

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОГИБАЮЩЕЙ ФЕМТОСЕКУНДНОГО ИМПУЛЬСА ПРИ ПОМОЩИ ОДНОМЕРНЫХ ФОТОННЫХ СТРУКТУР С ИСКУССТВЕННОЙ ФОРМОЙ ФОТОННОЙ ЗАПРЕЩЕННОЙ ЗОНЫ

*П. С. Емельянцева, С. Е. Связовский**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 6 июня 2023 г.,
после переработки 5 апреля 2024 г.
Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Теоретически показана возможность создания многослойных диэлектрических структур (фотонных кристаллов), выполняющих интегрирование и дифференцирование первого и высших порядков огибающей фемтосекундного импульса. Эти фотонные кристаллы имеют полностью искусственный профиль фотонной запрещенной зоны, что было достигнуто путем решения обратной задачи вычисления оптического отклика. Продемонстрирована работоспособность данных оптических устройств в спектральном диапазоне шириной более октавы.

DOI: 10.31857/S0044451024090013

1. ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день значительная доля информации передается при помощи оптических сигналов, поэтому актуальной задачей является создание устройств обработки оптической информации напрямую без преобразования в электронный сигнал. Над аналоговыми оптическими сигналами могут выполняться математические операции, такие как дифференцирование и интегрирование [1]. Рассмотрим вначале фотонные дифференциаторы, выходной оптический сигнал которых пропорционален производной от входного по времени. Существуют две основные категории оптических дифференциаторов: дифференциаторы поля (ДП) и дифференциаторы интенсивности (ДИ). В ДИ как входные сигналы, так и выходные дифференцированные сигналы переносятся оптической интенсивностью или оптической мощностью независимо от фазы сигнала, что полезно для сверхширокополосной микроволновой связи [2, 3] и кодирования сигнала [4]. ДИ могут быть реализованы посредством нелинейных эффектов в полупроводниковых опти-

ческих усилителях [3, 4] с помощью некогерентных фотонных процессоров [5] оптоволоконна с высокой нелинейностью [2].

С другой стороны, дифференцирование поля означает, что выходное оптическое поле (комплексный сигнал, включающий как амплитуду, так и фазу) представляет собой дифференцированные сигналы входного поля, что потенциально может применяться для генерации сверхкоротких импульсов [6, 7], генерации сигналов Эрмита – Гаусса нечетной симметрии [8], распознавания фронта импульса [9], а также для настраиваемой фильтрации микроволн [10]. На сегодняшний день ДП были реализованы с помощью волоконных брэгговских решеток [11], брэгговских решеток с фазовым сдвигом [12, 13], блоховских волн в одномерных фотонных кристаллах (ФК), длиннопериодных волоконных решеток [8, 14], интерферометров [15], металл-диэлектрических структур [16], полупроводниковых оптических усилителей [7, 10], кремниевых микрорезонаторов [17–19], а также селективных направленных ответвителей [20, 21].

Оптический временной дифференциатор N -го порядка определяется как устройство, которое вычисляет производную N -го порядка по времени комплексной огибающей входного оптического сигнала. Такие устройства способны обеспечить более слож-

* E-mail: sse@shg.ru

ные временные формы сигналов, такие как функции Эрмита – Гаусса [22], поскольку данные функции являются производными N -го порядка от гауссовой функции. Кроме того, оптические сигналы произвольной формы также могут быть составлены из семейства дифференцирований произвольного порядка гауссова импульса.

В спектральном отклике дифференциатора N -го порядка должен быть нуль N -го порядка на центральной частоте импульса, что достигается, как правило, путем подбора параметров спектральных откликов известных структур фотоники. Дифференциаторы высокого порядка были реализованы каскадными [23], наклонными [24] и специально разработанными волоконными брэгговскими решетками [11], с помощью программируемого формирователя импульсов [25], кремниевых брэгговских решеток [26], двухкаскадного кремниевого волновода с автосвязью [27] и т. д.

Стоит также отметить возможность реализации фотонных дифференциаторов на основе интерферометров Маха – Цендера [28, 29]. Такие устройства могут служить как ДИ, так и ДП, в зависимости от относительного сдвига между длиной волны зонда и резонансной меткой.

Фотонный временной интегратор N -го порядка (где $N = 1, 2, 3 \dots$ относится к порядку интегрирования) представляет собой устройство, которое вычисляет N -й кумулятивный интеграл времени входного сигнала. Временные интеграторы являются фундаментальными базовыми блоками во многих представляющих интерес операциях обработки сигналов, например, в вычислительных, управляющих, сенсорных и коммуникационных сетях [30]. По сравнению со своими электронными аналогами фотонные временные интеграторы могут обеспечить гораздо большую рабочую полосу пропускания, т. е. более высокую скорость обработки. Фотонные временные интеграторы первого порядка были предложены для различных приложений, включая сверхбыстрое формирование импульсов [31, 32], полностью оптические запоминающие устройства [33, 34], а также устройства для аналоговых оптических вычислений [35, 36]. Релевантным примером применения этих устройств являются вычислительные системы, предназначенные для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Линейные ОДУ можно решать в режиме реального времени, используя подходящую комбинацию интеграторов первого и высокого порядков, сумматоров и умножителей. Реализация этих операций полностью оптическим образом привела бы к скорости обра-

ботки, совершенно недостижимой современной электронной техникой.

В последние несколько лет широко исследовались различные реализации фотонных временных интеграторов на основе различных технологий, например, с использованием волоконной брэгговской решетки [37, 38], брэгговских решеток с фазовым сдвигом [39], резонансных дифракционных решеток [40], микрокольцевого резонатора [41–43], системы свертки временного спектра [44], активного резонатора Фабри – Перо с полупроводниковым оптическим усилителем в качестве активной среды [45].

Следует отметить, что несмотря на обилие работ в этой области, предлагаемые подходы к решению поставленной проблемы опираются на известные спектральные свойства различных фотонных структур, в том числе и брэгговских. К примеру, для получения дифференциатора N -го порядка в работе [13] используется комбинация из N микрорезонаторных мод брэгговской структуры с дефектами. Однако такой подход имеет существенные ограничения, поскольку спектральный отклик дефектной моды брэгговской структуры имеет фиксированную форму, отличающуюся от степенной, и из комбинации таких откликов можно создать степенную зависимость лишь в некотором приближении.

