ЖЭТФ, 2024, том 166, вып. 2 (8), стр. 153–161

САМОСОГЛАСОВАННЫЙ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

С. В. Сазонов[*]

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
125993, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 января 2024 г.,
после переработки 17 марта 2024 г.
Принята к публикации 18 марта 2024 г.

Предложен приближенный самосогласованный подход, позволяющий описывать квазиклассическую поступательную динамику нерелятивистской частицы в диссипативной среде при произвольном характере зависимости соответствующих диссипативных сил от скорости. Показано, что диссипация подавляет квантовые свойства частицы. Это приводит к необходимости интерпретировать распространение в диссипативной среде как непрерывный процесс измерения состояния частицы. В качестве примеров рассмотрены нестационарные когерентные состояния частицы на трех стадиях ее торможения в среде за счет ионизационных потерь. Данные стадии соответствуют высокоэнергетическим потерям, потерям в окрестности брэгговского пика, а также низкоэнергетическим потерям на заключительной стадии распространения.

DOI: 10.31857/S0044451024080017

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие методов квантования в открытых системах тесно связано с фундаментальными вопросами измерения состояний квантовых объектов [1, 2]. В качестве квантового объекта может выступать частица, над которой производит измерение диссипативная среда, выполняющая роль классического прибора. При этом непрерывное измерение средой состояния частицы сопровождается непрерывным коллапсом волновой функции [3].

На сегодняшний день существует множество способов квантово-механического описания движения частиц в диссипативных средах [4–17]. При этом следует заметить, что различные методы зачастую приводят к несколько различающимся физическим результатам и выводам. С физической точки зрения, весьма последовательным и приводящим к разумным результатам представляется подход, основанный на марковском приближении при решении уравнений для матрицы плотности [18–23]. С другой стороны, гамильтонов подход, предложенный в работах [4, 5], привлекает своей простотой. Однако здесь возникают трудности при квантовом рассмотрении движения частиц в объемных средах [24, 25].

Гамильтонов способ квантования можно использовать после классического анализа движения выделенной частицы в среде, которая действует на эту частицу посредством диссипативных сил. Таким образом, в этом случае можно говорить о поиске квантового соответствия движению классической частицы. Уже на данном этапе рассуждений становится понятной квазиклассическая суть подобного рассмотрения.

В работах [4–7] развит способ квантования в случае, когда на нерелятивистскую частицу действует диссипативная сила, пропорциональная скорости $\mathbf{v}$. В работах [26, 27] предложена процедура квазиклассического квантования при наличии диссипативных сил, пропорциональных скорости и квадрату скорости частицы. Важно заметить, что данные силы вводятся в теорию феноменологически, без детального анализа их физической природы. Последовательное микроскопическое рассмотрение движения час-

[*] E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

тиц в различных средах показывает, что сопровождающим данное движение потерям энергии можно сопоставить силы, зависящие от скорости весьма сложным образом [28–30]. В этой связи возникает задача разработки подхода, который позволит найти квазиклассическое соответствие движению нерелятивистской классической частицы под действием диссипативных сил, произвольно зависящих от скорости. Решению этой задачи посвящена настоящая работа.

2. КЛАССИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Пусть движение классической частицы массы m описывается лагранжианом L, явная зависимость которого от времени определяется функцией $q(t)$:

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} q(t). \tag{1}$$

Будем полагать ниже, что какие-либо внешние консервативные силы отсутствуют.

Отсюда с помощью уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

придем к уравнению движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\frac{\dot{q}}{q}\mathbf{v}, \tag{2}$$

где точка над переменной обозначает производную по времени.

Пусть диссипативная сила, действующая на частицу, имеет вид

$$\mathbf{F}_d = -mf(v(t))\mathbf{v}, \tag{3}$$

где $f(v(t))$ — некоторая положительно определенная функция, зависящая от времени через скорость v частицы.

Сопоставляя (2) с классическим уравнением движения и учитывая (3), имеем

$$\frac{\dot{q}}{q} = f(v(t)). \tag{4}$$

Интегрируя (2), получим

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_0}{q}, \tag{5}$$

где $\mathbf{v}_0$ — начальная (при $t = 0$) скорость частицы.

Интегрируя (5), найдем классическую траекторию частицы, описываемую зависимостью радиус-вектора $\mathbf{r}_c$ частицы от времени:

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\tau, \tag{6}$$

где $\mathbf{r}_0$ — начальный радиус-вектор частицы, а редуцированное время τ определяется выражением

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{q(t')}. \tag{7}$$

Отсчет времени здесь начинается с момента попадания частицы в диссипативную среду.

