

ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КЕЛДЫША

Э.З. Кучинский*, М.В. Садовский**

*Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук
620016, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 15 января 2024 г.,
после переработки 15 января 2024 г.
Принята к публикации 1 марта 2024 г.

Рассматривается некоторый класс точно решаемых моделей, описывающих спектральные свойства электрона, движущегося в случайном по времени внешнем поле с разными статистическими характеристиками. Электрон может быть зонным или находиться в квантовых ямах. Известная динамическая модель Келдыша обобщается на случай полей с конечным временем корреляции флуктуаций и на случай ненулевой передаваемой частоты этих флуктуаций. Во всех случаях удастся осуществить полное суммирование всех фейнмановских диаграмм для соответствующего ряда теории возмущений для функции Грина. Это удастся сделать либо сведением этого ряда к некоторой цепной дроби, либо с использованием обобщенного тождества Уорда, из которого выводятся рекуррентные уравнения для функции Грина. В случае случайного поля с ненулевой передаваемой частотой возникают интересные эффекты модуляции спектральной плотности и плотности состояний.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S004445102407006X

1. ВВЕДЕНИЕ

Будучи выдающимся физиком-экспериментатором, П. Л. Капица иногда уделял внимание и чисто теоретическим проблемам. Хорошо известно предложенное им изящное решение задачи о движении классической частицы в быстро осциллирующем поле [1], где он, по сути дела, описал это движение как движение в случайном поле с соответствующим усреднением по времени. Такие поля и процессы встречаются во многих задачах статистической радиофизики и радиотехники, где им посвящена обширная литература [2, 3]. В квантовой теории также имеется множество задач такого типа.

В данной работе будет рассмотрен некоторый класс точно решаемых квантовомеханических задач, относящихся, в основном, к теории электронов в неупорядоченных системах и квантовых структурах, который является динамическим обобщением так называемой модели Келдыша.

Исходная модель была введена Л.В. Келдышем в его неопубликованной диссертации в 1965 г. [4]. Ча-

стично эти результаты были использованы А.Л. Эфросом в работе [5], посвященной легированным полупроводникам. Подробное изложение разных аспектов этой модели в общем контексте электронной теории неупорядоченных систем было дано в книге [6], где и было введено понятие «модель Келдыша».

В дальнейшем, в литературе были предложены различные модели подобного типа, в частности для описания псевдощели, возникающей при рассеянии электронов на флуктуациях ближнего порядка в одномерных моделях [6–12], которые были обобщены на двумерный случай для описания псевдощели в высокотемпературных сверхпроводниках [13–17].

Динамическое обобщение исходной модели Келдыша для случая рассеяния электрона на случайных *временных* флуктуациях поля было предложено в работе Кикоина и Киселева [18], где рассматривались электроны в квантовых точках. Подробное изложение различных результатов для таких моделей было дано в [19]. Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию и обобщению моделей этого типа как для случая электронов в квантовых точках, так и для зонных электронов в проводниках разных размерностей, находящихся под воздействием динамических случайных полей.

* E-mail: kuchinsk@iep.uran.ru

** E-mail: sadovski@iep.uran.ru

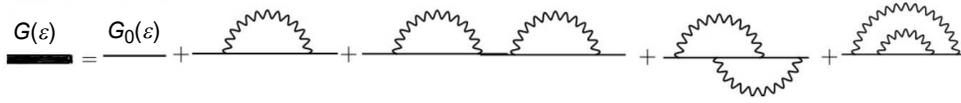


Рис. 1. Диаграммное разложение для функции Грина. Двойная линия соответствует «одетой» функции Грина, волнистая линия соответствует коррелятору гауссова случайного поля

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КЕЛДЫША

Рассматриваемая нами модель была предложена Келдышем в 1965 г. [4] как некий предельный случай в задаче о рассеянии электронов в поле статических случайно расположенных примесей в неупорядоченной системе [6, 20].

Келдыш показал, что одноэлектронная функция Грина в случайном гауссовом поле $V(r)$, рассеивающем «вперед» (т. е. с нулевым передаваемым импульсом, что соответствует предельно большому пространственному масштабу рассеивающих флуктуаций случайного потенциала) и описываемом коррелятором (d – размерность пространства)

$$D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}') \rangle = \Delta^2 \rightarrow \rightarrow D(\mathbf{q}) = (2\pi)^d \Delta^2 \delta(\mathbf{q}), \quad (1)$$

может быть найдена точно полным суммированием всех диаграмм фейнмановского ряда. В самом деле, согласно обычным диаграммным правилам в задаче о рассеянии на случайном статическом беспорядке [6, 20], диаграмма порядка N содержит N линий взаимодействия с гауссовым случайным полем (обозначаемых волнистыми линиями), $2N + 1$ сплошных линий, соответствующих гриновским функциям и $2N$ вершин. Полное число диаграмм в данном порядке теории возмущений A_N соответствует полному числу способов, которыми можно соединить $2N$ вершин N линиями взаимодействия, оно равно [6, 21]:

$$A_N = (2N - 1)!! = \frac{(2N - 1)!}{2^{N-1}(N - 1)!}. \quad (2)$$

Диаграммные вклады низших порядков в ряду для одноэлектронной функции Грина показаны на рис. 1. В данной модели все фейнмановские диаграммы в заданном порядке N приводят к одинаковым вкладам в гриновскую функцию, так что полный ряд для нее имеет вид

$$G(E) = G_0(E) \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (2N - 1)!! G_0^{2N}(E) \Delta^{2N} \right\}. \quad (3)$$

Далее для краткости используем обозначение $E = \epsilon - \epsilon_p$, где ϵ_p – спектр свободного электрона,

так что «голая» функция Грина записывается как $G_0(E) = 1/E$. Используя интегральное представление Γ -функции, можем записать

$$(2N - 1)!! = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt t^{2N-2} e^{-t^2/2}, \quad (4)$$

так что запаздывающая функция Грина (после суммирования геометрической прогрессии) может быть записана в виде

$$G^R(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{e^{-V^2/2\Delta^2}}{E - V + i\delta} \quad (5)$$

Это уравнение имеет очевидный и наглядный смысл [6] – электрон распространяется в гауссовом случайном поле однородном по пространству.

Существует и другой способ вывода этого изящного результата, предложенный Келдышем [4] и позднее Эфросом [5], основанный на выводе, с помощью точного тождества Уорда, дифференциального уравнения для функции Грина. Это уравнение имеет вид

$$\Delta^2 \frac{dG(E)}{dE} + EG(E) = 1. \quad (6)$$

Решение этого уравнения с граничным условием $G(E \rightarrow \infty) = 1/E$ немедленно дает (5) [6].

Прямым следствием полученного решения является возникновение гауссова «хвоста» в плотности состояний электрона в области энергий $\epsilon < 0$ [6].

В работах [18, 19] модель Келдыша была переформулирована для случая рассеяния электрона на предельно медленных *временных* флуктуациях случайного потенциала. Соответствующая динамическая модель Келдыша может быть обобщена также и для случая рассеяния на многокомпонентных гауссовых немарковских случайных полях [19].

В качестве примера, следуя [18, 19], рассмотрим электрон в одиночной квантовой яме (точке), которая образована соответствующим удерживающим потенциалом, как показано на рис. 2.

Затвор создает внешний шум, который медленно меняет удерживающий потенциал ямы.

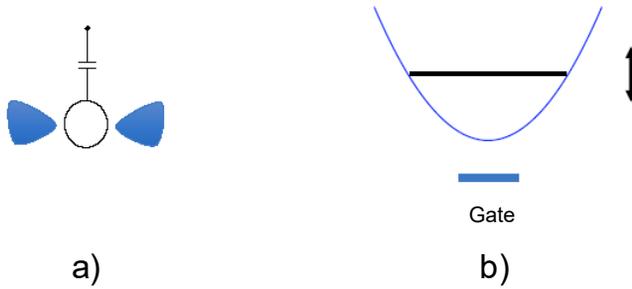


Рис. 2. *a* — Одиночная квантовая точка, на которой создается шум за счет внешних электродов (затвора), *b* — соответствующая квантовая яма с флуктуирующим уровнем

Одночастичный гамильтониан для этой задачи имеет вид

$$H = [\epsilon_0 + V(t)] n, \quad (7)$$

где $n = c^\dagger c$, а c^\dagger , c есть операторы рождения и уничтожения электрона на уровне в яме. Для простоты рассматриваются бесспиновые (спин-поляризованные) электроны. Классический случайный по времени (гауссов) потенциал $V(t)$ определяется своим средним значением и парной корреляционной функцией

$$\langle V(t) \rangle = 0, \quad \langle V(t)V(t') \rangle = D(t - t'). \quad (8)$$

Для этой функции принимаем вид

$$D(t - t') = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|}, \quad (9)$$

где $\gamma = 1/\tau$, τ определяется характерное время корреляции флуктуаций потенциала, а Δ — амплитуда шума. Можно рассмотреть два предельных случая:

$$\gamma \rightarrow \infty : \quad D(t - t') \rightarrow \Delta^2 \delta(t - t'), \quad (10)$$

$$\gamma \rightarrow 0 : \quad D(\omega) \rightarrow 2\pi\Delta^2 \delta(\omega). \quad (11)$$

Здесь $D(\omega)$ — фурье-образ $D(t - t')$. Первый случай соответствует максимально «быстрому» шуму («белый» шум) и соответствует марковскому случайному процессу. Второй случай соответствует медленному шуму, а модель Келдыша представляет собой наиболее медленную его реализацию с (бесконечно) большим временем корреляции флуктуаций (предельно немарковский процесс).