В этой работе мы используем универсальный метод построения спектрального отклика на основе решения обратной задачи [46]. Необходимый спектральный отклик в виде степенной функции создается искусственно и может иметь произвольную желаемую форму. Предлагаемый метод позволяет реализовать интеграторы и дифференциаторы в любом спектральном диапазоне без ограничения на его ширину. Демонстрируется применимость метода для устройств с широким рабочим диапазоном вплоть до октавы и более.

2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА

В работе рассматриваются дифференциаторы и интеграторы поля импульса. Пусть на оптическую среду под нулевым углом падает оптический импульс вида

$$E_i(\mathbf{r}, t) = E_0(t)e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (1)$$

где $E_0(t)$ — огибающая импульса, $e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$ — осциллиция на центральной частоте импульса ω_0 , волновой вектор которой в свободном пространстве $k = \omega_0/c$. Поскольку свет падает под нормалью, поляризация импульса не важна, и задача сводится к одномерной.

Пусть одномерный фотонный кристалл задается в виде зависимости показателя преломления $n(x)$ от длины оптического пути, отсчитываемой от входной грани. Использование оптического пути позволяет автоматически учесть влияние дисперсии показателя преломления, что упрощает расчеты. Комплексный спектр коэффициента отражения $r(\omega)$ этого ФК вычисляется при помощи метода матриц распространения [47], при этом непрерывная зависимость $n(x)$ аппроксимировалась дискретной путем деления среды на слои оптической толщиной 20 нм, что много меньше длины волны и, следовательно, характерного периода модуляции. Корректность этого подхода обсуждалась в [48].

Вид отраженного от кристалла импульса находится путем преобразования Фурье. Спектр огибающей исходного сигнала

$$E_0(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

умножается на спектр коэффициента отражения $r(\omega)$, после чего вычисляется обратное преобразование Фурье:

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} r(\omega) E_0(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3)$$

Преобразование Фурье выполнялось численно по алгоритму fast Fourier transform, использовалось 8192 точек с шагом по времени 1 фс, шагом по частоте $2.84 \cdot 10^{11}$ Гц.

3. ДИФФЕРЕНЦИАТОР ОГИБАЮЩЕЙ ИМПУЛЬСА

Дифференциатор сигналов может быть реализован при использовании свойства преобразования Фурье для функции $f(t)$ и ее производной:

$$\frac{d^N f(t)}{dt^N} \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^N f(\omega). \quad (4)$$

В случае дифференцирования огибающей оптического импульса $f(t)e^{i\omega_0 t}$, имеем

$$\frac{d^N f(t)}{dt^N} \xrightarrow{\mathcal{F}} (i(\omega - \omega_0))^N f(\omega - \omega_0). \quad (5)$$

Поэтому дифференцирование сигнала может быть выполнено при помощи элемента, спектральный отклик которого равен

$$K_N(\omega) = \alpha(i(\omega - \omega_0))^N.$$

Проектирование и изготовление подобных структур

составляет значительную сложность. В этой работе мы воспользуемся разработанным ранее [46] универсальным методом построения структуры многослойных сред с произвольной формой спектральной зависимости коэффициента отражения. Применительно к задаче построения заданных откликов $K_N(\omega)$ метод состоит в следующем.

Рассмотрим случай $N = 1$. Построим фотонный кристалл, спектр коэффициента отражения которого имеет линейную зависимость от частоты с полюсом первого порядка посередине. Пусть изначально ФК представляет собой сплошную среду толщиной $D = 100$ мкм, показателем преломления $n_0 = 1.5$ и оптической толщиной $L = nd = 100$ мкм. Введем модуляцию показателя преломления

$$n_1(x) = A_1 \cos(k_1 x + \phi_1) + n_0, \quad (6)$$

где k_1 — волновое число, соответствующее частоте ω_1 ; A_1, ϕ_1 — амплитуда и фаза волны. Световая волна с волновым числом $k_1/2$ будет испытывать дифракционное отражение от среды с данной модуляцией. При этом коэффициент отражения $r(\omega_1)$ будет пропорционален амплитуде модуляции A_1 , соответствующие расчеты приведены, например, в [49], и при росте A_1 коэффициент $r(\omega_1)$ достигнет максимального значения 1. Чтобы этого не происходило, амплитуда модуляции должна быть ограничена сверху.

Теперь введем M пространственных гармоник, пусть их частоты ω_j располагаются равномерно в рассматриваемом диапазоне, середина которого приходится на ω_0 . Пусть в некотором требуемом спектральном диапазоне амплитуда и фаза изменяются линейно с номером гармоники j :

$$A_j = \delta n \left(\frac{j}{M} - \frac{1}{2} \right), \quad \phi_j = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & j < \frac{N}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & j > \frac{N}{2}, \end{cases} \quad (7)$$

где δn — амплитуда модуляции показателя преломления. Просуммируем все гармоники модуляции, в результате чего получим распределение показателя преломления с глубиной ФК следующего вида:

$$n_I(x) = n_0 + \delta n \sum_{j=1}^M \left(\frac{j}{M} - \frac{1}{2} \right) \cos \left(\frac{2\omega_j x}{c} + \phi_j \right). \quad (8)$$

Зависимость $n_I(x)$ полностью задает структуру ФК. График $n(x)$ показан на рис. 1а, он имеет вид суммы гармонических функций с близкими частотами, между которыми наблюдаются биения, максимум биений наблюдается примерно в середине кристалла.

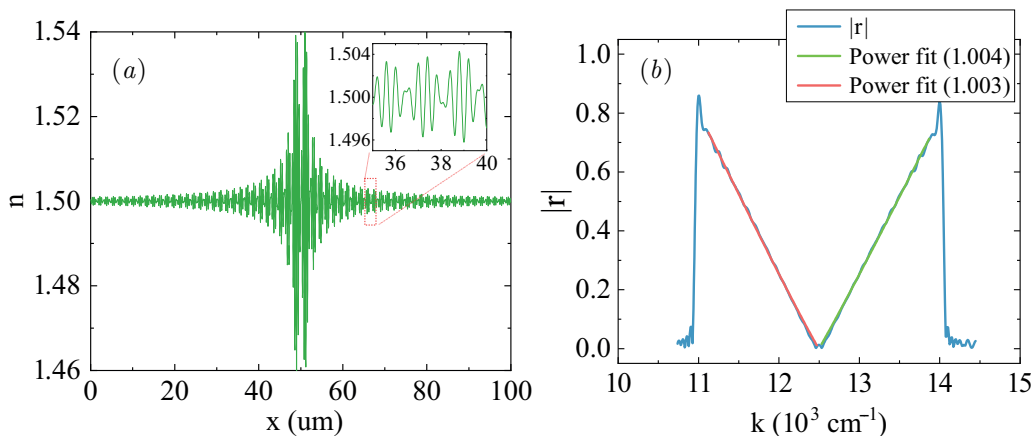


Рис. 1. *a* — Структура ФК в виде пространственного профиля показателя преломления $n_I(x)$, на вставке увеличенный фрагмент 60–63 мкм, *b* — спектр амплитудного коэффициента отражения этого ФК с аппроксимациями частей графика степенными функциями