Подставляя (5) в (4), придем к дифференциальному уравнению для определения функции q:

$$\dot{q} = qf(v_0/q). \tag{8}$$

Дополним данное уравнение очевидным (см. (5)) начальным условием

$$q(0) = 1. \tag{9}$$

Отсюда, а также из (4) следует, что $q(t)$ — монотонно возрастающая функция времени. Благодаря диссипации, частица в конце-концов останавливается. Тогда, учитывая (5) и (9), приходим к выводу, что значения $q(t)$ лежат в интервале $1 \leqslant q(t) \leqslant \infty$. Отсюда и из (7) видно, что $\tau(t)$ также монотонно возрастает с течением времени. Если $q(t)$ достигает бесконечного значения за конечное время t_{max}, то верхнему пределу в интеграле (7), $t = t_{max}$, соответствует максимальное значение редуцированного времени τ_{max}. Возможны ситуации, когда $t_{max} \to \infty$ (см. ниже). В общем случае интеграл (7) при $t = t_{max}$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Таким образом, решив задачу (8), (9), найдем функцию $q(t)$. Этим самым будет найден лагранжиан (1), самосогласованным образом учитывающий действие на частицу диссипативной силы (3). В свою очередь, с помощью (5) мы определим классическую скорость частицы как функцию времени. Затем, подставив $q(t)$ в (7), найдем редуцированное время τ. После этого выражение (6) позволит нам определить положение классической частицы в пространстве в каждый момент времени.

С прикладной точки зрения, значительный интерес представляет вычисление потерь энергии W частицы в зависимости от пройденного пути s. Из (5) и (6) видно, что движение классической частицы является прямолинейным, а ее пройденный путь s определяется выражением

$$s = |\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_0| = v_0\tau.$$

Тогда, переходя от векторного вида к скалярному, запишем

$$\dot{v} = v\frac{dv}{ds}.$$

В результате уравнение (2) с учетом (4) примет вид

$$\frac{dv}{ds} = -f(v). \tag{10}$$

Интегрируя данное уравнение с учетом граничного условия $v(0) = v_0$, найдем зависимость $v(s)$. Отсюда получим зависимость энергии $W = mv^2/2$ частицы от пройденного пути. После этого определим удельные потери $-dW/ds$.

Очевидно, что полная длина пробега s_{max} частицы при торможении в диссипативной среде определится выражением $s_{max} = v_0\tau_{max}$.

Используя (1), для канонического импульса найдем

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v}q. \tag{11}$$

Тогда для гамильтониана

$$H = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L$$

будем иметь

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2mq(t)}. \tag{12}$$

Выражения (2), (4)–(9) описывают классическую траекторию частицы, соответствующую экстремуму функционала действия

$$S = \int\limits_0^t L dt'.$$

Поэтому решение уравнения (8) при начальном условии (9) содержит величину v_0 начальной скорости частицы. В результате подстановка найденной функции $q(t)$ при заданном значении v_0 в выражение (12) приводит к эффективному гамильтониану, в котором самосогласованным образом учитывается действие на классическую частицу диссипативных сил, произвольным образом зависящих от скорости частицы. Поскольку характер явной зависимости $q(t)$ определяется только классической траекторией частицы, последующее квантование движения на основе выражений (3), (8), (9) и (12) содержит в себе признаки квазиклассического приближения [31].

Эффективный гамильтониан (12) зависит от начальной скорости v_0. Поэтому рассматриваемое условие самосогласования заранее накладывает ограничение на вид волновой функции частицы. А именно, данный вид должен содержать в себе признаки классической частицы, обладающей заданной начальной скоростью.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Для перехода к квантово-механическому описанию совершим стандартную замену канонического импульса $\mathbf{p}$ эрмитовым оператором $\hat{\mathbf{p}}$ в координатном представлении:

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla.$$

Тогда нестационарное квазиклассическое уравнение Шредингера для волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ запишется в виде

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2mq(t)}\nabla^2\psi, \tag{13}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, принадлежащий одной из виртуальных траекторий частицы.

Легко видеть, что из (13) следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0,$$

где

$$\rho = |\psi|^2,$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2imq}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*).$$

Отсюда видно, что величина $\rho(\mathbf{r}, t)$, как и в консервативном случае, имеет смысл плотности вероятности обнаружения частицы в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$ в момент времени t. Следовательно, здесь также справедливо условие нормировки

$$\int \rho(\mathbf{r}, t)\, d\mathbf{r} = 1,$$

где интегрирование ведется по всему пространству, в котором может находиться частица.

