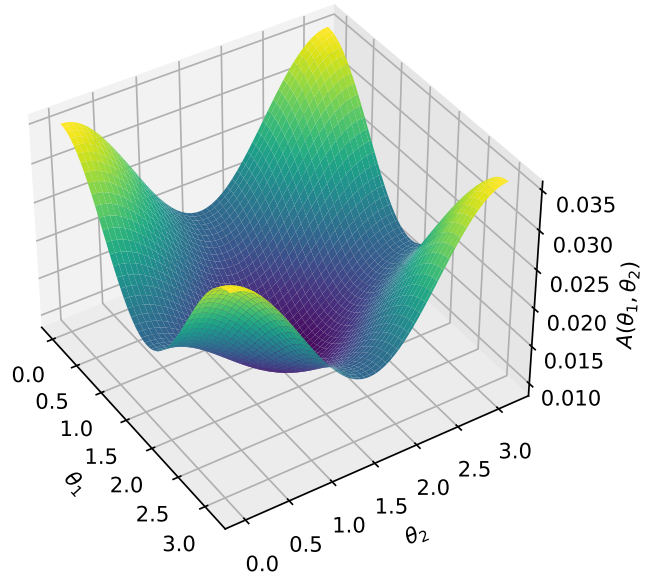


Рис. 2. (В цвете онлайн) Функция углового распределения  $A(\theta_1, \theta_2, \theta_g = 0, \phi_g = 0)$  рассеянных фотонов для случая распространения гравитона вдоль оси  $z$ , см. выражение (34)

тающий гравитон распространяется вдоль оси  $z$ , т. е. полагая  $\theta_g = 0$  и  $\phi_g = 0$ . Тогда ориентация двух испускаемых фотонов не зависит ни от одного из азимутальных углов  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , что упрощает корреляционный фактор в уравнении (30) до следующего выражения:

$$A(\theta_1, \theta_2, \theta_g = 0, \phi_g = 0) = \frac{1}{450} (3 + \cos(2\theta_1))(3 + \cos(2\theta_2)). \quad (34)$$

Соответствующее графическое изображение углового распределения представлено на рис. 2.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривая атом водорода в качестве примера и применяя квантовоэлектродинамический подход в сочетании с линеаризованной квантовой теорией гравитации, мы получили выражения для сечения процесса двухфотонной конверсии и соответствующих угловых корреляций. В рассматриваемом сценарии в качестве источника гравитонов без потери общности может выступать любой массивный астрофизический объект. В частности, в последние годы в литературе обсуждались вопросы, связанные с выбросом гравитонов из бинарных первичных черных дыр (Primordial Black Holes — PBH) в ранней Вселенной или возникающих за счет испарения PBH [36]. Такие гравитоны могут вносить

вклад в стохастический фон гравитационных волн. При этом спектр такого излучения зависит как от массы и спина черных дыр, так и от их красного смещения [37]. То же самое относится и к ситуации, рассмотренной в работе [38], где исследовались возмущения атомов водорода гравитонами в реликтовой плазме. В [38] гравитоны, испускаемые водородом и гелием в ранней Вселенной в процессе рекомбинации, рассматривались в качестве возможного источника гравитационных волн высокой частоты. Проведенные расчеты показали, что наиболее заметный вклад дается переходом  $3d - 1s$  однократно ионизированного гелия  $\text{He}^+$ , который приводит к пику в планковском распределении на частоте 1013 Гц. Однако, как было показано авторами исследования, соответствующая плотность энергии слишком мала для обнаружения.

В предлагаемом здесь сценарии, когда атом водорода служит детектором налетающих гравитонов, анализ угловых корреляций в процессе неупругого рассеяния мог бы послужить средством определения природы частицы, служащей источником возбуждения атома. Тем не менее практическая реализация такого детектора в лабораторных условиях затруднена из-за крайне малого поперечного сечения процесса.

Последнее обстоятельство, по всей видимости, не кажется столь безнадежным, если применить схему эксперимента с лазерным усилением слабого сигнала, аналогичную той, что ранее обсуждалась в работах [39–41]. Следуя [40], рассмотрим систему трехуровневых атомов. Предполагается, что эти атомы находятся в специально сконструированном оптическом резонаторе, в котором имеется резонансная, сигнальная мода на частоте перехода  $1s - 3d$ , а также две резонансные моды на частоте перехода  $3d - 4p$ . В отсутствие населенности на уровнях  $3d$  и  $4p$  две последние моды вырождены по частоте и не связаны друг с другом. При этом одна из этих двух мод (мода накачки  $3d - 4p$ ) возбуждена, т. е. содержит сильное монохроматическое поле накачки, задаваемое внешним источником (лазером). Вторая мода предназначена для возбуждения выходного сигнала — в дальнейшем будем ее называть выходной ( $4p - 3d$ ). В начальном состоянии, т. е. до прихода сигнала, она не возбуждена и никаких полей не содержит. Принцип действия детектора заключается в следующем. До прихода сигнала в сигнальную моду атом, не будучи в резонансе с полем накачки и практически с ним не взаимодействуя, остается в основном состоянии  $1s$ . После прихода сигнала на частоте  $\omega_{1s3d}$  на уровне  $3d$  появляется некоторая населенность. При