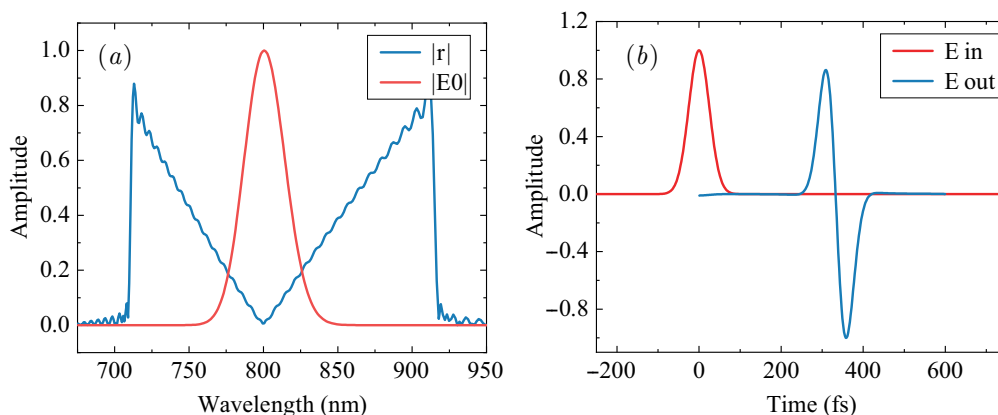


Рис. 2. *a* — Спектр модуля коэффициента отражения в сравнении со спектром падающего импульса, *b* — временные профили действительной части падающего и отраженного от данного ФК импульсов

Построим такой ФК, выбрав $L = 100 \mu\text{м}$, $\delta n = 0.07$, число гармоник $M = 300$, спектральный диапазон от 11 до 14 тыс. обратных сантиметров. Середина диапазона соответствует волновому числу $k_0 = 12500 \text{ см}^{-1}$ или длине волны $\lambda_0 = 800 \text{ нм}$. Спектр коэффициента отражения такого ФК продемонстрирован на рис. 1*b*. Спектр имеет V-образную форму в виде функции $y = |x|$, нуль функции совпадает с серединой спектрального диапазона.

Участки спектра, которые были заданы в виде линейных функций, были аппроксимированы степенной функцией, нуль которой соответствовал волновому числу $k_0 = 12500 \text{ см}^{-1}$. Участок от 11 до 12.4 тыс. см^{-1} аппроксимировался функцией $y = A(k_0 - k)^\alpha$, участок от 12.6 до 14 тыс. см^{-1} — функцией $y = A(k - k_0)^\alpha$. Результаты аппроксимации дают значения показателей степени $\alpha_1 = 1.003$ и $\alpha_2 = 1.004$ соответственно, что очень близко к линейной функции.

Пусть на этот ФК падает импульс света с центральной длиной волны 800 нм и гауссовой огибающей длительностью 50 фс, его спектр показан на рис. 2*a*, а временной профиль на рис. 2*b*. Спектр импульса попадает в рабочую область ФК, центральная частота импульса соответствует нулю коэффициента отражения. Временные профили отраженного и прошедшего сквозь кристалл импульсов показаны на рис. 2*d*.

Огибающая отраженного импульса имеет форму функции Эрмита–Гаусса первого порядка, что соответствует производной гауссовой функции. Центр отраженного импульса выходит из ФК в момент $t = 334 \text{ фс}$, что соответствует прохождению оптического пути $ct = 100 \mu\text{м}$, таким образом импульс отражается приблизительно от середины кристалла.

Для той же структуры $n_I(x)$ рассмотрим примеры дифференцирования других функций. На рис. 3 показаны расчеты отраженных импульсов для раз-