При начальной волновой функции $\psi(\mathbf{r}, 0)$ уравнение (13) имеет следующее решение:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)\, \psi(\mathbf{r}', 0)\, d\mathbf{r}', \tag{14}$$

где квазиклассическая функция Грина $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$ определяется выражением

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\tau}\right)^{3/2} \exp\left(i\frac{m}{2\hbar\tau}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2\right). \tag{15}$$

Динамический параметр $q(t)$ в квазиклассическом уравнении Шредингера (13) зависит от величины v_0 начальной скорости частицы (см. (8)). Поэтому в соответствии с самосогласованным подходом выберем начальную волновую функцию в виде гауссова волнового пакета, центрированного в начальной точке $\mathbf{r}_0$ нахождения классической частицы и содержащего ее начальную скорость $\mathbf{v}_0$ [32, 33]:

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/4} l^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{4l^2} + i\frac{m}{\hbar}\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{r}\right), \tag{16}$$

где l — начальный пространственный масштаб локализации плотности вероятности, имеющий смысл начальной неопределенности декартовых координат частицы [32, 33].

Подставляя (15) и (16) в (14), получим

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/4}}\left(\frac{l}{l^2 + i\hbar\tau/2m}\right)^{3/2} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_c|^2}{4(l^2 + i\hbar\tau/2m)} + i\frac{m}{\hbar}\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{r} - i\frac{mv_0^2}{2\hbar}\tau\right], \quad (17)$$

где $\mathbf{r}_c$ и τ определяются соответственно выражениями (6) и (7).

В консервативной среде (при отсутствии диссипации) $q = 1$ во все моменты времени $t = 0$. Тогда из (7) следует, что $\tau = t$. В этом случае волновая функция (17) соответствует когерентному состоянию свободной частицы [34]. Для конкретных случаев диссипативных сред, когда присутствуют силы сопротивления, пропорциональные скорости и квадрату скорости, аналогичные состояния принадлежат к классу квазиклассических когерентных состояний [26, 27, 35].

Из (16) для плотности вероятности имеем выражение

$$\rho(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}l_\tau^3}\exp\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_c|^2}{2l_\tau^2}\right), \qquad (18)$$

где пространственный масштаб l_τ при прохождении частицей дистанции s в моменты времени $t \geqslant 0$ определяется соотношением

$$l_\tau = \sqrt{l^2 + \left(\frac{\hbar\tau}{2ml}\right)^2} = l\sqrt{1 + \left(\frac{s}{l_D}\right)^2}, \qquad (19)$$

где $l_D = 2l^2/\lambdabar$ — дифракционная длина, соответствующая начальной волновой функции (16), $\lambdabar = \hbar/mv_0$ — начальная дебройлевская длина волны частицы.

Из (19) видно, что волновой пакет плотности вероятности по мере распространения в диссипативной среде испытывает уширение до максимального значения l_τ^{max} его размера, определяемого по формуле (19) с учетом замены $s \to s_{max} = v_0\tau_{max}$. Таким образом, остановка локализованного волнового пакета сопровождается «заморозкой» его пространственного размера. На этой стадии в (18) следует совершить замену $l_\tau \to l_\tau^{max}$. При этом радиус-вектор центра статического волнового пакета определяется выражением $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\tau_{max}$.

При условии сильной диссипации, $s_{max} \ll l_D$, частица практически не проявляет волновых свойств. В этом случае, как следует из (19), $l_\tau^{max} \approx l$. Поэтому здесь частица ведет себя при поступательном движении как классический объект.

При слабой диссипации, $s_{max} \gg l_D$, под знаком корня в формуле (19) с учетом замены $s \to s_{max}$ можно учесть только второе слагаемое. Тогда имеем

$$l_\tau^{max} = \frac{\lambdabar}{2l}s_{max}. \qquad (20)$$

В этом случае, описывая поступательное движение частицы, необходимо учитывать ее волновые свойства.

Используя (17) и стандартные правила квантовой механики [32, 33], легко показать, что неопределенности Δp_j декартовых компонент канонического импульса, где $j = x, y, z$, не изменяются со временем и определяются соотношениями $\Delta p_j = \hbar/2l$. Отсюда и из (11) для неопределенностей $\Delta p_j^{(ph)}$ декартовых компонент физического импульса $p_j^{(ph)} = mv_{j0}$ имеем $\Delta p_j^{(ph)} = \hbar/2ql$. При этом неопределенности декартовых координат $\Delta x_j = l_\tau$. Тогда соотношения неопределенностей типа «координата – канонический импульс» и «координата – физический импульс» имеют соответственно вид

$$\Delta x_j \Delta p_j = \frac{\hbar}{2}\frac{l_\tau}{l}, \qquad (21)$$

$$\Delta x_j \Delta p_j^{(ph)} = \frac{\hbar}{2}\frac{l_\tau}{ql}. \qquad (22)$$

Отсюда, а также из (9) и (19) видно, что в начальный момент времени соотношения неопределенностей (21) и (22) минимизируются:

$$\Delta x_j \Delta p_j = \Delta x_j \Delta p_j^{(ph)} = \hbar/2.$$

Это, как было сказано выше, соответствует когерентному состоянию (16) частицы при $t = 0$.

