ЖЭТФ, 2024, том 166, вып. 1 (7), стр. 30–37

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЦЕПОЧКИ БОЗЕ-КОНДЕНСАТОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПИТАЕВСКОГО – ГРОССА

И. Н. Мосаки [a,b], *А. В. Турлапов* [b,c,d*]

[a] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет 119991, Москва, Россия*

[b] *ООО «Международный центр квантовой оптики и квантовых технологий» 121205, Москва, Россия*

[c] *Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова Российской академии наук 603155, Нижний Новгород, Россия*

[d] *Московский физико-технический институт 141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 7 марта 2024 г.,
после переработки 7 марта 2024 г.
Принята к публикации 12 марта 2024 г.

Длинная цепочка бозе-конденсатов, высвобожденная из оптической решетки, свободно разлетается и интерферирует. Интерференционные полосы ясно различимы как при равных фазах конденсатов, так и в случае флуктуирующих фаз, вплоть до полного рассогласования фаз соседних конденсатов. В последнем случае положение полос также флуктуирует. Спектр пространственного распределения плотности, однако, воспроизводится, несмотря на флуктуации. Более того, в спектре ясно различимы два типа пиков. Один тип связан с флуктуациями фаз конденсатов, другой — с когерентностью между конденсатами. В рамках уравнения Питаевского – Гросса рассчитана интерференция цепочки конденсатов и проведено сравнение с экспериментом [Phys. Rev. Lett. **122**, 090403 (2019)]. Воспроизведено положение пиков в спектре, в том числе зависимость от межчастичного взаимодействия. Расчетные высоты пиков, однако, в ряде случаев отличаются от измеренных.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S00444510240700446

1. ВВЕДЕНИЕ

В традиционной оптике дифракция и интерференция возникают при прохождении света через структуру из вещества, например через дифракционную решетку. В атомной физике вещество и свет поменялись местами — наблюдается интерференция волн де Бройля, а начальное условие создается светом. Идейная основа для такой смены была заложена Капицей и Дираком, предсказавшими дифракцию электронов на стоячей световой волне [1]. Для атомов рассчитано, что короткое воздействие стоячей световой волны близкой к резонансу создает периодическую модуляцию волновой функции в пространстве [2]. Дифракция волн де Бройля атомов, возникающая вследствие такой модуляции, наблюдалась [3], часто используется и традиционно именуется дифракцией Капицы–Дирака.

Эффект Телбота [4] служит примером сходства между интерференцией света и волн де Бройля. В оптике эффект состоит в самоотображении длинной цепочки когерентных источников на определенном, не очень большом расстоянии. Подобное самоотображение обнаружено во многих системах — для акустических волн [5, 6], плазмонов [7], спиновых волн [8], поляритонов [9], волн де Бройля электронов [10, 11] и атомов [12]. В квантовой системе необходимое условие самоотображения — периодичность волновой функции $\psi(z+d)=\psi(z)$ или ее аналога. Для атомов и молекул эффект Телбота может возникать как частный случай дифракции Капицы–

* E-mail: turlapov@appl.sci-nnov.ru

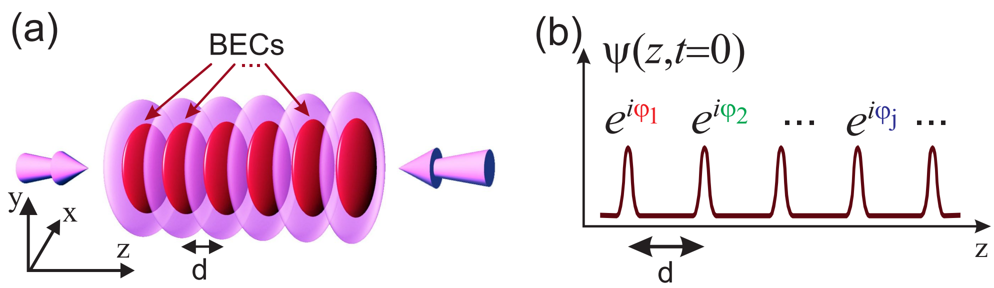

Рис. 1. a — Бозе-эйнштейновские конденсаты (BECs) в оптической решетке непосредственно перед ее отключением, началом разлета и интерференции. Конденсаты показаны темно-красным, а интенсивность стоячей оптической волны — светло-сиреневым. b — Начальная волновая функция конденсатов — модуль периодичен, а разности фаз соседей в общем случае произвольны

Дирака [13–15]. Для появления начальной модуляции $\psi(z)$ атомам не обязательно пролетать поперек стоячей волны. Можно оставить атомы почти неподвижными и на короткое время включить свет. Самоотображение $\psi(z)$ возникнет в том же месте спустя время Телбота $T_d = md^2/(\pi\hbar)$, где m — масса частицы.