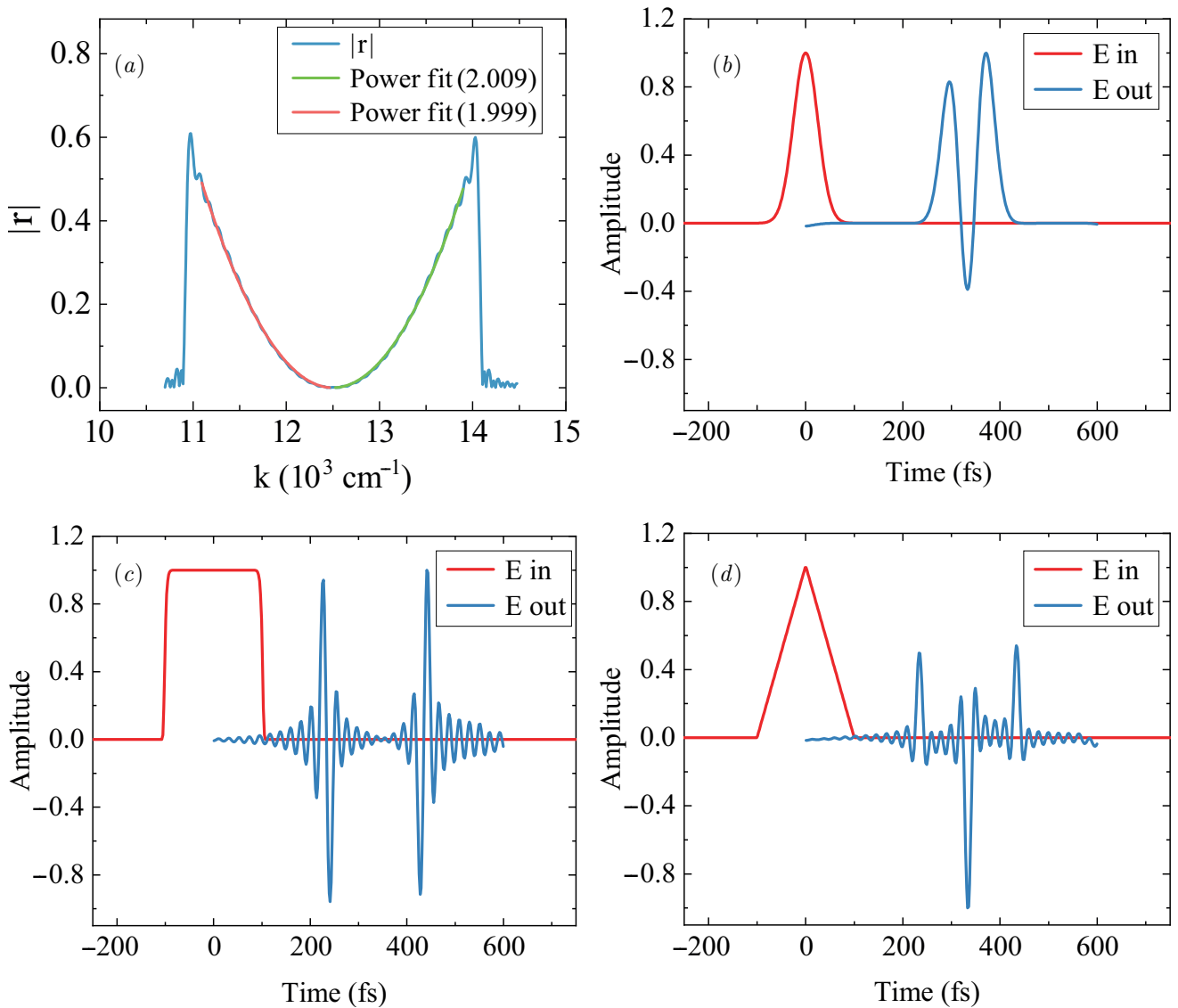


Рис. 3. Временные профили падающих и отраженных импульсов от ФК с линейно модулированной запрещенной зоной. Падающие импульсы: *a* — Эрмита–Гаусса 1 порядка, *b* — Эрмита–Гаусса 5 порядка, *c* — прямоугольный, *d* — треугольный

личной формы падающих. В случае падения импульсов, огибающая которых имеет форму функции Эрмита–Гаусса порядков 1 и 5, отраженные импульсы имеют огибающую, форма которой соответствует функции Эрмита–Гаусса порядков 2 и 6 соответственно. Прямоугольный импульс дифференцируется в виде двух коротких пиков противоположного знака, временная задержка между максимумами соответствует длительности исходного импульса. Треугольный импульс после преобразования имеет вид двух последовательных П-образных импульсов разной полярности с горизонтальными участками, среднее значение амплитуды которых составляет 0.56 и 0.67, при этом отклонения импульсов от средних значений горизонтальных участков не превышают 17%.

4. ДИФФЕРЕНЦИАТОРЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим дифференциатор второго порядка. Пусть пространственный профиль показателя преломления имеет вид

$$n_{II}(x) = n_0 + \delta n \sum_{j=1}^M \left(\frac{j}{M} - \frac{1}{2} \right)^2 \cos \left(\frac{2\omega_j x}{c} + 2\phi_j \right). \quad (9)$$

Спектр коэффициента отражения такого ФК показан на рис. 4*a*. На участке 11–14 тыс. см⁻¹ он имеет форму квадратичной функции, ветви этой функции были аппроксимированы при помощи степенной функции с нулем в середине диапазона. Результаты аппроксимации показывают степени 2.009 и 1.999,