этом под действием сильного поля накачки начинаются переходы между уровнями  $3d$  и  $4p$  и возникает осциллирующий дипольный момент на частоте  $\omega_{3d4p}$ , который возбуждает поле в выходной моде. Задача состоит в том, чтобы продемонстрировать, что выходной сигнал может быть существенно больше входного, и определить характерное время возрастания выходного сигнала. Проведенные в работе [42] соответствующие оценки показали, что при числе фотонов в моде накачки, равном 100, и одном фотоне в сигнальной моде в рассматриваемой схеме под влиянием слабого сигнала уровень возбуждения выходной моды за время  $\tau = 10^{-8}$  с достигает уровня возбуждения моды накачки, и следовательно, имеет высокую чувствительность [43]. Эффективность такой схемы для случая, если сигнальная мода возбуждается гравитоном, требует отдельного рассмотрения. При этом важно отметить, что число гравитонов в классической низкочастотной гравитационной волне может быть очень большим (порядка  $10^{36}$ , см., например, [19]).

Несмотря на рассмотренные нами ограничения при детектировании одиночного гравитона, стоит подчеркнуть, что разработанный в работе подход к описанию угловых корреляций может быть применен для любой другой гипотетической тензорной частицы со спином 2 и константой связи более высокого порядка. Несмотря на то, что сечение рассеяния гравитонов пропорционально квадрату планковской длины, исследования такого рода продолжают. В частности, недавно было предложено увеличить чувствительность обнаружения гравитонов в лабораторных экспериментах, используя возмущения массивного ансамбля атомов [19]. Приведенные в [19] оценки вероятностей поглощения гравитонов в различных средах дают надежду на реализацию предложенного авторами подхода.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания САО РАН, утвержденного Министерством науки и высшего образования Российской Федерации. Работа Т. А. З. поддержана фондом развития математики и теоретической физики «БАЗИС» (грант № 23-1-3-31-1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley (1972).



2. A. Lightman, W. Press, R. Price, and S. Teukolsky, *Problem Book in Relativity and Gravitation*, Princeton University Press (2017).
3. S. Bose, I. Fuentes, A. A. Geraci, S. M. Khan, S. Qvarfort, M. Rademacher, M. Rashid, M. Toroš, H. Ulbricht, and C. C. Wanjura, *Massive Quantum Systems as Interfaces of Quantum Mechanics and Gravity*, arXiv: 2311.09218 [quant-ph].
4. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter*, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998).
5. S. Dimopoulos and G. Landsberg, *Black Holes at the Large Hadron Collider*, Phys. Rev. Lett. **87**, 161602 (2001).
6. S. Bose, A. Mazumdar, G. W. Morley, H. Ulbricht, M. Toroš, M. Paternostro, A. A. Geraci, P. F. Barker, M. S. Kim, and G. Milburn, *Spin Entanglement Witness for Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **119**, 240401 (2017).
7. F. Gunnink, A. Mazumdar, M. Schut, and M. Toroš, *Gravitational Decoherence by the Apparatus in the Quantum-Gravity-Induced Entanglement of Masses*, Class. Quant. Grav. **40**, 235006 (2023).
8. T. W. van de Kamp, R. J. Marshman, S. Bose, and A. Mazumdar, *Quantum Gravity Witness via Entanglement of Masses: Casimir Screening*, Phys. Rev. A **102**, 062807 (2020).
9. S. G. Elahi and A. Mazumdar, *Probing Massless and Massive Gravitons via Entanglement in a Warped Extra Dimension*, Phys. Rev. D **108**, 035018 (2023).
10. L. Asprea, A. Bassi, H. Ulbricht, and G. Gasbarri, *Gravitational Decoherence and the Possibility of Its Interferometric Detection*, Phys. Rev. Lett. **126**, 200403 (2021).
11. G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, and S. Sarkar, *Tests of Quantum Gravity from Observations of  $\Gamma$ -Ray Bursts*, Nature **393**, 763 (1998).
12. M. Kamionkowski and E. D. Kovetz, *The Quest for B Modes from Inflationary Gravitational Waves*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **54**, 227 (2016).
13. E. Komatsu, *Hunting for Primordial Non-Gaussianity in the Cosmic Microwave Background*, Class. Quant. Grav. **27**, 124010 (2010).
14. R. Lieu and L. W. Hillman, *The Phase Coherence of Light from Extragalactic Sources: Direct Evidence against First-Order Planck-Scale Fluctuations in Time and Space*, Astrophys. J. **585**, 77 (2003).
15. R. Ragazzoni, M. Turatto, and W. Gaessler, *The Lack of Observational Evidence for the Quantum Structure of Spacetime at Planck Scales*, Astrophys. J. **587**, 1 (2003).
16. F. Dyson, *Is a Graviton Detectable?*, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1330041 (2013).
17. S. Boughn and T. Rothman, *Aspects of Graviton Detection: Graviton Emission and Absorption by Atomic Hydrogen*, Class. Quant. Grav. **23**, 5839 (2006).
18. T. Rothman and S. Boughn, *Can Gravitons Be Detected?*, Found. Phys. **36**, 1801 (2006).
19. G. Tobar, S. K. Manikandan, T. Beitel, and I. Pikovski, *Detecting Single Gravitons with Quantum Sensing*, arXiv: 2308.15440 [quant-ph].
20. L. M. Krauss and F. Wilczek, *Using Cosmology to Establish the Quantization of Gravity*, Phys. Rev. D **89**, 047501 (2014).
21. L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Vol. 2, *Course of Theoretical Physics*, Elsevier Science (1975).
22. J. F. Donoghue, M. M. Ivanov, and A. Shkerin, *EPFL Lectures on General Relativity as a Quantum Field Theory*, arXiv: 1702.00319 [hep-th].
23. J. P. Pitelli and T. R. Perche, *Angular Momentum Based Graviton Detector*, Phys. Rev. D **104**, 065016 (2021).
24. J. Ramos, M. de Montigny, and F. C. Khanna, *On a Lagrangian Formulation of Gravitoelectromagnetism*, Gen. Relat. Grav. **42**, 2403 (2010).
25. S. Y. Choi, J. S. Shim, and H. S. Song, *Factorization and Polarization in Linearized Gravity*, Phys. Rev. D **51**, 2751 (1995).
26. J. F. Donoghue, *The Effective Field Theory Treatment of Quantum Gravity*, in AIP Conf. Proc. **1483**, 73 (2012).
27. D. Prinz, *Gravity-Matter Feynman Rules for Any Valence*, Class. Quant. Grav. **38**, 215003 (2021).