Одноэлектронная (запаздывающая) функция Грина электрона в яме для заданной реализации потенциала есть

$$G^R(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 - V + i\delta}, \quad (12)$$

где ϵ_0 — энергия уровня в яме, а усреднение по времени опять сводится к взятию гауссова интеграла от этого выражения с функцией распределения $P(V) = 1/\sqrt{2\pi\Delta^2} \exp(-V^2/(2\Delta^2))$:

$$G^R(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{e^{-V^2/2\Delta^2}}{\epsilon - \epsilon_0 - V + i\delta}. \quad (13)$$

Аналогично можно рассмотреть электрон не в яме, а в зоне системы (система в «конденсаторе», на обкладках которого создается случайный шум) произвольной размерности. Для этого достаточно сделать замену $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_{\mathbf{p}}$, где $\epsilon_{\mathbf{p}}$ — зонный спектр электрона с квазиимпульсом \mathbf{p} .

Модель с одной ямой достаточно легко обобщается на случай нескольких ям [18, 19], что приводит к модели Келдыша с многокомпонентным шумом. В частности, большой интерес представляет модель двух квантовых ям, которая оказывается (в ее зонном варианте) тесно связанной с точно решаемой моделью псевдощелевого состояния [7–12]. Однако ниже мы будем рассматривать только модель с одной ямой, оставляя рассмотрение двухъямного случая (псевдощелевых флуктуаций) для отдельной работы.

3. МОДЕЛЬ КЕЛДЫША И ФЛУКТУАЦИИ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ КОРРЕЛЯЦИЙ

В данной работе мы покажем, что точное решение для одноэлектронной функции Грина может быть получено и для модели Келдыша с конечным временем корреляции флуктуации $\tau = \gamma^{-1}$. Это решение легко получается применением метода, предложенного одним из авторов в работе [11], где рассматривалась модель псевдощели в одномерных системах.

Фурье-образ (9), который соответствует на диаграммах линиям взаимодействия, может быть записан как

$$D(\omega) = 2\pi\Delta^2 \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} = 2\pi\Delta^2 \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega + i\gamma)(\omega - i\gamma)}. \quad (14)$$

При $\gamma \rightarrow 0$ это естественно сводится ко второму выражению в (11). Попробуем разобраться, как вычисляется вклад диаграммы произвольного порядка. Фактически, эту задачу можно решить точно. В качестве примера на рис. 3 приведены некоторые типичные диаграммы третьего порядка. Мы можем

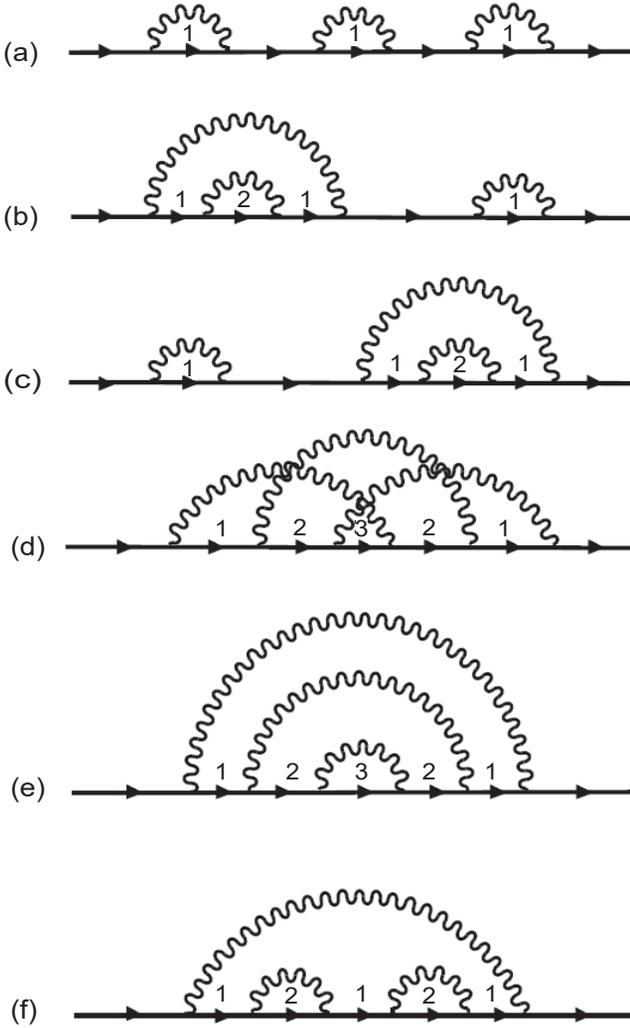


Рис. 3. Типичные диаграммы третьего порядка

без труда рассчитать вклад произвольной диаграммы, поскольку можем гарантировать, что ненулевой вклад в интегралы (по передаваемой частоте) возникает только от полюсов лоренцианов¹⁾ $D(\omega)$. Например, элементарные вычисления показывают, что вклад диаграммы рис. 3 d в запаздывающую функцию Грина имеет вид

$$\Delta^6 \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 + i\gamma} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 + 2i\gamma} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 + 3i\gamma} \times \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 + 2i\gamma} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 + i\gamma} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0}. \quad (15)$$

¹⁾ В задаче, рассматривавшейся в [11], это утверждение является приближенным [21]. Здесь все вычисления (интегрирования по частотам) проводятся точно.

Вклады произвольных диаграмм вполне аналогичны: числа k , выписанные над электронными линиями на рис. 3, указывают на то, сколько раз член типа $i\gamma$ возникает в соответствующем знаменателе. Заметим, что вклад диаграммы с перекрещивающимися линиями взаимодействия на рис. 3 d в точности равен вкладу диаграммы без пересечений, показанной на рис. 3 e. Это является проявлением общего свойства — вклад любой диаграммы с перекрещивающимися линиями взаимодействия равен вкладу некоторой диаграммы без пересечений [11]. Именно это обстоятельство и позволяет предложить точный алгоритм суммирования всего фейнмановского ряда.

Подробно комбинаторика диаграмм и правила сведения диаграмм с пересекающимися линиями взаимодействия к непересекающимся были рассмотрены в работе [11] (см. также [6])²⁾. Можно убедиться, что число неприводимых диаграмм для собственно-энергетической части, равных заданной диаграмме без пересечений линий взаимодействия, равно произведению некоторых комбинаторных множителей $v(k)$ (k есть число вкладов $i\gamma$ в знаменателе функции Грина, находящейся под k линиями взаимодействия в диаграмме без пересечений), которые соответствуют последовательным линиям взаимодействия данной диаграммы. Соответственно, все дальнейшие рассуждения можно вести в терминах диаграмм без пересечений линий взаимодействия, линиям взаимодействия которых приписаны дополнительные множители $v(k)$. В данном случае эти множители $v(k) = k$ [11].

Тогда без труда выводится рекуррентное уравнение, определяющее неприводимую собственно-энергетическую часть, включающую все диаграммы соответствующего фейнмановского ряда [6, 11]:

$$\Sigma_k(\epsilon, \epsilon_0) = \frac{\Delta^2 v(k)}{\epsilon - \epsilon_0 + ik\gamma - \Sigma_{k+1}(\epsilon, \epsilon_0)}, \quad (16)$$

$$v(k) = k.$$

Отсюда сразу же получается рекуррентное уравнение и для самой функции Грина:

$$G_k(\epsilon, \epsilon_0) = \{\epsilon - \epsilon_0 + ik\gamma - \Delta^2 v(k+1)G_{k+1}(\epsilon, \epsilon_0)\}^{-1}, \quad (17)$$

причем физическая функция Грина определяется как $G(\epsilon, \epsilon_0) \equiv G_{k=0}(\epsilon, \epsilon_0)$, что эквивалентно полной сумме всего фейнмановского диаграммного ряда для рассматриваемой модели. Фактически, эти

²⁾ В рассматриваемой задаче комбинаторика диаграмм сводится к соизмеримому случаю из работы [11].

рекуррентные уравнения дают представление одноэлектронной функции Грина в виде следующей *цепной дроби*:

$$G(\epsilon, \epsilon_0) = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 - \frac{\Delta^2}{\epsilon - \epsilon_0 + i\gamma - \frac{2\Delta^2}{\epsilon - \epsilon_0 + 2i\gamma - \frac{3\Delta^2}{\epsilon - \epsilon_0 + 3i\gamma - \dots}}}} \quad (18)$$

Символически, наше рекуррентное уравнение может быть представлено в виде «уравнения Дайсона», показанного графически на рис. 4.

При $\gamma = 0$ мы можем воспользоваться известным представлением неполной (верхней) Г-функции в виде цепной дроби

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\alpha-1} = \frac{x^\alpha}{x + \frac{1-\alpha}{x + \frac{1}{1+\dots}}} \quad (19)$$

чтобы убедиться, что (18) воспроизводит полученный выше точный результат суммирования всех диаграмм (13).

4. ФЛУКТУАЦИИ С КОНЕЧНОЙ ПЕРЕДАВАЕМОЙ ЧАСТОТОЙ И КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ КОРРЕЛЯЦИЙ

Рассмотрим теперь более общий случай флуктуаций с конечной характерной частотой ω_0 . Снова будем рассматривать классический случайный по времени гауссов потенциал $V(t)$ (8) с парной корреляционной функцией:

$$D(t-t') = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|} \cos[\omega_0(t-t')] = \frac{\Delta^2}{2} e^{-\gamma|t-t'|} \left[e^{i\omega_0(t-t')} + e^{-i\omega_0(t-t')} \right]. \quad (20)$$

При $\omega_0 = 0$ получаем коррелятор (9) и рассмотренную выше модель с нулевой передаваемой частотой.