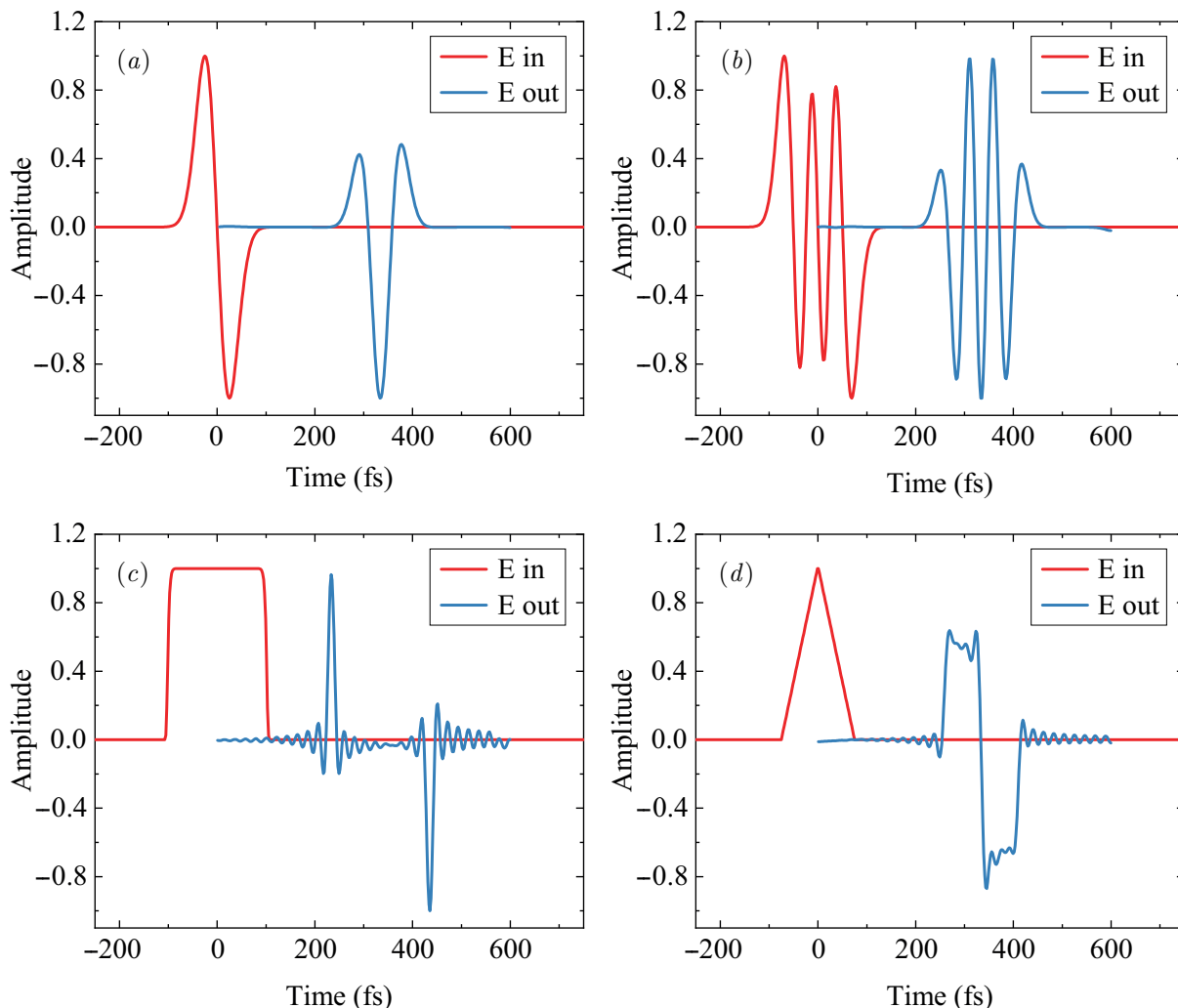


Рис. 4. *a* — Спектр модуля коэффициента отражения ФК n_{II} и аппроксимации частей спектра степенными функциями, *b* — временные профили действительной части падающего и отраженного от данного ФК импульсов в случае падения гауссова импульса, *c* — прямоугольного, *d* — треугольного

что говорит о хорошем воспроизведении заданной квадратичной последовательности.

Вычисленный результат отражения гауссова импульса длительностью 50 фс и центральной длиной волны $800 \text{ нм} = 12500 \text{ см}^{-1}$ показан на рис. 4*b*. Форма отраженного импульса соответствует функции Эрмита–Гаусса 2-го порядка. Как и в случае дифференциатора первого порядка, центр отраженного сигнала также смещен на 330 фс, что соответствует отражению от середины кристалла. В случае прямоугольного импульса (рис. 4*c*) отклик имеет вид четырех резких пиков, соответствующих производной от функции, изображенной на рис. 3*c*. В случае треугольного импульса зависимость отраженного сигнала имеет вид трех пиков, средний из которых имеет обратную полярность и вдвое больше крайних. Это соответствует производной от первой производной треугольной функции (рис. 3*d*).

Дифференциаторы более высоких порядков (N) могут быть получены путем построения структуры фотонного кристалла вида

$$n_N(x) = n_0 + \delta n \sum_{j=1}^M \left(\frac{j}{M} - \frac{1}{2} \right)^N \cos \left(\frac{2\omega_j x}{c} + N\phi_j \right). \quad (10)$$

На рис. 5 показаны примеры построения дифференциаторов высших порядков и соответствующих отраженных импульсов для случая падения импульса гауссовой формы длительности 50 фс. Все профили отраженных импульсов имеют число нулей, соответствующее степени дифференцирования. Однако с ростом этой степени падает величина первого и последнего максимума и форма огибающей отличается от соответствующей функции Эрмита–Гаусса. Поэтому дальнейшее увеличение степени дифференцирования было решено не выполнять.

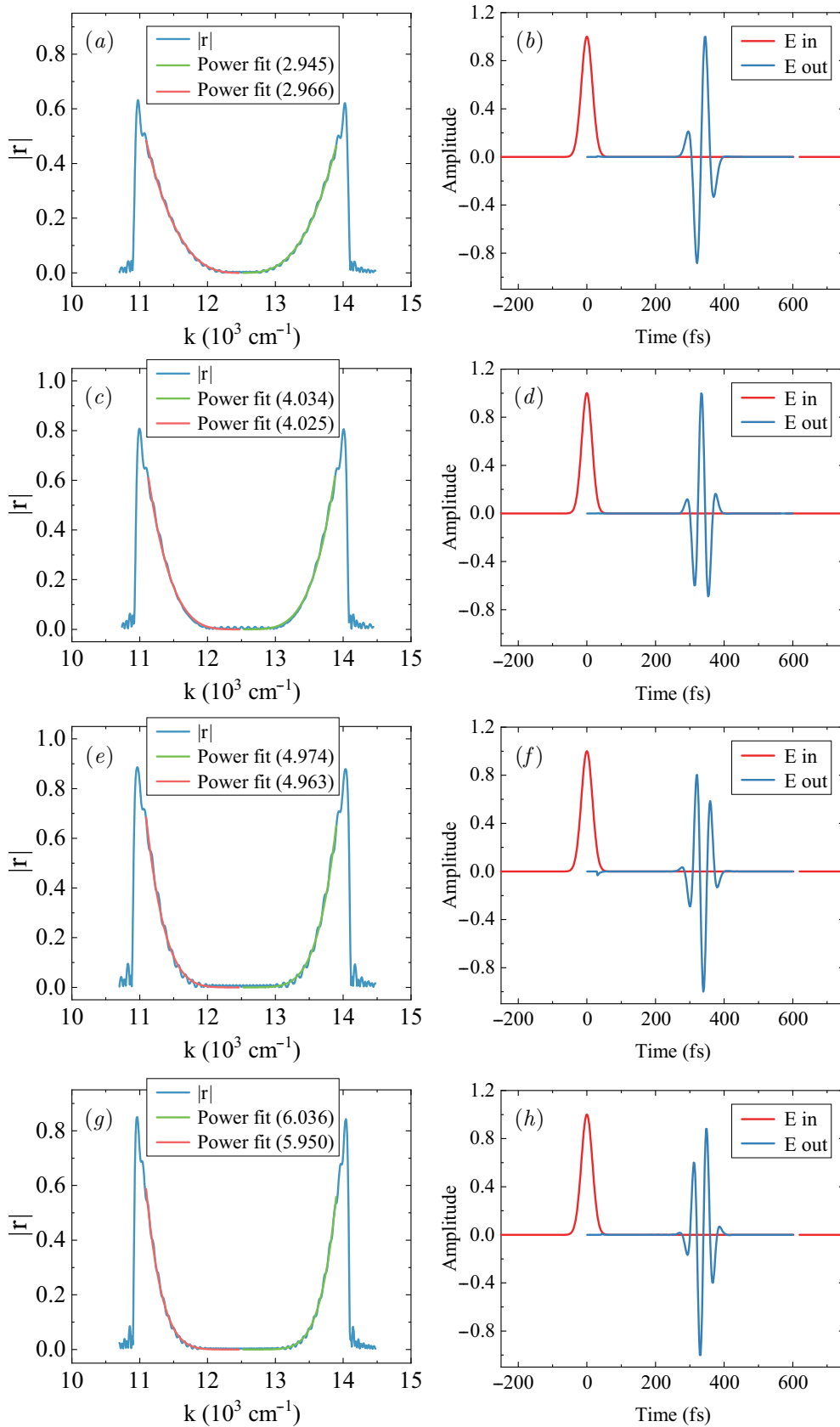


Рис. 5. Спектры модуля коэффициента отражения ФК, аппроксимации частей спектра степенными функциями и временные профили отраженных импульсов, соответствующих порядкам дифференциатора: *a, b* — 3, *c, d* — 4, *e, f* — 5, *g, h* — 6