28. O. Y. Andreev, L. N. Labzowsky, G. Plunien, and D. A. Solovyeu, *QED Theory of the Spectral Line Profile and Its Applications to Atoms and Ions*, Phys. Rep. **455**, 135 (2008).
29. A. Anikin, T. Zalialiutdinov, and D. Solovyeu, *Angular Correlations in Two-Photon Spectroscopy of Hydrogen*, Phys. Rev. A **103**, 022833 (2021).
30. A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics*, Wiley-Interscience, New York (1965).
31. U. D. Jentschura, *Nonresonant Two-Photon Transitions in Length and Velocity Gauges*, Phys. Rev. A **94**, 022117 (2016).
32. U. D. Jentschura and C. M. Adhikari, *Relativistic and Radiative Corrections to the Dynamic Stark Shift: Gauge Invariance and Transition Currents in the Velocity Gauge*, Phys. Rev. A **97**, 062120 (2018).
33. D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific, Singapore (1988).
34. D. Solovyeu and L. Labzowsky, *Two-Photon Approximation in the Theory of Electron Recombination in Hydrogen*, Phys. Rev. A **81**, 062509 (2010).
35. W. L. Wiese and J. R. Fuhr, *Accurate Atomic Transition Probabilities for Hydrogen, Helium, and Lithium*, J. Phys. Chem. Ref. Data **38**, 565 (2009).
36. L. A. Anchordoqui, I. Antoniadis, and D. Lüst, *The Dark Universe: Primordial Black Hole – Dark Graviton Gas Connection*, Phys. Lett. B **840**, 137844 (2023).
37. A. Ireland, S. Profumo, and J. Scharnhorst, *Primordial Gravitational Waves from Black Hole Evaporation in Standard and Nonstandard Cosmologies*, Phys. Rev. D **107**, 104021 (2023).
38. J. Hu and H. Yu, *High Frequency Background Gravitational Waves from Spontaneous Emission of Gravitons by Hydrogen and Helium*, Europ. Phys. J. C **81**, 470 (2021).
39. В. П. Быков, В. К. Дубрович, *Отношение сигнал–шум при однофотонных и многофотонных переходах*, Кратк. сообщ. по физике ФИАН **9**, 11 (1989).
40. В. П. Быков, *Релаксация при оптическом детектировании*, Крат. сообщ. по физике ФИАН **9**, 10 (1999).
41. В. П. Быков, *Фотоотсчеты и лазерное детектирование слабых оптических сигналов*, УФН **175**, 495 (2005).
42. В. П. Быков, *Лазерная электродинамика*, Физматлит, Москва (2006).
43. V. P. Bykov and S. S. Postnov, *Specific Features of the Quantum Picture of Laser Detection of Optical Signals*, Phys. Wave Phenomena **2**, 81 (2010).