Фурье-образ коррелятора (20) имеет вид

$$D(\omega) = 2\pi \frac{\Delta^2}{2} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega + \omega_0)^2 + \gamma^2} \right]. \quad (21)$$

Таким образом, в диаграммной технике получаем два вида линий взаимодействия — волнистую и штриховую, передающие частоты $+\omega_0$ и $-\omega_0$ соответственно. Обе линии взаимодействия приводят

также к добавлению $i\gamma$ к энергии ϵ в каждой электронной функции Грина, оказавшейся под линией взаимодействия. На рис. 5 приведены типичные диаграммы второго порядка. Как легко видеть, в данной модели вклад диаграммы с перекрещивающимися линиями взаимодействия не обязательно совпадает с вкладом некой диаграммы без такого пересечения. Тем не менее точное решение для одноэлектронной функции Грина и в такой модели удастся получить с использованием обобщенного тождества Уорда.

4.1. Обобщенное тождество Уорда и рекуррентные уравнения для функции Грина

Одноэлектронная функция Грина G может быть легко определена через полную двухчастичную функцию Φ :

$$G(\epsilon) = G_0(\epsilon) + G_0(\epsilon) \frac{\Delta^2}{2} \left\{ \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega_0) + \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(-\omega_0) \right\}. \quad (22)$$

Здесь Φ — полная двухчастичная функция Грина, включающая в себя четыре внешние электронные линии и вклад, соответствующий произведению двух «одетых» одночастичных функций Грина G . Чтобы не загромождать дальнейший анализ, проведем замену $\epsilon - \epsilon_0 \rightarrow \epsilon$, т.е. будем считать, что энергия у нас отсчитывается от энергии уровня в яме ϵ_0 , тогда $G_0(\epsilon) = 1/\epsilon$. Диаграммное представление уравнения (22) для функции Грина приведено на рис. 6.

Для нахождения двухчастичных функций Грина Φ , входящих в (22), воспользуемся обобщенным тождеством Уорда [22], которое в нашей чисто динамической модели принимает вид

$$G(\epsilon + \omega) - G(\epsilon) = - \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega) \{ G_0^{-1}(\epsilon' + \omega) - G_0^{-1}(\epsilon') \}. \quad (23)$$

Множитель в фигурных скобках

$$G_0^{-1}(\epsilon' + \omega) - G_0^{-1}(\epsilon') = \epsilon' + \omega - \epsilon' = \omega$$

не зависит от ϵ' , поэтому сразу получаем

$$\sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega) = - \frac{G(\epsilon + \omega) - G(\epsilon)}{\omega}. \quad (24)$$

В данной задаче любая линия взаимодействия также добавляет $i\gamma$ к энергии электронных линий,

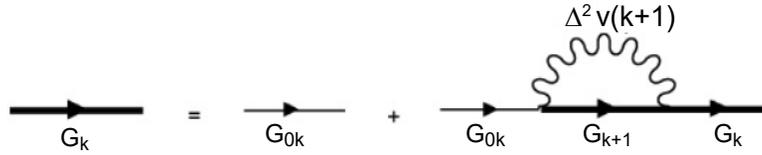


Рис. 4. Представление рекуррентного уравнения для функции Грина в виде «уравнения Дайсона». Здесь введена $G_{0k} = [\epsilon - \epsilon_0 + ik\gamma]^{-1}$

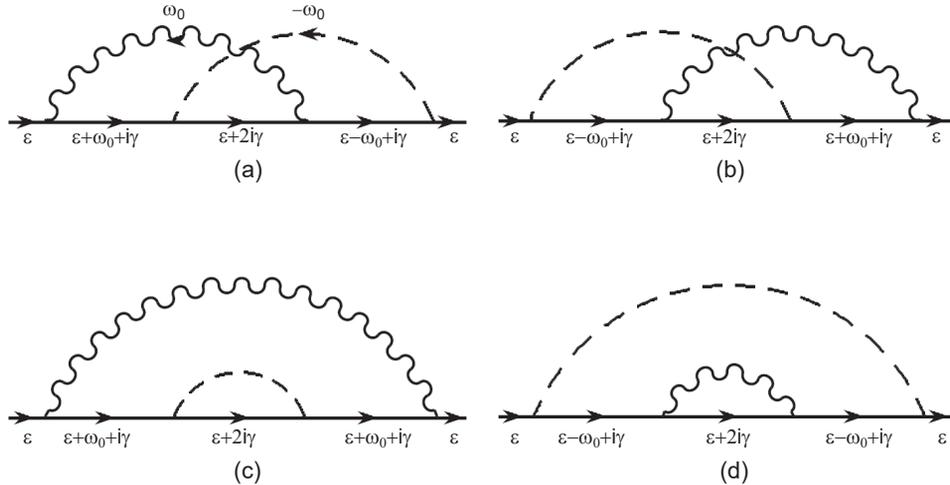


Рис. 5. Типичные диаграммы второго порядка

находящихся под ней, т.е. эффективно наши линии взаимодействия передают комплексную частоту $\pm\omega_0 + i\gamma$. Тогда тождество Уорда (23) для вершины с $+\omega_0$ принимает вид

$$G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma) - G(\epsilon) = - \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega_0)(\epsilon' + \omega_0 + (k+1)i\gamma - (\epsilon' + ki\gamma)) = -(\omega_0 + i\gamma) \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega_0). \quad (25)$$

В результате, для двухчастичной функции Грина с вершиной с $+\omega_0$ получаем

$$\sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega_0) = - \frac{G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma) - G(\epsilon)}{\omega_0 + i\gamma}. \quad (26)$$

Аналогичным образом для Φ с вершиной с $-\omega_0$ получаем

$$\sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(-\omega_0) = - \frac{G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma) - G(\epsilon)}{-\omega_0 + i\gamma}. \quad (27)$$

Подставляя полученные двухчастичные функции (26) и (27) в уравнение (22), получаем функциональное уравнение для функции Грина:

$$G(\epsilon) = G_0(\epsilon) - G_0(\epsilon) \frac{\Delta^2}{2} \times \left\{ \frac{G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma) - G(\epsilon)}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma) - G(\epsilon)}{-\omega_0 + i\gamma} \right\}, \quad (28)$$

так что

$$G(\epsilon) = \frac{1 - \frac{\Delta^2}{2} \left[\frac{G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma)}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma)}{-\omega_0 + i\gamma} \right]}{G_0^{-1}(\epsilon) + \Delta^2 \frac{i\gamma}{\omega_0^2 + \gamma^2}}. \quad (29)$$

Необходимо отметить, что с использованием обобщенного тождества Уорда (23) удастся точно решить (свести к интегральному уравнению) задачу нахождения одночастичной функции Грина $G(\epsilon)$ электрона в случайном гауссовом потенциале с

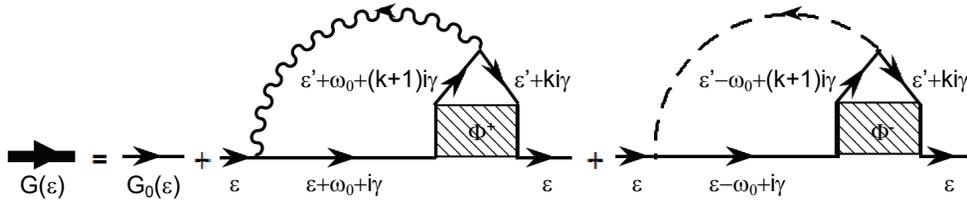


Рис. 6. Диаграммное представление уравнения для функции Грина

произвольным коррелятором $D(\omega)$. Уравнение для функции Грина в этом случае имеет вид

$$G(\epsilon) = G_0(\epsilon) + G_0(\epsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} D(\omega) \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega). \quad (30)$$

С использованием тождества Уорда (23) сразу получаем (24) и интегральное уравнение для функции Грина:

$$G(\epsilon) = G_0(\epsilon) - G_0(\epsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} D(\omega) \frac{G(\epsilon + \omega) - G(\epsilon)}{\omega}. \quad (31)$$

Если в качестве $D(\omega)$ использовать коррелятор (21), то интеграл по частоте легко берется. Второй множитель в подынтегральном выражении не содержит полюса при $\omega = 0$, а также является аналитичным в верхней полуплоскости комплексной ω , поэтому, замыкая контур сверху, мы имеем вклад в интеграл лишь от полюсов $\omega = \pm\omega_0 + i\gamma$ двух лоренцианов в (21) и сразу получаем (28), а значит, и функциональное уравнение (29).

Решая уравнение (29) итерациями, используя в качестве начального приближения

$$\tilde{G}_0(\epsilon) = \frac{1}{G_0^{-1}(\epsilon) + \Delta^2 \frac{i\gamma}{\omega_0^2 + \gamma^2}}, \quad (32)$$

легко убедиться, что на каждой итерации к энергии (кроме $\pm\omega_0$) добавляется очередной вклад $i\gamma$. Поэтому можно ввести обозначения

$$G_n(\epsilon) \equiv G(\epsilon + ni\gamma), \\ G_{0n}(\epsilon) \equiv G_0(\epsilon + ni\gamma) = \frac{1}{\epsilon + ni\gamma}, \quad (33)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ и применить уравнение (29) для энергии $\epsilon + ni\gamma$, сделав замену $\epsilon \rightarrow \epsilon + ni\gamma$. Тогда в

обозначениях (33) уравнение (29) принимает вид³⁾

$$G_n(\epsilon) = \frac{1 - \frac{\Delta^2}{2} \left[\frac{G_{n+1}(\epsilon + \omega_0)}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{G_{n+1}(\epsilon - \omega_0)}{-\omega_0 + i\gamma} \right]}{G_{0n}^{-1}(\epsilon) + \Delta^2 \frac{i\gamma}{\omega_0^2 + \gamma^2}}. \quad (34)$$

В результате, получаем рекуррентную процедуру, на каждом «этаже» n которой G_n зависит лишь от вещественной энергии. Численная реализация такой процедуры достаточно проста. На некотором высоком «этаже» $n = N \gg 1$ задаем массив значений $G_N(\epsilon)$, например $G_N(\epsilon) = 0$. По нему с помощью (34) и интерполяции находим массив значений $G_{N-1}(\epsilon)$ и т. д., пока не придем к физической $G(\epsilon) = G_{n=0}(\epsilon)$.