Как было отмечено выше, $\tau = t$ в консервативной среде, а волновая функция (17) при такой замене обладает свойствами когерентного состояния свободной частицы [34]. При этом соотношения неопределенностей (21) и (22) тождественны, так как нет различия между каноническим и физическим импульсами. Тогда, как видно из (19), правые части соотношений неопределенностей (21) и (22) неограниченно растут с течением времени.

Отталкиваясь от сказанного в предыдущем абзаце, назовем состояние с волновой функцией (17) когерентным состоянием частицы в диссипативной среде. В этом случае нарушается знак равенства между каноническим и физическим импульсами. Правая часть соотношения неопределенностей (21) монотонно возрастает с течением времени, достигая максимального значения

$$\Delta x_j \Delta p_j = \hbar l_\tau^{max}/2l.$$

Иначе ведет себя правая часть соотношения неопределенностей (22). Так как с течением времени функция $q(t)$ возрастает, достигая в момент остановки частицы бесконечности, то правая часть в этот момент обращается в нуль. Это происходит из-за того, что в момент остановки частицы обращаются в нуль неопределенности всех декартовых компонент физического импульса. Данная ситуация соответствует непрерывному коллапсу волновой функции в импульсном пространстве. По этой причине распространение частицы в диссипативной среде следует рассматривать как непрерывный процесс измерения ее состояния. Беспорядочные последовательные столкновения выделенной частицы с большим количеством частиц среды, рассматриваемые в усредненном марковском приближении, приводят к диссипативным потерям и одновременно представляют собой непрерывный измерительный процесс. Диссипативная среда здесь играет роль регистратора (своего рода протяженной фотопластинки) состояния частицы в каждый момент времени. При $s = s_{max}$ (или $t = t_{max}$) происходит регистрация остановившейся частицы в малой пространственной окрестности конечной точки классической траектории. Характерный радиус l_{τ}^{max} этой окрестности фактически ограничивает разброс точек пространства, в которых может быть зарегистрирована частица при конкретном акте измерения.

Учитывая усредненный характер описания динамики торможения частицы посредством регулярно зависящей от скорости диссипативной силы, говорить здесь об остановке частице можно лишь условно. При малых скоростях частицы все большее влияние на ее движение оказывают нерегулярные (броуновские) столкновения с частицами среды. Соответствующее исследование выходит за рамки настоящей работы.

Так как при $t = 0$ канонический и физический импульсы равны друг другу (см. (11) и (9)), равенство (20) можно переписать в виде

$$\frac{\Delta x_j^{max}}{s_{max}} = \frac{\Delta p_{j0}}{p_0}. \tag{23}$$

Здесь $p_0 = mv_0$ – начальный импульс частицы.

Условие применимости квазиклассического приближения в нашем случае имеет вид

$$\frac{\Delta x_j^{max}}{s_{max}} \sim \frac{l_{\tau}^{max}}{s_{max}} \ll 1.$$

Используя здесь (20), получим

$$\lambda\!\!\!^{-}/\Delta x_j^{max} \ll 1.$$

Таким образом, начальная длина волны де Бройля должна быть значительно меньше неопределенностей координат частицы. Это утверждение в точности совпадает с выводом, представленным в работе [34]. Из (20) и (23) видно, что данный вывод эквивалентен неравенству

$$\Delta p_{j0}/p_0 = \Delta v_{j0}/v_0 \ll 1,$$

где $\Delta v_{j0} \sim \hbar/ml$ — неопределенность j-й декартовой компоненты начальной скорости.

Из (20) видно, что отношение $\lambda\!\!\!^{-}/l$ играет роль угла дифракционной расходимости волнового пакета плотности вероятности. Малое значение данного угла вполне очевидным образом соответствует условию применимости квазиклассического приближения.

4. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ В СРЕДЕ С ИОНИЗАЦИОННЫМИ ПОТЕРЯМИ

В качестве конкретных примеров рассмотрим три стадии распространения заряженной частицы, сопровождаемого ее ионизационными потерями в некоторой среде.