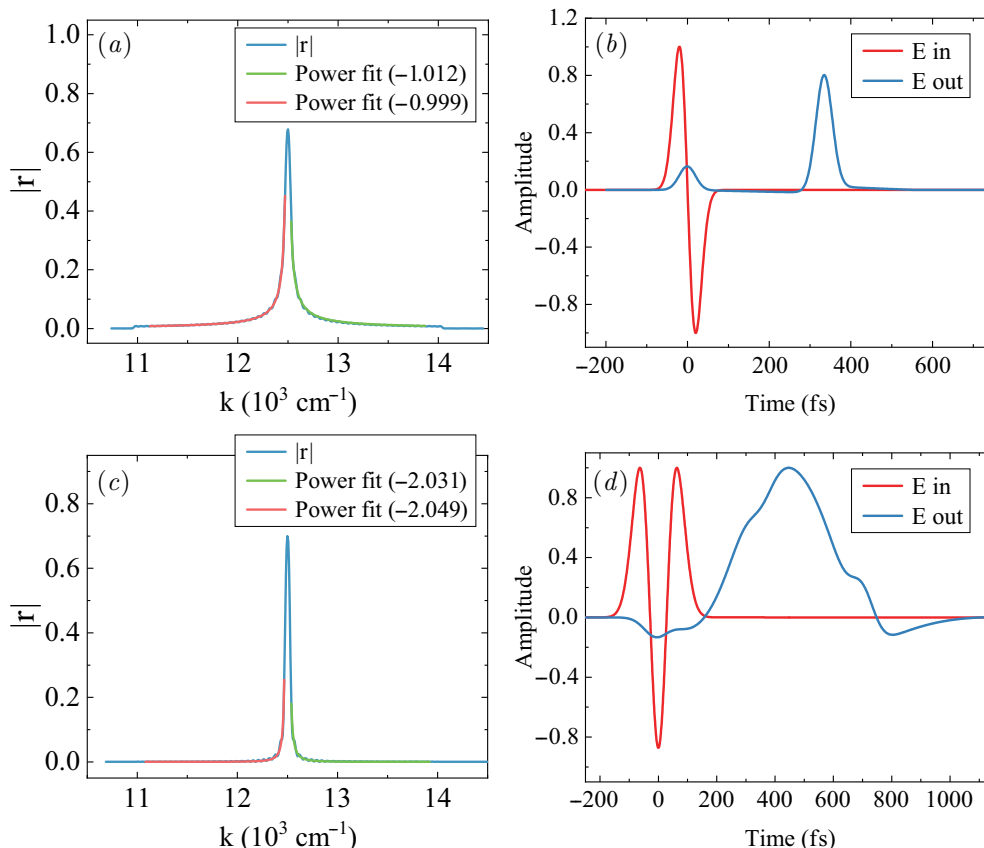


Рис. 6. Спектры модуля коэффициента отражения ФК и аппроксимации частей спектра степенными функциями *a, c* и временные профили отраженных импульсов *b, d*, демонстрирующие интеграторы первого и второго порядков

5. ИНТЕГРАТОР

Согласно свойству преобразования Фурье для первообразной функции $F(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^{-1}f(\omega)$, временной интегратор N -го порядка огибающей оптического импульса, аналогично (5):

$$F^{(N)}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(i(\omega - \omega_0))^N} f(\omega - \omega_0) \quad (11)$$

может быть построен на оптическом элементе, спектральный отклик которого имеет полюс N -го порядка. Построим фотонный кристалл с профилем показателя преломления

$$n(x) = n_0 + \delta n \sum_{j=1}^M \left(\frac{i}{M} - \frac{1}{2} \right)^{-N} \cos \left(\frac{2\omega_j x}{c} - N\phi_j \right). \quad (12)$$

Спектр коэффициента отражения этого ФК показан на рис. 6*a*. Спектр ФК с полюсом второго порядка в спектральном отклике показан на рис. 6*c*. Соответствующие аппроксимации степенными функциями приведены на графиках, показатели степени хорошо сходятся с входными данными. В качестве входных импульсов для задач интегриро-

вания были выбраны функции Эрмита–Гаусса первого и второго порядков. Для них ожидается первообразная в виде гауссовой функции. Первообразная первого порядка показана на рис. 6*b*, ее форма хорошо воспроизводит гауссову функцию. Первообразная второго порядка показана на рис. 6*d*. Видно, что функция очень грубо повторяет гауссов импульс, а также имеет место значительное уширение импульса во времени. Поэтому дальнейшее повышение степени первообразной не проводилось.

6. РАБОЧИЙ ДИАПАЗОН

Предлагаемые устройства выполняют преобразование импульсов при помощи спектральной модуляции, поэтому важно выяснить их рабочий спектральный диапазон. Для примера возьмем рассмотренный дифференциатор второго порядка вида $n_{II}(x)$. Пусть на него падают импульсы полной длительностью на половине высоты по полю от 16 до 40 фс. Их спектры в сравнении со спектром ФК показаны на рис. 7*a*, соответствующие временные профили падающих и отраженных импульсов изображены на рис. 7*b*. Для наглядности спектры приведены в нанометрах, поэтому спектр коэффициента