При $\omega_0 = 0$ мы возвращаемся к описанной выше модели с нулевой передаваемой частотой и конечным временем корреляций. В этом пределе рекуррентное уравнение (34) принимает вид

$$G_n(\epsilon) = \frac{1 + i\frac{\Delta^2}{\gamma} G_{n+1}(\epsilon)}{G_{0n}^{-1}(\epsilon) + i\frac{\Delta^2}{\gamma}}. \quad (35)$$

Внешне рекуррентная процедура (35) не имеет ничего общего с процедурой (17), приводящей к представлению G в виде цепной дроби (18). Однако прямой численный счет показывает, что они дают абсолютно совпадающие результаты для физической функции Грина $G_{n=0}(\epsilon)$ (в пределе стартового «этажа» $N \rightarrow \infty$).

При $\gamma = 0$ в пределе $\omega_0 \rightarrow 0$ уравнение (28) сразу же приводит к дифференциальному уравнению (6) для функции Грина в обычной модели Келдыша, поскольку

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{G(\epsilon + \omega_0) - G(\epsilon)}{\omega_0} = \\ = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{G(\epsilon - \omega_0) - G(\epsilon)}{-\omega_0} = \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon}.$$

³⁾ Естественно, уравнение (34) можно получить и непосредственно из подхода с использованием обобщенного тождества Уорда, описанного выше, применив его для энергии $\epsilon + ni\gamma$.

Функция Грина $G(\epsilon)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной энергии ϵ и производная $dG(\epsilon)/d\epsilon$ дает одинаковый результат по разным направлениям $d\epsilon$ в этой полуплоскости. Поэтому при другом предельном переходе $\omega_0 = 0$, $\gamma \rightarrow 0$ из (28) также сразу получаем дифференциальное уравнение (6). Действительно, аналитичность функции Грина позволяет записать ее (в верхней полуплоскости ϵ) в виде

$$G(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \frac{\rho(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon'}, \quad (36)$$

где

$$\rho(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G(\epsilon)$$

— спектральная плотность (плотность состояний квантовой точки). Тогда в этом пределе в уравнении (28) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{G(\epsilon + i\gamma) - G(\epsilon)}{i\gamma} &= \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{i\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \rho(\epsilon') \left[\frac{1}{\epsilon + i\gamma - \epsilon'} - \frac{1}{\epsilon - \epsilon'} \right] = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \frac{\rho(\epsilon')}{(\epsilon - \epsilon')^2} = \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon}. \end{aligned} \quad (37)$$

Аналитические свойства (36) функции Грина позволяют свести функциональное уравнение (29) к интегральному уравнению для спектральной плотности $\rho(\epsilon)$. Перепишем функциональное уравнение (29) в виде

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \tilde{G}_0(\epsilon) - \tilde{G}_0(\epsilon) \frac{\Delta^2}{2} \times \\ &\times \left[\frac{G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma)}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma)}{-\omega_0 + i\gamma} \right], \end{aligned} \quad (38)$$

где $\tilde{G}_0(\epsilon)$, определяемую (32), можно записать в виде

$$\tilde{G}_0(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon + i\Gamma}. \quad (39)$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{\Delta^2 \gamma}{\omega_0^2 + \gamma^2} \quad (40)$$

— эффективное непертурбативное затухание, вызываемое случайным полем. Тогда для спектральной плотности сразу получаем

$$\begin{aligned} \rho(\epsilon) &= \tilde{\rho}_0(\epsilon) + \frac{\Delta^2}{2\pi} \times \\ &\times \text{Im} \left\{ \tilde{G}_0(\epsilon) \left[\frac{G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma)}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma)}{-\omega_0 + i\gamma} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\tilde{\rho}_0(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } \tilde{G}_0(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{\epsilon^2 + \Gamma^2}$$

— эффективная затравочная спектральная плотность (плотность состояний). Уравнение (41) легко численно решается итерациями, стартуя с начального приближения $\rho(\epsilon) = \tilde{\rho}_0(\epsilon)$.

4.2. Точное решение для функции Грина в виде бесконечного ряда

Уравнение (38) можно решать итерациями, стартуя с $\tilde{G}_0(\epsilon)$. Если результат каждой итерации раскладывать на простые дроби (избавляясь от ϵ в коэффициентах), то нетрудно убедиться, что функция Грина G представляется в виде суммы $\tilde{G}_0(\epsilon + (n - m)\omega_0 + (n + m)i\gamma)$, где n, m — целые числа с коэффициентами, не зависящими от ϵ . Таким образом, функцию Грина надо искать в виде

$$G(\epsilon) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{\epsilon + (n - m)\omega_0 + (n + m)i\gamma + i\Gamma}, \quad (42)$$

где коэффициенты A_{nm} от ϵ не зависят, и их можно найти, подставляя (42) в (38). Тогда имеем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(\epsilon)G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma) &= \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{\epsilon + i\Gamma} \frac{1}{\epsilon + i\Gamma + (n + 1 - m)\omega_0 + (n + 1 + m)i\gamma} = \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{(n + 1)(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\epsilon + i\Gamma} - \frac{1}{\epsilon + i\Gamma + (n + 1)(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} \right], \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(\epsilon)G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma) &= \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{n(\omega_0 + i\gamma) + (m + 1)(-\omega_0 + i\gamma)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\epsilon + i\Gamma} - \frac{1}{\epsilon + i\Gamma + n(\omega_0 + i\gamma) + (m + 1)(-\omega_0 + i\gamma)} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Подставляя (43), (44) в (38), для коэффициента A_{00} при $\frac{1}{\epsilon + i\Gamma}$ получаем:

$$\begin{aligned} A_{00} &= 1 - \frac{\Delta^2}{2} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\omega_0 + i\gamma} \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{(n + 1)(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{-\omega_0 + i\gamma} \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{n(\omega_0 + i\gamma) + (m + 1)(-\omega_0 + i\gamma)} \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Для других коэффициентов имеем

$$A_{nm} = \frac{\Delta^2}{2} \frac{1}{n(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} \times \left[\frac{A_{n-1m}}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{A_{nm-1}}{-\omega_0 + i\gamma} \right]. \quad (46)$$

Естественно $A_{-1m} = A_{n-1} = 0$.

Соотношение (46) позволяет получить весь набор коэффициентов на «этаже» $n_f = n + m$ по коэффициентам на «этаже» $n_f - 1$, а значит, в итоге выразить все коэффициенты через A_{00} . Коэффициенты, полученные на нескольких нижних «этажах», позволяют предположить, что коэффициенты имеют следующий вид:

$$A_{nm} = \frac{A_{00}}{n!m!} \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)^{n+m} \times \frac{1}{(\omega_0 + i\gamma)^{2n}(-\omega_0 + i\gamma)^{2m}}. \quad (47)$$

Подстановка коэффициентов A_{nm} из (47) в уравнение (46) подтверждает предположение.

Теперь, используя (45), можно найти A_{00} :

$$A_{00} = 1 - \frac{\Delta^2}{2} \times \left[\frac{1}{\omega_0 + i\gamma} \sum_{n=1, m=0}^{\infty} A_{n-1m} \frac{1}{n(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} + \frac{1}{-\omega_0 + i\gamma} \sum_{n=0, m=1}^{\infty} A_{nm-1} \frac{1}{n(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} \right]. \quad (48)$$

Используя (46) и (47), получаем

$$A_{00} = 1 - \sum_{\substack{n, m \\ n+m \neq 0}} A_{nm} = 1 - \sum_{\substack{n, m \\ n+m \neq 0}} \frac{A_{00}}{n!m!} \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)^{n+m} \frac{1}{(\omega_0 + i\gamma)^{2n}(-\omega_0 + i\gamma)^{2m}}. \quad (49)$$

Окончательно A_{00} имеет вид

$$A_{00} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)^n \frac{1}{(\omega_0 + i\gamma)^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)^m \frac{1}{(-\omega_0 + i\gamma)^{2m}}} = \exp \left\{ -\frac{\Delta^2}{2(\omega_0 + i\gamma)^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\Delta^2}{2(-\omega_0 + i\gamma)^2} \right\} = \exp \left\{ -\frac{\Delta^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}{(\omega_0^2 + \gamma^2)^2} \right\}. \quad (50)$$

В результате, для функции Грина (42) получаем

$$G(\epsilon) = \exp \left\{ -\frac{\Delta^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}{(\omega_0^2 + \gamma^2)^2} \right\} \times \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \frac{1}{(\omega_0 + i\gamma)^{2n}(-\omega_0 + i\gamma)^{2m}} \times \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)^{n+m} \frac{1}{\epsilon + (n-m)\omega_0 + (n+m)i\gamma + i\Gamma}. \quad (51)$$

Кратко рассмотрим предельное поведение функции Грина и соответствующей ей спектральной плотности $\rho(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G(\epsilon)$, следующее из (51).