4.1. Ионизационное торможение в условиях высокоэнергетических потерь

Пусть быстрая, но нерелятивистская заряженная частица влетает в среду, где тормозится за счет потерь энергии на ионизацию данной среды. При этом скорость v влетающей частицы удовлетворяет условию $v > \alpha c$, где $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$, e — заряд электрона, c — скорость света в вакууме [36]. В этом случае нерелятивистская версия формулы Бете – Блоха для удельных ионизационных потерь заряженной частицы при ее прохождении через вещество имеет вид [37, 38]

$$-\frac{dW}{ds} = \frac{m\sigma}{v^2}, \tag{24}$$

где

$$\sigma = \frac{4\pi Z_\alpha^2 e^4}{m_e m} Zn \ln \frac{2m_e v^2}{I},$$

Z_α и Z — зарядовые числа рассматриваемой частицы и ядер вещества, при взаимодействии с которыми происходит торможение частицы, n — концентрация ядер вещества, I — энергия ионизации атомов вещества, m_e — масса электрона.

Поскольку

$$m\dot{v} = mv\frac{dv}{ds} = \frac{d\left(mv^2/2\right)}{ds} = \frac{dW}{ds},$$

правая часть в (24) имеет смысл классической силы, действующей на частицу со стороны среды. Переходя к векторной форме, запишем для данной силы

$$\mathbf{F}_d = -m\sigma\mathbf{v}/v^3.$$

Отношение под знаком логарифма в выражении для σ по порядку величины равно $(v/\alpha c)^2$. Пусть характерная скорость частицы $v \sim 10^9$ см/с $> \alpha c \sim 0.1c$ [39]. При таких скоростях частицу еще можно считать нерелятивистской. Тогда $2m_e v^2/I \sim 10^2$. В этих условиях логарифм в выражении для σ является медленной функцией скорости. Поэтому с неплохим приближением можно положить $\sigma = \mathrm{const}$. В этом случае

$$f(q/v_0) = \sigma/v^3 = \sigma q^3/v_0^3.$$

После интегрирования (8) с учетом (9) имеем

$$q = (1 - t/t_{max})^{-1/3}, \tag{25}$$

где

$$t_{max} = \frac{v_0^3}{3\sigma}. \tag{26}$$

Отсюда, а также из (7) и (6) найдем

$$\tau = \frac{3}{4}t_{max}\left[1 - \left(1 - \frac{t}{t_{max}}\right)^{4/3}\right], \tag{27}$$

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_0 + \frac{3}{4}\mathbf{v}_0 t_{max}\left[1 - \left(1 - \frac{t}{t_{max}}\right)^{4/3}\right]. \tag{28}$$

Полагая в (27) $t = t_{max}$, получим

$$\tau_{max} = \frac{3t_{max}}{4} = \frac{v_0^3}{4\sigma}.$$

Тогда длина полного пробега

$$s_{max} = \frac{v_0^4}{4\sigma}. \tag{29}$$

Из (29) и (19) найдем максимальный размер локализованного волнового пакета в момент его остановки при $t = t_{max}$.

Подставляя в (10) $f(v) = \sigma/v^3$, после интегрирования получим

$$v^2 = v_0^2\sqrt{1 - s/s_{max}}.$$

После подстановки данного выражения в (24) для удельных ионизационных потерь найдем

$$-\frac{dW}{ds} = \frac{W_0}{s_{max}\sqrt{1 - s/s_{max}}}, \tag{30}$$

где $W_0 = mv_0^2/2$ — начальная энергия частицы.

Таким образом, в точке остановки частицы ее удельные потери неограниченно возрастают, а размер волнового пакета плотности вероятности достигает своего максимального значения.

Неограниченный рост удельных потерь обусловлен здесь тем, что при $v \to 0$ формула (22), где $\sigma = \mathrm{const}$, перестает быть справедливой. Более того, в этом случае уже несправедливы многие предположения, при которых была получена формула Бете–Блоха [29, 39].

В реальных условиях быстрый рост удельных ионизационных потерь на промежуточной части пробега частицы ограничивается известным пиком Брэгга, после чего удельные потери быстро спадают до нулевых значений [29, 39]. В окрестности брэгговского пика скорость частицы $v \sim \alpha c$. Данная окрестность соответствует второй (промежуточной) стадии ионизационного торможения, которую мы рассмотрим ниже.

4.2. Ионизационные потери в окрестности брэгговского пика. «Сухое трение»

В окрестности максимума удельных ионизационных потерь величину dW/ds можно приближенно считать постоянной. В результате для этой стадии запишем

$$-dW/ds = 2ma, \tag{31}$$

где a — некоторая положительная постоянная.