Смена ролей света и материи в интерференции позволила расширить представление об эффекте Телбота. В качестве начального условия рассмотрим цепочку бозе-конденсатов, приготовленных в оптической решетке, в пучностях нерезонансной стоячей световой волны, как показано на рис. 1a. В момент времени $t = 0$ свет отключается, и конденсаты интерферируют в свободном пространстве. Если конденсаты когерентны друг с другом, то при $t = T_d$ происходит самовосстановление исходной цепочки конденсатов, т. е. наблюдается эффект Телбота [16,17]. Когерентность между конденсатами можно снижать, увеличивая глубину решетки или температуру [17, 18], при этом сохраняя когерентность внутри каждого конденсата. Полосы от интерференции конденсатов остаются ясно различимы вплоть до полного разупорядочения фаз соседних конденсатов. В последнем случае положение и яркость полос и расстояние между полосами флуктуируют от одного повторения эксперимента к другому. Спектр пространственного распределения плотности, однако, воспроизводим, несмотря на флуктуации, и состоит из эквидистантных пиков, что указывает на пространственный порядок, хотя и с периодом отличным от начального d [17]. В классической оптике подобный порядок в интерференции цепочки с флуктуирующими фазами элементов не наблюдался. Если когерентность между конденсатами частичная, то в спектре ясно различимы два типа пиков. Один тип возникает из-за флуктуаций фаз конденсатов, а другой вызван когерентностью между конденсатами и повторяет спектр, наблюдаемый в эффекте Телбота [17, 19].

В данной работе моделируется интерференция длинной цепочки бозе-конденсатов, происходящая после резкого отключения оптической решетки, в которой были приготовлены бозе-конденсаты. Интерференция рассчитана для произвольной когерентности между конденсатами. Модель основана на уравнении Питаевского – Гросса [20, 21]. Проведено сравнение с экспериментом [17]. Количественно воспроизведено положение пиков в спектре, в том числе сдвиг пиков, связанный с межчастичными взаимодействиями. Амплитуды пиков, однако, в ряде случаев отличаются от измеренных.

В разд. 2 описана модель и приближения. В разд. 3 обсуждаются общие свойства интерференционных полос и их пространственного спектра. В разд. 4 результаты моделирования сравниваются с экспериментом [17].

2. МОДЕЛЬ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Модель и начальные условия подберем так, чтобы они подходили к условиям эксперимента [17], где цепочка конденсатов приготовлена из газа молекул-бозонов $^6Li_2$. Конденсаты исходно удерживались в оптической решетке (рис. 1a) с потенциалом

$$V_s(\mathbf{r}) = sE_{rec}\left(1 - e^{-\frac{2mE_{rec}\rho^2}{(\hbar\lambda)^2}}\cos^2\left(\frac{\pi z}{d}\right)\right), \qquad (1)$$

где s – безразмерная глубина решетки, $\lambda = 27.4$ — параметр анизотропии дископодобных микроловушек, m — масса бозона, $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$, $E_{rec} = \hbar^2\pi^2/(2md^2)$ — энергия фотонной отдачи решетки. Разложение потенциала (1) до квадратичных по координате слагаемых дает частоты микроловушек $\omega_z = 2\sqrt{s}E_{rec}/\hbar$ и $\omega_\perp = \omega_z/\lambda$.

Необходим учет межчастичных взаимодействий, поскольку в эксперименте часть пиков в спектре была сдвинута относительно расчета для невзаимодействующих частиц. Учтем s-взаимодействия между бозонами и опишем динамику уравнением Питаевского – Гросса [20,21] для волновой функции конденсата $\Psi(\mathbf{r}, t)$:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + g\left|\Psi\right|^2\Psi, \tag{2}$$

где $g \equiv 4\pi\hbar^2 a/m$, a — длина s-рассеяния бозонов. Уравнение применимо, поскольку взаимодействия невелики — $n_{max}^{1/3}a \lesssim 0.1$, где n_{max} — концентрация в центре одного облака.