В пределе $\gamma \rightarrow 0$ получаем

$$G(\epsilon) = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^{n+m} \times \frac{1}{\epsilon + (n-m)\omega_0 + i\delta}, \quad (52)$$

а спектральная плотность имеет вид

$$\rho(\epsilon) = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^{n+m} \delta(\epsilon + (n-m)\omega_0) \quad (53)$$

и представляет из себя совокупность δ пиков при $\epsilon = \pm k\omega_0$. Веса этих пиков (коэффициент перед соответствующей δ -функцией) имеют вид

$$S^{(+k)} = S^{(-k)} = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+k)!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^{2n+k} = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} I_k \left(\frac{\Delta^2}{\omega_0^2} \right), \quad (54)$$

где I_k — модифицированная (мнимого аргумента) функция Бесселя. Суммарная площадь всех пиков равна

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^{(k)} = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^{n+m} = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^m = 1, \quad (55)$$

как и должно быть.

В пределе $\omega_0 \rightarrow 0$ мы возвращаемся к рассмотренной выше модели флуктуации с конечным временем корреляций и из (51) получаем

$$G(\epsilon) = e^{\frac{\Delta^2}{\gamma^2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(-\frac{\Delta^2}{2\gamma^2} \right)^{n+m} \frac{1}{\epsilon + (n+m)i\gamma + i\frac{\Delta^2}{\gamma}} = e^{\frac{\Delta^2}{\gamma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^k \frac{1}{n!(k-n)!} \right] \left(-\frac{\Delta^2}{2\gamma^2} \right)^k \frac{1}{\epsilon + ki\gamma + i\frac{\Delta^2}{\gamma}}. \quad (56)$$

Поскольку

$$\sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} = 2^k,$$

для функции Грина получаем

$$G(\epsilon) = e^{\frac{\Delta^2}{\gamma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\Delta^2}{\gamma^2}\right)^k \frac{1}{\epsilon + ki\gamma + i\frac{\Delta^2}{\gamma}} = \quad (57)$$

$$= e^{\frac{\Delta^2}{\gamma^2}} \frac{1}{i\gamma} \left(\frac{\Delta^2}{\gamma^2}\right)^{-\left(\frac{\epsilon}{i\gamma} + \frac{\Delta^2}{\gamma^2}\right)} \gamma \left(\frac{\epsilon}{i\gamma} + \frac{\Delta^2}{\gamma^2}, \frac{\Delta^2}{\gamma^2}\right), \quad (58)$$

где

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x dt e^{-t} t^{\alpha-1} \quad (59)$$

— неполная (нижняя) Г-функция. Выражения (57) и (58) могут служить представлением в виде ряда и интегральным представлением для цепной дроби (18).

Рассмотренная выше задача об электроны в гауссовом поле динамических флуктуаций с конечным временем корреляций оказывается тесно связанной с задачей о холстейновском поляроне в полупроводниках с малой электронной подвижностью, т. е. задаче нахождения одноэлектронной функции Грина в модели Холстейна [23] для электрона, взаимодействующего с оптической фононной модой с частотой Ω , в пределе, когда интеграл переноса на ближайших соседей $t \rightarrow 0$ ($t \ll \Omega$). Обычно такую задачу анализируют применяя к гамильтониану Холстейна [23] каноническое преобразование Ланга–Фирсова [24]. Однако диаграммная техника теории возмущений по электрон-фононному взаимодействию в такой модели полностью эквивалентна диаграммной технике нашей модели динамических флуктуации с конечным временем корреляций с учетом замены

$$\Delta \rightarrow g \quad i\gamma \rightarrow -\Omega, \quad (60)$$

где g — константа электрон-фононного взаимодействия. В такой диаграммной технике в знаменателе электронных функций Грина под линиями взаимодействия накапливается не $i\gamma$, а $-\Omega$, поскольку из двух слагаемых фононного пропагатора

$$D(\omega) = \frac{1}{\omega - \Omega + i\delta} - \frac{1}{\omega + \Omega - i\delta} \quad (61)$$

вклад в интеграл по частотам дает только первое слагаемое, вследствие того, что все электронные функции Грина в данной задаче являются запаздывающими.

Таким образом, функция Грина полярона Холстейна (при $t \rightarrow 0$) определяется цепной дробью (18)

с учетом замены (60). Впервые функция Грина полярона Холстейна в таком виде была получена в работе [25]. Полученное нами представление в виде ряда (57) функции Грина модели динамических флуктуации с конечным временем корреляций позволяет сразу (с учетом замены (60)) получить известный точный результат для функции Грина полярона Холстейна [24, 25]:

$$G(\epsilon) = e^{-\frac{g^2}{\Omega^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{g^2}{\Omega^2}\right)^k \frac{1}{\epsilon - k\Omega + \frac{g^2}{\Omega} + i\delta}. \quad (62)$$

Отметим, что использование нами тождества Уорда в некотором смысле эквивалентно преобразованию Ланга–Фирсова в задаче о поляроне Холстейна. Возникающая вследствие использования тождества Уорда эффективная затравочная функция Грина (39) с эффективным непertурбативным затуханием (40), которая в модели с $\omega_0 = 0$ имеет вид

$$\tilde{G}_0(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon + i\frac{\Delta^2}{\gamma}}, \quad (63)$$

в задаче о поляроне Холстейна после замены (60) принимает вид

$$\tilde{G}_0(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon + \frac{g^2}{\Omega} + i\delta}, \quad (64)$$

возникающей после преобразования Ланга–Фирсова эффективной затравочной функции Грина полярона с непertурбативным поляронным смещением основного состояния [24, 25]

$$\epsilon_0 = -\frac{g^2}{\Omega}$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Фактически для наиболее общей модели флуктуаций с конечными частотой и временем корреляций мы имеем три точных численных метода для нахождения функции Грина:

1. рекуррентная процедура (34);
2. интегральное уравнение для нахождения спектральной плотности (41);
3. представление в виде ряда (51).

Для широкой области параметров (Δ , γ , ω_0) модели численные расчеты показали, что все три процедуры дают абсолютно одинаковый результат для спектральной плотности (плотности состояний).

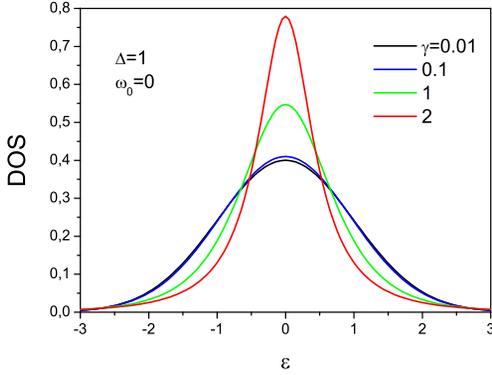


Рис. 7. Спектральная плотность (плотность состояний квантовой точки) в модели с конечным временем корреляций ($\omega_0 = 0$) при различных γ

Самой быстрой при численном анализе является рекуррентная процедура (34), однако при малых $\gamma \ll \Delta, \omega_0$ и $\omega_0 < 0.3\Delta$ она требует существенного роста как числа энергий в массиве, так и величины «этажа», с которого стартует эта процедура, а представление в виде ряда (51) в этой области параметров сходится хорошо. Однако представление в виде ряда не годится для прямого численного анализа области $\Delta \gg \gamma > \omega_0$, что связано как с большой величиной экспоненты перед рядом, так и большого числа членов ряда, которые надо учесть для компенсации этой экспоненты.

Перейдем к представлению численных результатов. На рис. 7 продемонстрирована эволюция спектральной плотности с ростом γ (т.е. с уменьшением характерного времени корреляций) в модели с $\omega_0 = 0$. При $\gamma = 0$ (в обычной модели Келдыша) спектральная плотность — гауссова с шириной Δ (дисперсия Δ^2). Рост γ приводит к эффективно уменьшению характерной ширины спектральной плотности с соответствующим ростом $\rho(0)$.

На рис. 8 приведены спектральные плотности (плотности состояний квантовой точки) в модели с конечной передаваемой частотой при $\Delta = 1$ и различных ω_0 и γ . Видим, что во всех случаях при малых γ наблюдаются существенные модуляции спектральной плотности с частотой ω_0 — пики в спектральной плотности на энергиях $\epsilon = \pm n\omega_0$, где n — целое. Высота пиков снижается с ростом n , и при $\epsilon > 3\Delta$ пики уже практически не видны. Рост γ приводит к снижению высоты пиков и, начиная с некоторых значений γ , модуляции с частотой ω_0 перестают наблюдаться. Дальнейший рост γ лишь несколько сужает гауссоподобную спектральную плотность, аналогично тому, как это наблю-

дается на рис. 7 для модели с $\omega_0 = 0$. При достаточно больших γ , при которых модуляции спектральной плотности с частотой ω_0 не наблюдается, и рост ω_0 достаточно слабо влияет на спектральную плотность (см. рис. 8 f), можно использовать более простую модель с $\omega_0 = 0$. Отметим, что область значений γ , для которых наблюдаются модуляции спектральной плотности, зависит от величины ω_0 . В частности, при $\omega_0 = 0.1$ (рис. 8 a) модуляции наблюдаются лишь при $\gamma = 0.0001$, а при $\omega_0 = 0.5$ (рис. 8 c) модуляции видны уже при $\gamma = 0.05$.