Поскольку диссипативная сила всегда направлена против вектора скорости, имеем

$$\mathbf{F}_d = -m\mathbf{a},$$

где

$$\mathbf{a} = a\mathbf{v}/v = a\mathbf{v}_0/v_0.$$

Таким образом, при условии (31) диссипативная сила не зависит от скорости, что в классической механике соответствует «сухому трению». В этом случае

$$f(v) = a/v = aq/v_0.$$

Тогда, интегрируя (8) с учетом (9), найдем

$$q = (1 - at/v_0)^{-1}. \tag{32}$$

Подставляя данное выражение в (7), получим

$$\tau = t - \frac{a}{2v_0}t^2. \tag{33}$$

Отсюда и из (6) имеем хорошо известное выражение для радиус-вектора классической траектории при равнозамедленном движении:

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \mathbf{a}t^2/2. \tag{34}$$

Таким образом, в окрестности брэгговского пика волновой пакет плотности вероятности совершает равнозамедленное движение с ускорением $-\mathbf{a}$ (см. (18) и (34)).

Из (5) следует, что частица, а вместе с ней и волновой пакет плотности вероятности (см. (17)), прекращает свое движение при $q \to \infty$. Тогда из (32) приходим к выражению для времени движения частицы $t_{max} = v_0/a$. Отсюда и из (33) находим $\tau_{max} = v_0/2a$. Таким образом, пройдя за время $t = t_{max} = v_0/a$ до полной остановки расстояние $s_{max} = v_0^2/2a$, волновой пакет плотности вероятности приобретает максимальный статический размер, определяемый по формуле (19) при замене $s \to s_{max}$.

Рассмотренная стадия «сухого трения» является самой короткой из трех стадий ионизационного торможения, так как ей соответствует малая окрестность вблизи максимального значения удельных потерь.

В реальных условиях, прежде чем остановиться, частица переходит в третью (низкоэнергетическую) стадию ионизационного торможения, где $v \ll \alpha c$ [36]. Ниже проанализируем квазиклассическую динамику частицы на данной стадии.

4.3. Ионизационное торможение в условиях низкоэнергетических потерь. «Вязкое трение»

В этом случае для удельных потерь имеем выражение [36, 40–42]

$$-dW/ds = 2m\gamma v, \tag{35}$$

где γ — положительная постоянная.

Из (35) приходим к выводу, что в данном случае соответствующая классическая диссипативная сила (сила «вязкого трения») пропорциональна скорости: $\mathbf{F}_d = -m\gamma\mathbf{v}$. Отсюда и из (3) имеем $f(v) = \gamma$. Тогда из (8) и (9) находим $q = e^{\gamma t}$. Заметим, что данная зависимость $q(t)$ в точности совпадает с аналогичной зависимостью, найденной в работах [4, 5] без использования квазиклассического приближения. Подставляя данное выражение в (7), найдем

$$\tau = \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma}. \tag{36}$$

Отсюда и из (6) получим

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma}. \tag{37}$$

Подставляя (36) в (19), придем к выражению для пространственного масштаба волнового пакета плотности вероятности (неопределенности координат частицы) в любой момент времени. Максимальное значение l_τ^{max} данного масштаба определяется по формуле (19) с учетом замены

$$s \to s_{max} = v_0\tau_{max} = v_0/\gamma$$

и достигается при $t \to \infty$, когда частица в среде выполняет полный пробег. При этом волновой пакет плотности вероятности останавливается, имея форму трехмерного локализованного статического домена.

После подстановки $f(v) = \gamma$ в (10), последующего интегрирования и простых преобразований будем иметь для величины удельных потерь

$$-dW/ds = 2m\gamma v_0 \left(1 - s/s_{max}\right). \tag{38}$$

Таким образом, удельные потери уменьшаются с увеличением пройденной дистанции и исчезают при $s = s_{max}$.

Всем трем рассмотренным стадиям распространения частицы в среде с ионизационными потерями соответствуют классические силы сопротивления, общее выражение для которых имеет вид (3). На начальной, высокоэнергетической, стадии торможения частицы сила сопротивления обратно пропорциональна квадрату скорости. В окрестности брэгговского пика сила сопротивления практически не зависит от величины скорости, поэтому по аналогии с классической механикой здесь мы ее назвали силой «сухого трения». Заключительный, низкоэнергетический, этап торможения описывается диссипативной силой, пропорциональной скорости частицы, что соответствует силе «вязкого трения» в классической механике. Понятно, что во всех случаях речь не идет о силах трения в физическом смысле, так как само это понятие относится к физике макроскопических объектов. Правильнее здесь говорить о соответствующей математической аппроксимации.

Для полного квазиклассического описания торможения частицы на всей дистанции распространения, видимо, следует надлежащим образом произвести «сшивку» всех трех стадий, что не являлось целью настоящей работы.