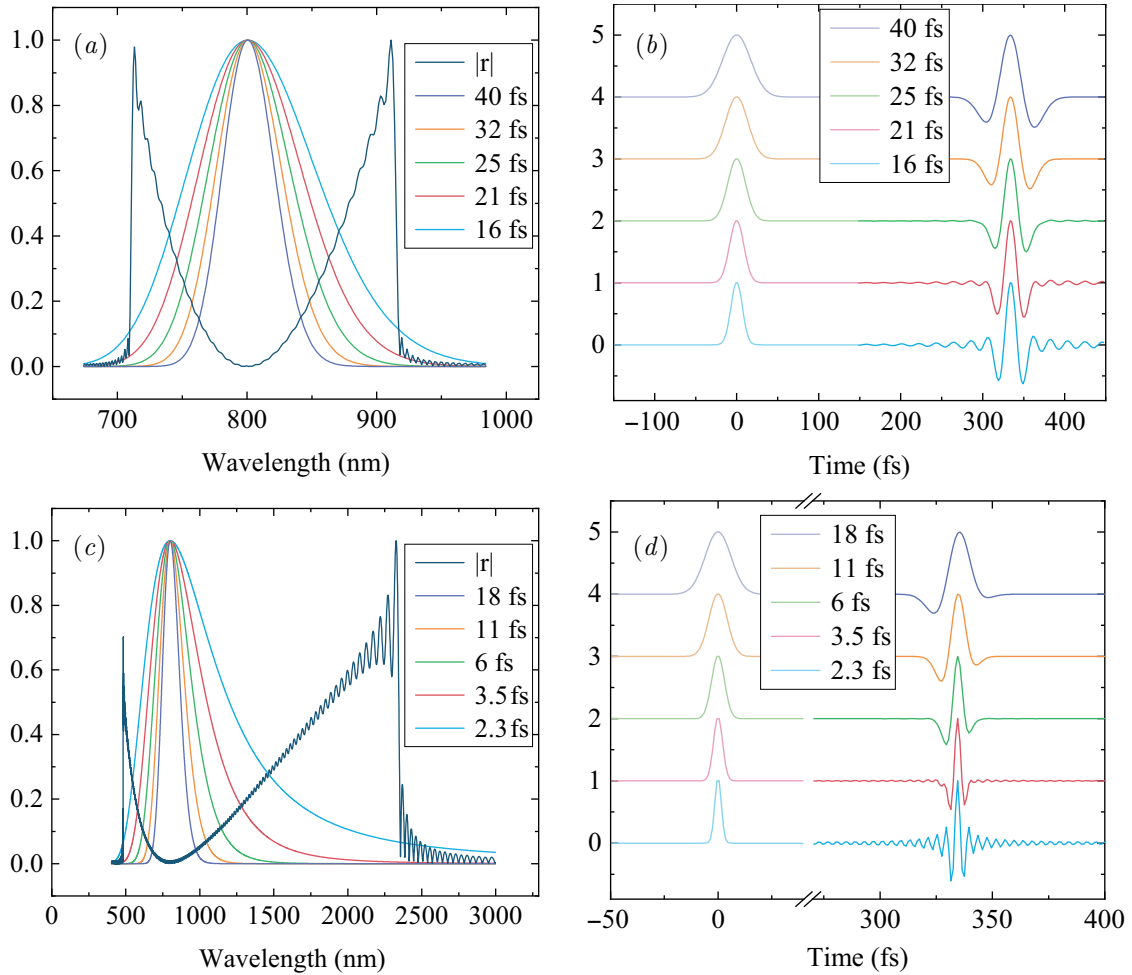


Рис. 7. Спектральные отклики дифференциаторов второго порядка с центральной частотой 12500 см^{-1} и шириной рабочего диапазона 3125 см^{-1} (a) и 16400 см^{-1} (c) и соответствующие им временные профили падающих (b) и отраженных (d) импульсов

отражения, зависящий от волнового числа параболически, выглядит искаженно.

При уменьшении длительности импульса от 40 до 16 фс уширяется спектр импульса, его края выходят за рабочий диапазон ФК. Это приводит к появлению паразитных осцилляций, которые видны на временном профиле отраженного импульса. Длительность импульса 25 фс в данной демонстрации подобрана таким образом, чтобы уровень амплитуды паразитных осцилляций достигал 1% по полю, а длительность 16 фс — 10% по полю и 1% по интенсивности. Эти длительности соответствуют спектральным ширинам импульсов 583 и 890 см^{-1} , таким образом, чтобы избежать паразитных осцилляций, необходимо выбирать рабочий диапазон шире спектра импульса в соответственно 5.3 и 3.5 раза.

Теперь расширим рабочий диапазон до величины 16400 см^{-1} , т.е. диапазон простирается от 4300 до 20700 см^{-1} , что является шире октавы по частоте.

На рис. 7c показан спектр коэффициента отражения при таком диапазоне. Пусть на ФК падают импульсы, длительность которых изменяется от 2.3 до 18 фс (рис. 7d). Паразитные осцилляции появляются при длительности 3.5 фс (ширина спектра 6233 см^{-1}), дальнейшее уменьшение длительности приводит к сильному искажению в расчетах. Это связано с тем, что длительность оптического цикла на длине волны 800 нм составляет 2.67 фс, и уменьшение длительности менее этой величины нарушает предположение о существовании огибающей импульса.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из приведенных расчетов, для рассмотренных ФК требуется возможность непрерывно варьировать показатель преломления $n(x)$ с пространственным периодом порядка половины длины волны, создавать структуры толщиной до 100 мкм, а также отсутствие значимого поглощения или рас-

сеяния после прохождения через такую толщину. Это может быть реализовано в ФК, изготовленных на основе анодного оксида алюминия и титана, а также двухфотонной лазерной литографии. Известно [50], что ФК на основе окисленного пористого кремния позволяют изготавливать структуры необходимого размера и величины модуляции периода.