Как уже отмечалось выше, нетрудно обобщить нашу модель и рассмотреть не одну квантовую точку в динамическом гауссовом случайном поле, а d -мерную кристаллическую решетку (параметр решетки далее принимаем за единицу $a \equiv 1$) с интегралом переноса t между ближайшими соседями, помещенную в конденсатор, обкладки которого создают динамическое случайное поле, одинаковое для всех узлов решетки. Поскольку поле постоянно в пространстве, то импульс в процессе рассеяния на этом поле не изменяется и учет перескоков между узлами сводится к замене $\epsilon \rightarrow \epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}}$, где $\epsilon_{\mathbf{p}}$ — зонный спектр электрона с квазиимпульсом \mathbf{p} . В такой модели функция Грина имеет вид

$$G(\epsilon, \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \frac{\rho(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon' + i\delta}, \quad (65)$$

где $\rho(\epsilon)$ — уже полученная нами спектральная плотность (плотность состояний) в задаче с одной квантовой точкой. Тогда для плотности состояний d -мерной системы в динамическом случайном поле получаем

$$N_d(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{\mathbf{p}} G(\epsilon, \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi N_{0d}(\xi) \rho(\epsilon - \xi), \quad (66)$$

где

$$N_{0d}(\xi) = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\xi - \epsilon_{\mathbf{p}})$$

— «затравочная» плотность состояний d -мерной системы в отсутствие случайного поля. Для одномерной цепочки

$$\epsilon_p = -2t \cos(p). \quad (67)$$

«Затравочная» плотность состояний в этом случае

$$N_{0d1}(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4t^2 - \epsilon^2}} \quad (68)$$

расходится на краях зоны. Полученные в такой модели полные плотности состояний для зоны шириной $W = 4t = 1$ и различных значениях параметров

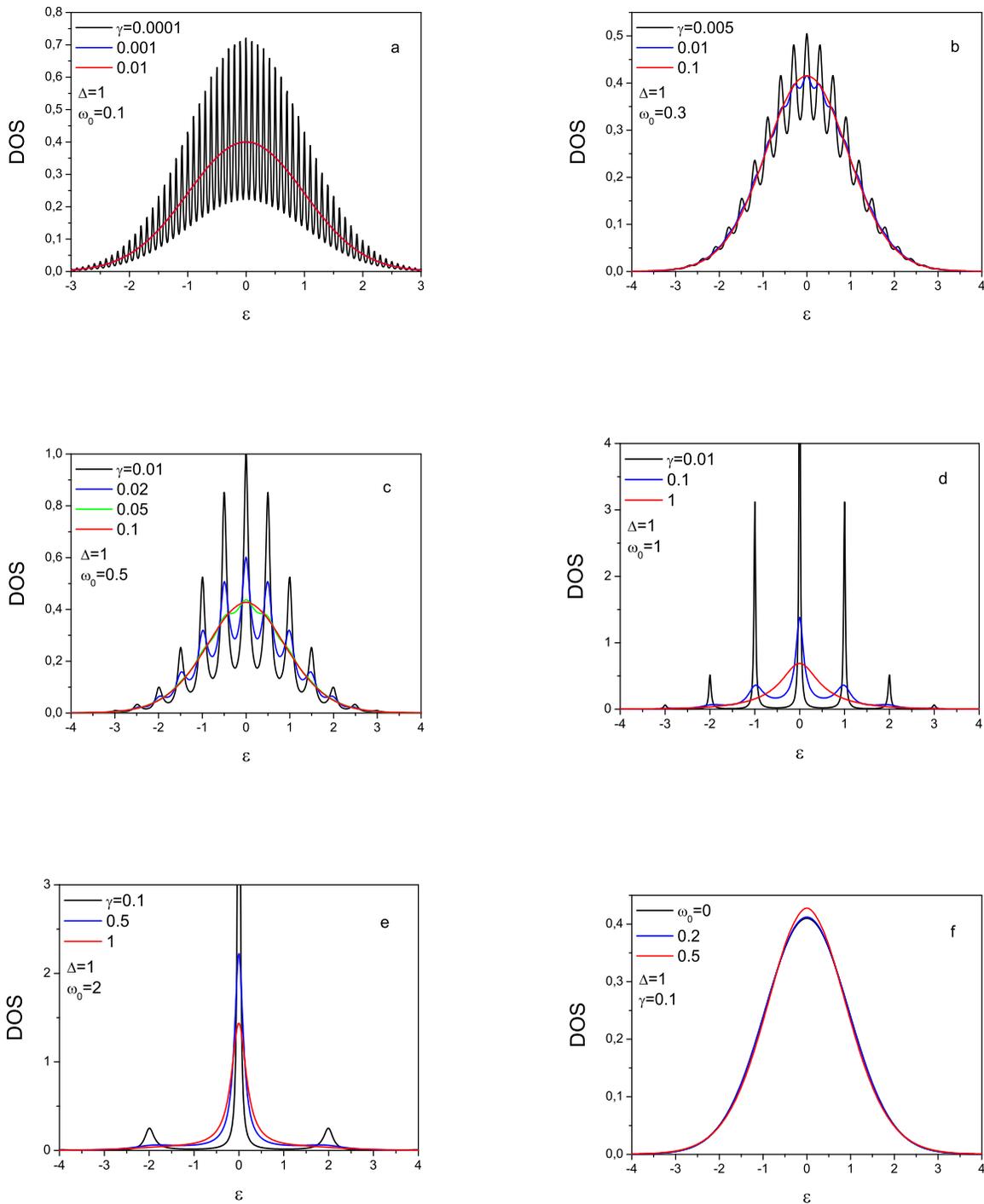


Рис. 8. Спектральная плотность (плотность состояний) квантовой точки в модели с конечными передаваемой частотой и временем корреляций при $\Delta = 1$ и различных ω_0 и γ

случайного поля приведены на рис. 9. Для двумерной решетки

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = -2t(\cos(p_x) + \cos(p_y)). \quad (69)$$

«Затравочная» плотность состояний в этом случае имеет ступеньки на краях зоны и ван-хововскую ло-

гарифмическую расходимость в центре зоны. Полученные в такой модели полные плотности состояний для зоны шириной $W = 8t = 1$ и различных значениях параметров случайного поля приведены на рис. 10. Для анализа трехмерной системы в качестве «затравочной» мы использовали модельную

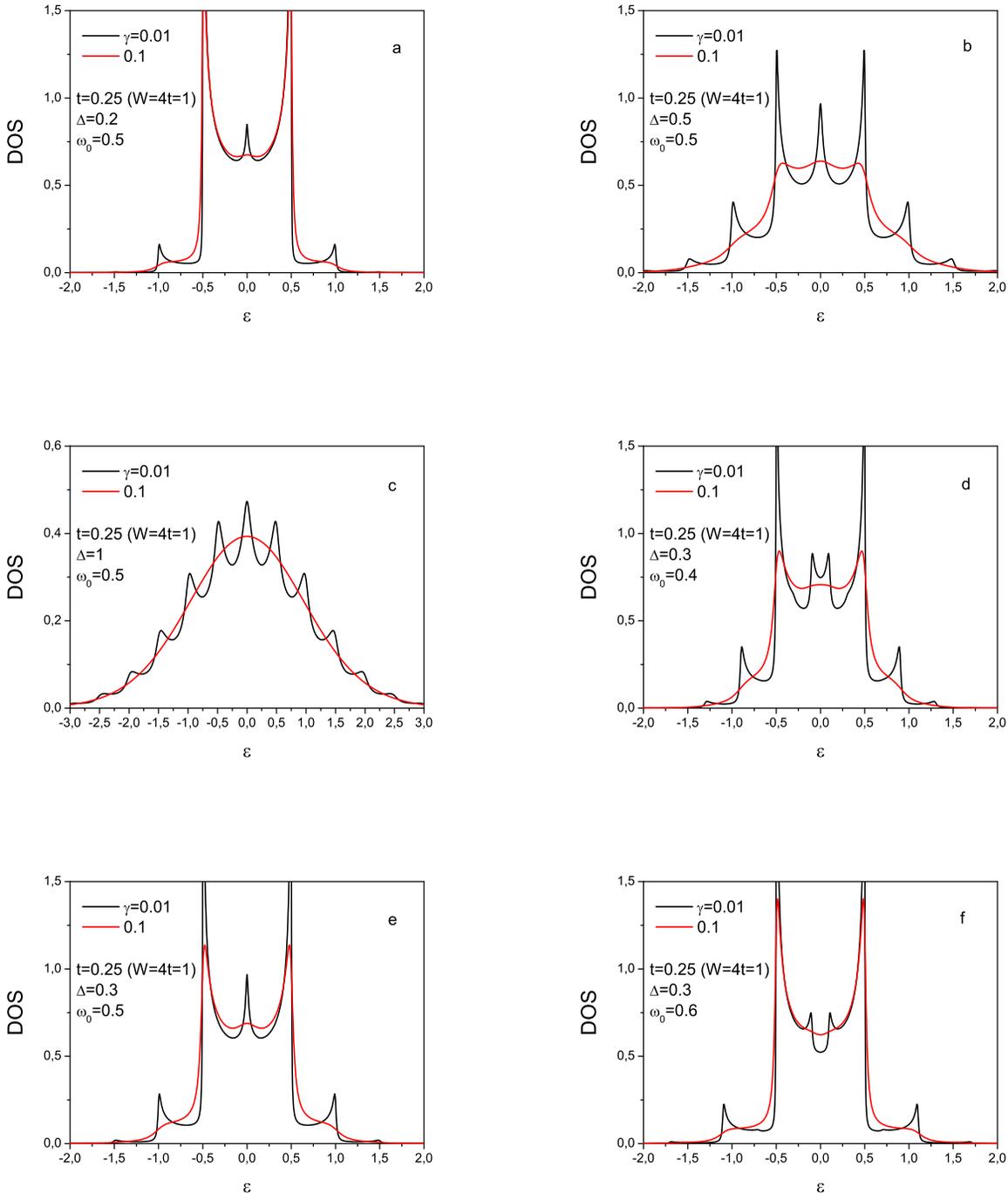


Рис. 9. Плотность состояний для одномерной цепочки с шириной затравочной зоны $W = 4t = 1$ при различных Δ , ω_0 и γ

полуэллиптическую плотность состояний

$$N_{0d3}(\epsilon) = \frac{2}{\pi D^2} \sqrt{D^2 - \epsilon^2}, \quad (70)$$

где D — полуширина зоны. Такая модель обеспечивает правильное для $d = 3$ поведение (пропорциональное $\epsilon^{1/2}$) «затравочной» плотности состояний у краев зоны.