Приведем некоторые численные оценки для основной стадии высокоэнергетических ионизационных потерь. Длина пробега s_{max} альфа-частицы в воздухе при нормальных условиях и начальной энергии $W_0 \sim 10$ МэВ составляет около 10 см [39]. Приведенному значению энергии, как отмечалось выше, соответствует начальная скорость $v_0 \sim 10^9$ см/с. Тогда начальная длина волны де Бройля для альфа-частицы $\lambdabar \sim 10^{-13}$ см. Пусть начальная неопределенность координаты альфа-частицы составляет порядка атомного размера, т. е. $l \sim 10^{-8}$ см. Тогда дифракционная длина $l_D = 2l^2/\lambdabar \sim 10^{-3}$ см $\ll s_{max}$. Следовательно, в этом случае отчетливо проявляются волновые свойства частицы. Подставляя приведенные в данном абзаце значения параметров в формулу (20), будем иметь для неопределенности координаты альфа-частицы после ее остановки $\Delta x_j^{max} \sim l_\tau^{max} \sim 10^{-4}$ см. Итак, после пробега в воздухе при условиях ионизационного торможения неопределенность координаты альфа-частицы способна увеличиться на четыре порядка. Для времени, за которое совершается пробег, находим $t_{max} \sim s_{max}/v_0 \sim 10^{-8}$ с. Полезно также оценить значение параметра σ. Из формулы (29) имеем $\sigma \sim v_0^4/s_{max} \sim 10^{35}$ см^3/с^4. Любопытно заметить, что примерно такое же значение по порядку величины вытекает из формулы, которая записана здесь сразу после (24). Значение параметра σ может позволить вычислять неопределенности координат, пробег и время пробега при всех других начальных энергиях альфа-частицы.

В алюминии длина пробега альфа-частицы при начальной энергии порядка 10 МэВ составляет порядка 10^{-3} см [39]. Легко видеть, что в этом случае дифракционная длина $l_D \sim s_{max}$. Поэтому здесь диссипация эффективнее, чем в воздухе, подавляет волновые свойства альфа-частицы.

Для неопределенности Δv_{j0} компонент начальной скорости в обоих рассмотренных выше примерах имеем $\Delta v_{j0} \sim \hbar/ml \sim 10^4$ см/с. Таким образом, условие применимости квазиклассического приближения $v_0 \gg \Delta v_{j0}$ выполняется здесь с хорошим запасом.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Предложенный в настоящей работе приближенный самосогласованный подход позволяет описывать поступательную динамику квантовой нерелятивистской частицы при действии на нее диссипативной силы, произвольным образом зависящей от величины скорости. В этом смысле данный подход можно рассматривать как обобщение канонического метода, предложенного Калдиролой и Канаи [4, 5], где рассмотрена диссипативная сила, пропорциональная скорости частицы. С другой стороны, самосогласованное приближение, использующее понятие классической траектории, приводит к квазиклассическому, а не к сугубо квантовому рассмотрению.

В предложенном подходе гамильтониан (12) зависит от динамического параметра $q(t)$. Характер явной зависимости данного параметра от времени определяется классической траекторией частицы, определяемой, в том числе, ее начальной скоростью. Поэтому последующее квантование движения приобретает признаки квазиклассического приближения. Как результат, гамильтониан (12) приобретает зависимость от начальной скорости частицы. Затем эта зависимость переносится в уравнение Шредингера (13). В свою очередь, данное обстоятельство накладывает ограничения на круг возможных начальных волновых функций, которые должны соответствовать классическим начальным условиям. В этом состоит недостаток предложенного здесь подхода. С другой стороны, удачный выбор начальной волновой функции частицы способен привести к физически разумным результатам. Здесь в качестве такой функции выбрана хорошо известная функция вида (16), соответствующая когерентному состоянию частицы. В последующие моменты времени волновая функция приобретает вид (17), что соответствует нестационарному квазиклассическому когерентному состоянию.

В дополнение к приведенным выше критериям условие применимости квазиклассического приближения можно наглядным образом выразить в виде неравенства $l_D \gg \Delta x_{j0}$. Таким образом, волновые свойства частицы становятся заметными на дистанциях распространения, значительно превышающих начальные неопределенности координат.

Важным результатом является утверждение, что диссипация подавляет квантовые свойства частицы. Поэтому диссипативную среду можно рассматривать как классический прибор, непрерывно измеряющий состояние распространяющейся в данной среде частицы.

В дальнейшем представляет интерес нетривиальное обобщение предложенного здесь подхода на случай, когда помимо внутренних диссипативных сил на частицу действуют внешние силы недиссипативной природы. Это позволит расширить область рассмотрения диссипативных сред как регистраторов частиц в их квазиклассических состояниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Рубцов, УФН **193**, 783 (2023) [A. N. Rubtsov, Phys. Usp. **66**, 734 (2003)].