В этой работе были теоретически продемонстрированы методы построения фотонных кристаллов, реализующих математические операции дифференцирования с первого по шестой порядки, а также интегрирования первого и второго порядков, выполняемые над огибающими фемтосекундных импульсов во времени. Исследована максимально достижимая ширина спектра импульса и показано, что предлагаемый подход позволяет изготавливать дифференциаторы с шириной диапазона более октавы.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 21-72-10103, <https://rscf.ru/project/21-72-10103/>.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Bykov, L. Doskolovich, and V. Soifer, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **114**, 724 (2012).
2. P. Velanas, A. Bogris, A. Argyris, and D. Syvridis, *Journal of Lightwave Technology* **26**(18), 3269 (2008).
3. J. Xu, X. Zhang, J. Dong, D. Liu, and D. Huang, *Opt. Lett.* **32**, 1872 (2007).
4. J. Dong, Y. Yu, Y. Zhang, X. Li, D. Huang, and X. Zhang, *Opt. Express* **19**(11), 10587 (2011).
5. Y. Park, M. H. Asghari, R. Helsten, and J. Azaña, *IEEE Photonics Journal* **2**(6), 1040 (2010).
6. N. Ngo, S. Yu, S. Tjin, and C. Kam, *Optics Communications* **230**(1), 115 (2004).
7. Z. Li and C. Wu, *Opt. Lett.* **34**(6), 830 (2009).
8. R. Slavík, Y. Park, M. Kulishov, R. Morandotti, and J. Azaña, *Opt. Express* **14**(22), 10699 (2006).
9. J. Dong, X. Zhang, S. Fu, J. Xu, P. Shum, and D. Huang, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* **14**(3), 770 (2008).
10. X. Li, J. Dong, Y. Yu, and X. Zhang, *IEEE Photonics Technology Letters* **23**(5), 308 (2011).
11. L. M. Rivas, K. Singh, A. Carballar, and J. Azaña, *IEEE Photonics Technology Letters* **19**(16), 1209 (2007).
12. N. K. Berger, B. Levit, B. Fischer, M. Kulishov, D. V. Plant, and J. Azaña, *Optics express* **15**(2), 371 (2007).
13. M. Kulishov and J. Azaña, *Optics Express* **15**(10), 6152 (2007).
14. R. Slavík, Y. Park, M. Kulishov, and J. Azaña, *Opt. Lett.* **34**(20), 3116 (2009).
15. Y. Park, J. Azaña, and R. Slavík, *Opt. Lett.* **32**(6), 710 (2007).
16. L. L. Doskolovich, A. I. Kashapov, E. A. Bezus, and D. A. Bykov, *Photonics and Nanostructures-Fundamentals and Applications* **52**, 101069 (2022).
17. F. Liu, T. Wang, L. Qiang, T. Ye, Z. Zhang, M. Qiu, and Y. Su, *Opt. Express* **16**(20), 15880 (2008).
18. Y. Hu, L. Zhang, X. Xiao, Z.-Y. Li, Y. Li, T. Chu, Y. Su, Y. Yu, and J. Yu, *Journal of Optics* **14** (2012).
19. J. Dong, A. Zheng, D. Gao, S. Liao, L. Lei, D. Huang, and X. Zhang, *Opt. Lett.* **38**(5), 628 (2013).
20. T. L. Huang, A. L. Zheng, J. J. Dong, D. S. Gao, and X. L. Zhang, *Opt. Lett.* **40**(23), 5614 (2015).
21. T.-J. Ahn and J. Azaña, *Opt. Express* **19**(8), 7625 (2011).
22. Y. Park, M. Kulishov, R. Slavík, and J. Azaña, *Opt. Express* **14**(26), 12670 (2006).
23. L. M. Rivas, S. Boudreau, Y. Park, R. Slavík, S. La-Rochelle, A. Carballar, and J. Azaña, *Opt. Lett.* **34**(12), 1792 (2009).
24. M. Li, L.-Y. Shao, J. Albert, and J. Yao, *IEEE Photonics Technology Letters* **23**(4), 251 (2011).
25. Y. Yu, F. Jiang, H. Tang, L. Xu, X. Liu, J. Dong, and X. Zhang, *Opt. Express* **24**(11), 11739 (2016).
26. K. Rutkowska, D. Duchesne, M. Strain, R. Morandotti, M. Sorel, and J. Azaña, *Opt. Express* **19**(20), 19514 (2011).
27. L. Zhang, J. Wu, X. Yin, X. Sun, P. Cao, X. Jiang, and Y. Su, *IEEE Photonics Journal* **6**(2), 1 (2014).

28. J. Dong, A. Zheng, D. Gao, L. Lei, D. Huang, and X. Zhang, *Opt. Express* **21**(6), 7014 (2013).
29. S. Yan, Z. Cheng, L. H. Frandsen, Y. Ding, F. Zhou, J. Dong, and X. Zhang, *Opt. Lett.* **42**(8), 1596 (2017).
30. R. Slavík, Y. Park, N. Ayotte, S. Doucet, T.-J. Ahn, S. LaRochelle, and J. Azaña, *Opt. Express* **16**(22), 18202 (2008).
31. N. Q. Ngo, *Appl. Opt.* **45**(26), 6785 (2006).
32. A. Karimi, A. Zarifkar, and M. Miri, *J. Lightwave Technol.* **38**(8), 2346 (2020).
33. Y. Ding, X. Zhang, X. Zhang, and D. Huang, *Optics Communications* **281**(21), 5315 (2008).
34. M. H. Asghari and J. Azaña, *IEEE Photonics Technology Letters* **23**(4), 209 (2011).
35. Y. Park, T.-J. Ahn, Y. Dai, J. Yao, and J. Azaña, *Opt. Express* **16**, 17817 (2008).
36. J. Azaña, *IEEE Photonics Journal* **2**(3), 359 (2010).
37. A. Mohammad H., W. Chao, Y. Jianping, and J. Azaña, *Opt. Lett.* **35**(8), 1191 (2010).
38. M. H. Asghari, Y. Park, and J. Azaña, *Opt. Express* **19**(2), 425 (2011).
39. N. V. Golovastikov, D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, and E. A. Bezus, *Optics Communications* **338**, 457 (2015).
40. D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, and V. A. Soifer, *JETP Letters* **95**, 6 (2012).
41. W. Liu, M. Li, R. S. Guzzon, E. J. Norberg, J. S. Parker, L. A. Coldren, and J. Yao, *Journal of Lightwave Technology* **32**(20), 3654 (2014).
42. M. Ferrera, Y. Park, L. Razzari, B. Little, S. Chu, R. Morandotti, D. Moss, and J. Azaña, *Nature communications* **1**, 29 (2010).
43. M. Ferrera, Y. Park, L. Razzari, B. E. Little, S. T. Chu, R. Morandotti, D. J. Moss, and J. Azaña, *Opt. Express* **19**(23), 23153 (2011).
44. A. Malacarne, R. Ashrafi, M. Li, S. LaRochelle, J. Yao, and J. Azaña, *Opt. Lett.* **37**(8), 1355 (2012).
45. N. Huang, M. Li, R. Ashrafi, L. Wang, X. Wang, J. Azaña, and N. Zhu, *Opt. Express* **22**(3), 3105 (2014).
46. P. Emeliantsev, N. Pyshkov, and S. Svyakhovskiy, *JETP Letters* **117**(11), 821 (2023).
47. A. Luce, A. Mahdavi, F. Marquardt, and H. Wankerl, *JOSA A* **39**(6), 1007 (2022).
48. P. Baumeister, *Applied optics* **25**(16), 2644 (1986).
49. S. Svyakhovskiy and N. Pyshkov, *Moscow University Physics Bulletin* **78**(4), 484 (2023).
50. S. Svyakhovskiy and N. Pyshkov, *Optics and Spectroscopy* **131**(8), 1070 (2023).