Полученные в такой модели полные плотности состояний для зоны шириной $W = 2D = 1$ и различных значениях параметров случайного поля приведены на рис. 11.

Видим, что во всех моделях при маленькой γ наблюдаются модуляции плотности состояний с частотой ω_0 . Рост γ приводит к резкому ослаблению модуляций. Рост амплитуды случайного поля

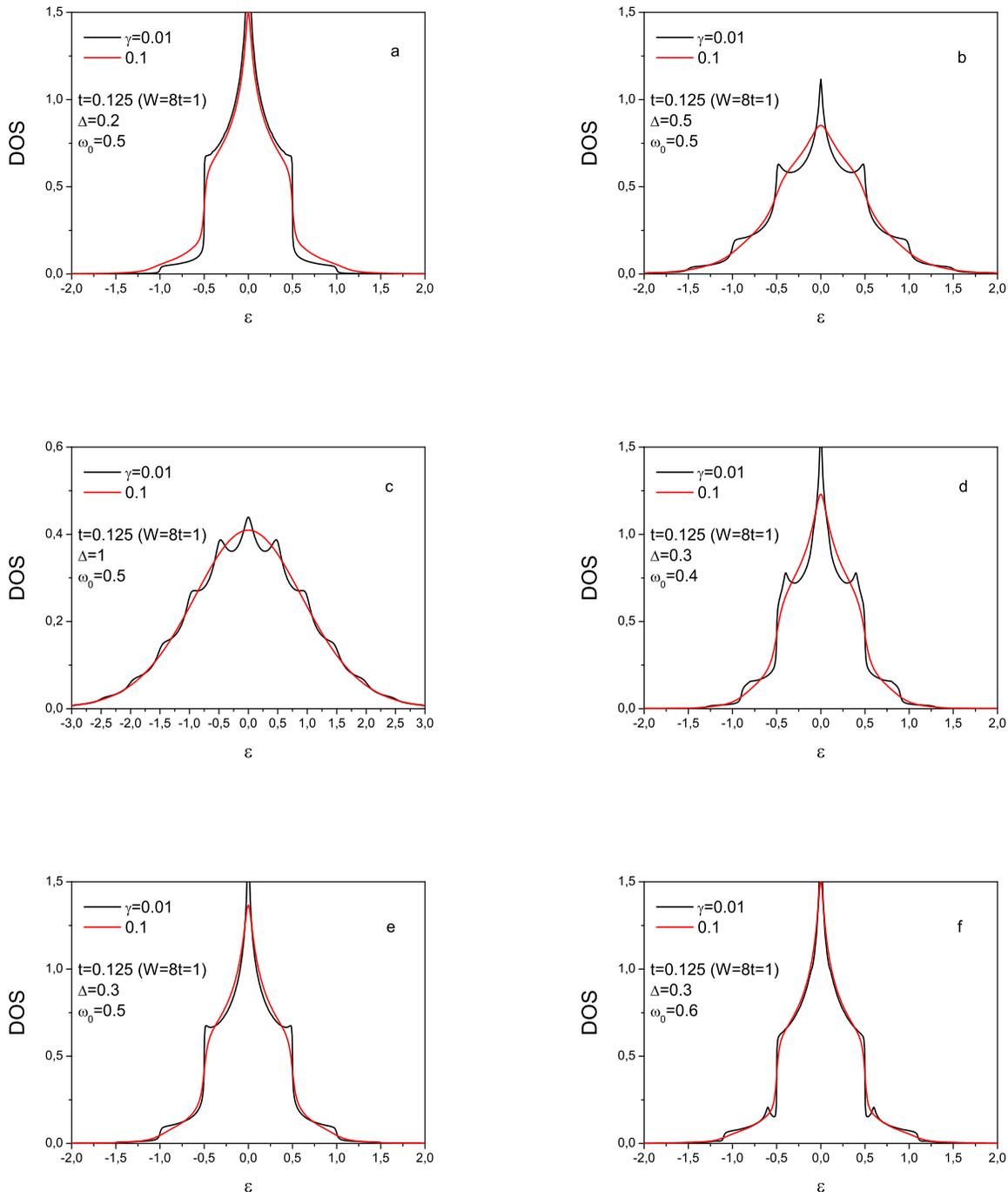


Рис. 10. Плотность состояний для двумерной решетки с шириной затравочной зоны $W=8t=1$ при различных Δ , ω_0 и γ

Δ (рис. 9,10,11 a–c) приводит к некоторому росту амплитуды модуляций и ослаблению особенностей (ван-хововские особенности, поведение у края зоны и т.д.), связанных с «затравочной» плотностью состояний. При $\Delta = W$ (рис. 9,10,11 c) плотность состояний практически «забывает» затравочную. Рост размерности d приводит к ослаблению величины модуляций.

В одномерной цепочке (рис. 9) при $\omega_0 = 0.5$ пики при $\epsilon = \pm\omega_0$ приходятся на края зоны, где затравочная плотность состояний (68) расходится, а пик при $\epsilon = 0$ приходится на минимум затравочной плотности состояний. Поэтому пики при $\epsilon = \pm\omega_0$ эффективно усиливаются и могут даже превышать ослабленный пик при $\epsilon = 0$ (рис. 9 a, b, e). Такое взаимовлияние одномерной расходимости затравочной

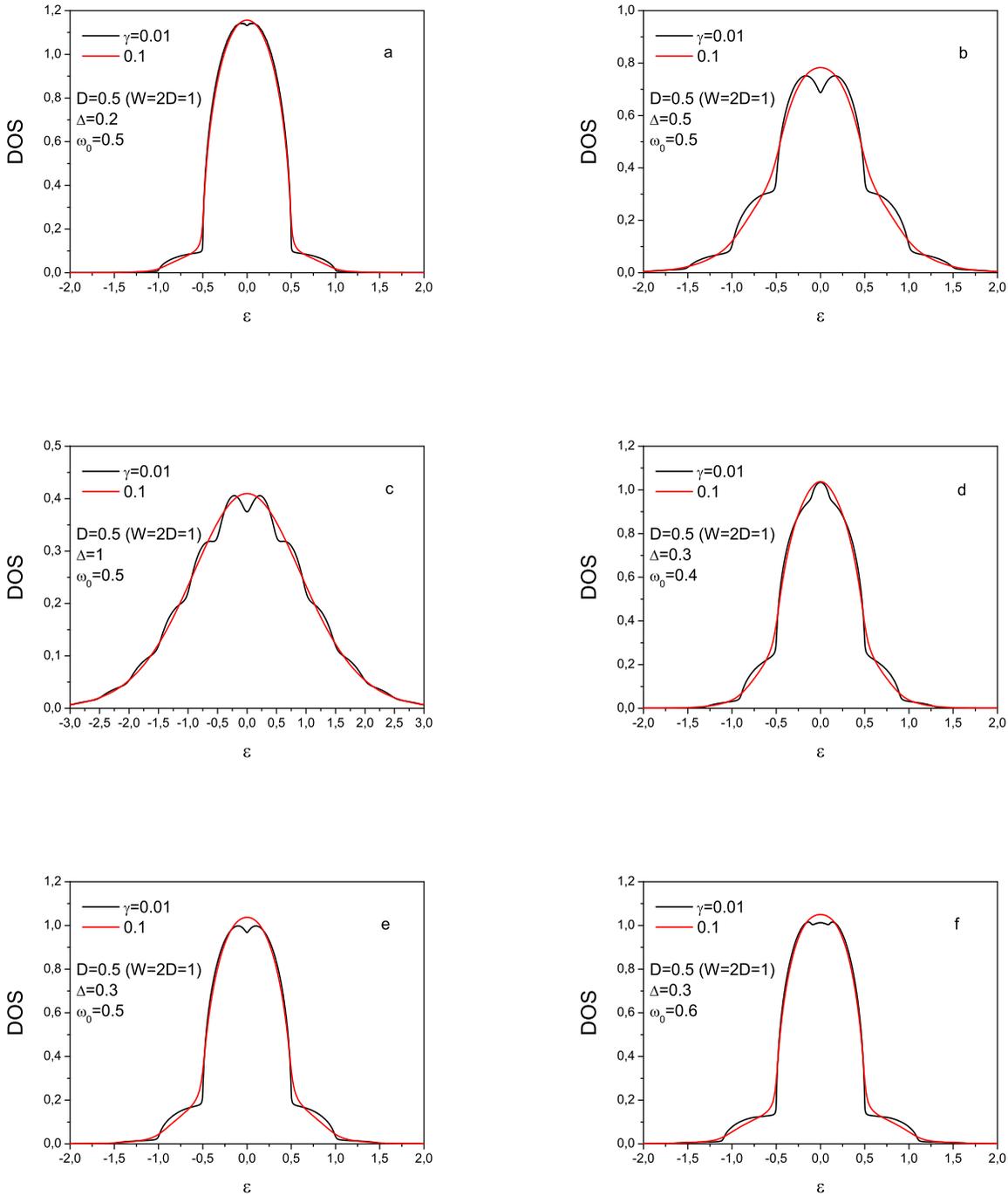


Рис. 11. Плотность состояний трехмерной системы с затравочной полуэллиптической плотностью состояний с шириной зоны $W = 2D = 1$ при различных Δ , ω_0 и γ

плотности состояний на краях зоны и модуляций с частотой ω_0 приводит к заметному изменению величины и формы центрального (при $\epsilon = 0$) пика при небольшом изменении ω_0 вблизи $\omega_0 = 0.5$ (рис. 9 d-f).

Для двумерной решетки ван-хововская расходимость приходится на центр зоны, поэтому центральный пик модуляций всегда заметно превышает пики при $\epsilon = \pm\omega_0$ и форма центрального пика слабо изменяется при небольшом изменении ω_0 вблизи $\omega_0 = 0.5$ (рис. 10 d-f).