2. М. Б. Менский, УФН **173**, 1199 (2003) [M. B. Menskii, Phys. Usp. **46**, 1163 (2003)].

3. Б. Б. Кадомцев, *Динамика и информация*, Редакция журнала «Успехи физических наук», Москва (1999).
4. P. Caldirola, Nuovo Cimm. **18**, 393 (1941).
5. E. Kanai, Progr. Theor. Phys. **3**, 440 (1948).
6. V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **20**, 550 (1979).
7. K. H. Yeon and C. I. Um, Phys. Rev. A **36**, 5287 (1987).
8. Б. А. Арбузов, ТМФ **106**, 300 (1996) [B. A. Arbuzov, Theor. Math. Phys. **106**, 249 (1996)].
9. V. E. Tarasov, Phys. Lett. A **288**, 173 (2001).
10. V. E. Tarasov, Phys. Rev. E **66**, 056116 (2002).
11. V. G. Kupriyanov, S. L. Lyakhovich, and A. A. Sharapov, J. Phys. A **38**, 8039 (2005).
12. D. M. Gitman and V. G. Kupriyanov, J. Math. Sci. **141**, 1399 (2007).
13. А. М. Башаров, Опт. и спектр. **128**, 186 (2020) [A. M. Basharov, Opt. Spectr. **128**, 182 (2020)].
14. А. М. Башаров, ЖЭТФ **158**, 978 (2020) [A. M. Basharov, JETP **131**, 853 (2020)].
15. S. Madjber, S. Menouar, and J. R. Choi, Entropy **23**, 837 (2021).
16. V. E. Tarasov, Ann. Phys. **434**, 056116 (2021).
17. M. C. Parker and C. Jeynes, Entropy **25**, 629 (2023).
18. V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. **17**, 821 (1976).
19. G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
20. H. P. Breuer and F. Petruccione, *Theory of Open Quantum Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford (2002).
21. U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Scientific, Singapore (2012).
22. A. Isar, A. Sandulescu, H. Scutaru et al., Int. J. Mod. Phys. E **3**, 635 (1994).
23. H. P. Breuer, E. M. Laine, J. Piilo et al., Rev. Mod. Phys. **88**, 021002 (2016).
24. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, J. Math. Sci. **68**, 275 (1994).
25. S. T. Ali and M. Engliš, Rev. Math. Phys. **17**, 391 (2005).
26. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **118**, 297 (2023) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **118**, 302 (2023)].
27. S. V. Sazonov, Laser Phys. Lett. **20**, 095203 (2023).
28. Г. Бете, *Квантовая механика*, Мир, Москва (1965) [H. A. Bethe, *Intermediate Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin Inc., New York (1964)].
29. В. В. Балашов, *Строение вещества*, Изд-во МГУ, Москва (1993).
30. И. Ю. Толстихина, В. П. Шевелько, УФН **193**, 1249 (2023) [I. Yu. Tolstikhina and V. P. Shevelko, Phys. Usp. **66**, 1177 (2023)].
31. Р. Ф. Фейнман, А. Р. Хиббс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968) [R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill Book Company, New York (1965)].
32. Л. И. Шифф, *Квантовая механика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1959) [L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, New York (1968)].
33. В. В. Балашов, В. К. Долинов, *Курс квантовой механики*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск (2001).
34. В. Г. Багров, Д. М. Гитман, А. С. Перейра, УФН **184**, 961 (2014) [V. G. Bagrov, D. M. Gitman, and A. S. Pereira, Phys. Usp. **57**, 891 (2014)].
35. S. V. Sazonov, Laser Phys. Lett. **20**, 015202 (2023).
36. Ё. Х. Оцуки, *Взаимодействие заряженных частиц с твердыми телами*, Мир, Москва (1985) [Y. H. Ohtsuki, *Charged Beam Interaction with Solids*, Taylor & Francis Ltd., London (1983)].
37. H. Bethe, Ann. Phys. **5**, 325 (1930).
38. F. Bloch, Ann. Phys. **16**, 285 (1933).
39. К. Н. Мухин, *Экспериментальная ядерная физика, Т.1: Физика атомного ядра*, Лань, Москва (2002).
40. О. Б. Фирсов, ЖЭТФ **36**, 1517 (1959) [O. B. Firsov, Sov. Phys. JETP **9**, 1076 (1959)].
41. J. S. Briggs and A. P. Pathak, J. Phys. C **6**, L153 (1973).
42. M. Kitagawa and Y. H. Ohtsuki, Phys. Rev. B **9**, 4719 (1974).