Для трехмерной модели модуляции плотности состояний с частотой ω_0 достаточно слабы, и для $\omega_0 = 0.5$ в центре зоны (при $\epsilon = 0$) в плотности состояний наблюдается даже небольшой провал (рис. 11 *a-c, e*). Небольшие изменения ω_0 вблизи $\omega_0 = 0.5$ заметно изменяют форму этой слабой особенности вблизи центра зоны (рис. 11 *d-f*).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное рассмотрение показывает, насколько богатые результаты могут быть получены даже для достаточно простого варианта обобщенной динамической модели Келдыша для случая случайных полей с конечной передаваемой частотой. Представляется очевидным, что данная модель может иметь прямое отношение к ситуации, реализующейся в реальных системах с квантовыми точками, в составе тех или иных устройств микроэлектроники, а частота ω_0 может быть связана с тактовой частотой соответствующих систем. Разумеется, данная простейшая модель является упрощенной, однако можно надеяться, что полученные результаты могут оказаться полезными и при анализе процессов в реальных устройствах.

Вопрос об экспериментальной реализации рассмотренной модели остается открытым. В принципе, изучение квантовых точек в специально создаваемом (например электротехническими средствами) случайном поле представляется вполне возможным, но при этом нужно еще специально подбирать актуальные значения параметров взаимодействия с таким полем, с тем чтобы сделать обсуждаемые эффекты наблюдаемыми. Все это имеет прямое отношение и к обсуждавшимся выше электронным системам (решеткам) разной размерности, находящимся в случайном поле, создаваемом на «обкладках конденсатора».

В реальных физических системах динамические случайные поля могут создаваться, например, фононами в классическом пределе, когда температура заметно превышает характерную частоту этих фононов ω_0 . Например, речь может идти о процессах рассеяния электронов на фононах на интерфейсе металлической пленки и диэлектрической подложки. Хорошо известно, что рассеяние на малые импульсы («почти вперед») может возникать на интерфейсе металлического монослоя FeSe на подложке из ионного диэлектрика SrTiO₃ [26], что приводит к

интересным моделям усиления сверхпроводимости в этой системе [27]. К сожалению, к данной системе проведенное выше рассмотрение непосредственно неприменимо, поскольку частота соответствующего оптического фонона в SrTiO₃ весьма высока и он не может рассматриваться в классическом пределе (как случайное внешнее поле). Тем не менее нельзя исключить существования аналогичных систем (структур) с достаточно «мягкими» оптическими фононами.

Как уже отмечалось выше, рассмотренная модель с одной квантовой ямой достаточно легко обобщается на случай нескольких ям [18, 19], что приводит к варианту модели Келдыша с многокомпонентным шумом. В частности, большой интерес представляют модель двух квантовых ям, которая оказывается (в ее зонном варианте) тесно связанной с точно решаемой моделью псевдощелевого состояния [7–12]. Различные модели подобного типа активно применялись для описания псевдощели, возникающей при рассеянии электронов на флуктуациях ближнего порядка в одномерных моделях [6–12], а затем были обобщены на двумерный случай для описания псевдощели в высокотемпературных сверхпроводниках [13–17]. При этом, как правило, рассмотрение ограничивалось квазистатическими флуктуациями. Представляет очень большой интерес провести обобщение этих моделей на случай динамических флуктуаций с конечной передаваемой частотой, создаваемых соответствующими «мягкими» модами. Ясно, что рассмотрение таких моделей требует существенного развития методов, использованных в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1973).
2. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, Наука, Москва (1966).
3. Б. Р. Левин, *Теоретические основы статистической радиотехники*, Советское радио, Москва (1969).
4. Л. В. Келдыш, *Полупроводники в сильном электрическом поле*, Диссертация, ФИАН, Москва, 1965; [L. V. Keldysh, *Semiconductors in Strong Electric Field*, Dr. Sci. Thesis, Lebedev Institute, Moscow, 1965].

5. А. Л. Эфрос, *Теория электронных состояний в сильно легированных полупроводниках*, ЖЭТФ **59**, 880 (1970); [A. L. Efros, *Theory of the electron states in heavily doped semiconductors*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **59**, 880 (1970) Sov. Phys. JETP **32**, 479 (1971)].
6. М. В. Садовский, *Диаграмматика*, изд. 3, ИКИ-РХД, Москва–Ижевск, 2019; [M. V. Sadovskii. *Diagrammatics*, World Scientific, Singapore, 2nd ed., 2019].
7. М. В. Садовский, *Об одной модели неупорядоченной системы (К теории «жидких полупроводников»)*, ЖЭТФ **66**, 1720 (1974); [M. V. Sadovskii. *A model of a disordered system (A contribution to the theory of «liquid semiconductors»)*. Sov. Phys. JETP **39**, 845 (1974)].
8. М. В. Садовский, *Теория квазиодномерных систем, испытывающих пайерлсовский переход*, ФТТ **16**, 2504 (1974); [M. V. Sadovskii. *Quasi-one-dimensional systems undergoing a Peierls transition*. Sov. Phys. Solid State **16**, 1632 (1974)],
9. W. Wonneberger and R. Lautenschlager, *Theory of Infrared Absorption of Linear Conductors*, J. Phys. C: Solid State Phys. **9**, 2865 (1976).
10. W. Wonneberger, *Infrared Absorption of Incommensurate Linear Conductors*, J. Phys. C: Solid State Phys. **10**, 1073 (1977).
11. М. В. Садовский, *Точное решение для электронной плотности состояний в одной модели неупорядоченной системы*, ЖЭТФ **77**, 2070 (1979); [M. V. Sadovskii. *Exact Solution for the Density of Electronic States in a Model of a Disordered System*, Sov. Phys. JETP **50**, 989 (1979)],
12. M. V. Sadovskii and A. A. Timofeev, *The Two-Particle Green Function in a Model of a One-Dimensional Disordered System: An Exact Solution?*, J. Moscow Phys. Soc. **1**, 391 (1991).
13. J. Schmalian, D. Pines, and B. Stojkovic, *Weak Pseudogap Behavior in the Underdoped Cuprate Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **80**, 3839 (1998).
14. J. Schmalian, D. Pines, and B. Stojkovic, *Microscopic Theory of Weak Pseudogap Behavior in the Underdoped Cuprate Superconductors: General Theory and Quasiparticle Properties*, Phys. Rev. B **60**, 667 (1999).
15. Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, *Модели псевдощелевого состояния двумерных систем*, ЖЭТФ **115**, 1765 (1999); [E. Z. Kuchinskii and M. V. Sadovskii, *Models of the Pseudogap State of Two-Dimensional Systems*, JETP **88**, 968 (1999)].
16. М. В. Садовский, *Псевдощель в высокотемпературных сверхпроводниках*, УФН **171**, 539 (2001); [M. V. Sadovskii. *Pseudogap in High-Temperature Superconductors*, Physics–Uspekhi **44**, 515 (2001)].
17. М. В. Садовский, *Модели псевдощелевого состояния в высокотемпературных сверхпроводниках*, в сб. *Струны, браны, решетки, сетки, псевдощели и пылинки*, Научный Мир, Москва (2007); [M. V. Sadovskii, *Models of the Pseudogap State in High-Temperature Superconductors*, ArXiv:cond-mat/0408489].
18. M. N. Kiselev and K. Kikoin, *Scalar and Vector Keldysh Models in the Time Domain*, JETP Letters, **89**, 133 (2009).
19. D. V. Efremov and M. N. Kiselev, *Seven Études on Dynamical Keldysh model*, SciPost Phys. Lect. Notes **65**, doi:10.21468/SciPostPhysLectNotes65.
20. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1963); [A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1963)].
21. М. В. Садовский, Э. З. Кучинский, *Комбинаторика фейнмановских диаграмм в задачах с гауссовым случайным полем*, ЖЭТФ **113**, 664 (1998); [E. Z. Kuchinskii, M. V. Sadovskii, *Combinatorics of Feynman Diagrams for the Problems With Gaussian Random Field*, JETP **113**, 664 (1999)].
22. E. Z. Kuchinskii, I. A. Nekrasov, and M. V. Sadovskii, *Pseudogaps in Strongly Correlated Metals: Optical Conductivity within the Generalized Dynamical Mean-Field Theory Approach*, Phys. Rev. B **75**, 115102 (2007).

23. T. Holstein, *Studies of Polaron Motion*, Ann. Phys. **8**, 325 (1959); *ibid* **8**, 343 (1959).
24. И. Г. Ланг, Ю. А. Фирсов, ЖЭТФ **43**, 1843 (1963); [I. G. Lang and Yu. A. Firsov. *Kinetic Theory of Semiconductors with Low Mobility*, Sov. Phys. JETP **16**, 1301 (1963)]. .
25. G. L. Goodvin, M. Berciu, and G. A. Sawatzky, *The Green's Function of the Holstein Polaron*, Phys. Rev. B **74**, 245104 (2006).
26. J. J. Lee, F. T. Schmitt, R. G. Moore, S. Johnston, Y. T. Cui, W. Li, Z. K. Liu, M. Hashimoto, Y. Zhang, D. H. Lu, T. P. Devereaux, D. H. Lee, and Z. X. Shen, *Interfacial Mode Coupling as the Origin of the Enhancement of T_c in Fese Films on SrTiO₃*, Nature **515**, 245 (2014).
27. М. В. Садовский, *Высокотемпературная сверхпроводимость в монослоях FeSe*, УФН **186**, 1035 (2016); [M.V. Sadovskii. *High-Temperature Superconductivity in Fese Monolayers*, Physics–Uspekhi **59**, 947 (2016)].