При выборе начального условия $\Psi(\mathbf{r}, t = 0)$ воспользуемся тем, что решетка достаточно глубокая и конденсаты не перекрываются. В характерных условиях эксперимента $\mu/(\hbar\omega_z) = 0.3$, где μ — химический потенциал бозонов, отсчитываемый от $\hbar\omega_z/2$. Таким образом, газ близок к кинематически двумерному — бозоны в основном населяют нижнее состояние гармонического осциллятора вдоль z. Поэтому $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ представима в виде произведения продольной и радиальной частей: $\Psi(\mathbf{r}) = \psi(z, 0)\chi(\rho, 0)$.

Продольную часть $\psi(z, 0)$ выберем в виде суммы гауссовых функций с собственными фазами, как показано на рис. 1 *b*:

$$\psi(z, t = 0) = \frac{N_0^{1/2}}{(2\pi)^{1/4}\sigma^{1/2}}\sum_{j=1}^{K} e^{-\frac{(z-jd)^2}{4\sigma^2}}e^{i\varphi_j}, \tag{3}$$

где N_0 — число бозонов в одном конденсате, K — число конденсатов в цепочке. Гауссова форма следует из близости к двумерности, а наличие собственных фаз φ_j — из локализации. Разности фаз соседних конденсатов $\varphi_j - \varphi_{j+1}$ будем считать случайными величинами с нормальным распределением. В этом случае корреляция фаз спадает экспоненциально, как при тепловых флуктуациях [22]:

$$\langle\cos(\varphi_j - \varphi_l)\rangle = \alpha^{|j-l|},$$

где

$$\alpha = \langle\cos(\varphi_j - \varphi_{j+1})\rangle \simeq \overline{\cos(\varphi_j - \varphi_{j+1})}$$

— фактор когерентности, $\langle...\rangle$ — усреднение по повторениям эксперимента или по расчетам со случайными наборами фаз $\{\varphi_j\}$, обладающими одинаковым разбросом, а чертой обозначено усреднение по элементам цепочки.

Для радиальной части $\chi(\rho, 0)$ справедливо приближение Томаса – Ферми, поскольку $\mu/(\hbar\omega_\perp) \simeq 9 \gg 1$:

$$\chi(\rho, t = 0) = \frac{1}{R_{TF}}\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{\rho^2}{R_{TF}^2}\right)} \tag{4}$$

в пределах радиуса Томаса–Ферми, $\rho < R_{TF}$, и 0 при $\rho > R_{TF}$,

$$R_{TF} = 2l_\perp\left(\frac{2N_0 a}{\sqrt{\pi}\sigma}\right)^{1/4},$$

где $l_\perp = \sqrt{\hbar/(2m\omega_\perp)}$ — размер радиального осциллятора.

Радиальный и аксиальный размеры, R_{TF} и σ, взаимосвязаны. Учтем, что σ может быть больше среднеквадратичного размера осциллятора $l_z = \sqrt{\hbar/(2m\omega_z)}$ из-за взаимодействий, и вычислим R_{TF} и σ самосогласованно. Для этого подставим $\Psi(\mathbf{r}, 0) = \psi(z, 0)\chi(\rho, 0)$ в функционал энергии Питаевского – Гросса

$$\int\left(\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\Psi|^2 + \frac{m(\omega_z^2 z^2 + \omega_\perp^2\rho^2)}{2}|\Psi|^2 + \frac{g}{2}|\Psi|^4\right)d^3\mathbf{r} \tag{5}$$

и минимизируем его по σ. Условие минимума

$$\left(\frac{\sigma}{l_z}\right)^4 - \frac{(8al_z^3N_0)^{1/2}}{3\pi^{1/4}l_\perp^2}\left(\frac{\sigma}{l_z}\right)^{3/2} - 1 = 0 \tag{6}$$

приводит к величине $\sigma/l_z = 1.3$–1.5 для условий эксперимента [17].

Вследствие сильной анизотропии конденсатов разлет в радиальном направлении идет намного медленнее, чем в аксиальном, пренебрежем радиальным разлетом. Подстановка $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(z, t)\chi(\rho, t = 0)$ в уравнение (2) с последующим усреднением по радиальной координате дает уравнение для $\psi(z, t)$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{4\pi^{1/4}}{3}\left(\frac{2a\sigma}{N_0}\right)^{1/2}\hbar\omega_\perp|\psi|^2\psi. \tag{7}$$

Уравнение (7), начальное условие (3) и уравнение для толщины конденсата (6) составляют модель, которая далее используется в расчетах. Цель моделирования — вычисление столбцовой концентрации $n_2(x, z)$ в момент времени t, поскольку эта величина измерима в эксперименте и прямо показывает результат интерференции. Искомая величина получается интегрированием локальной концентрации

$$n(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2: \quad n_2(x, z) = \int n(\mathbf{r})dy.$$

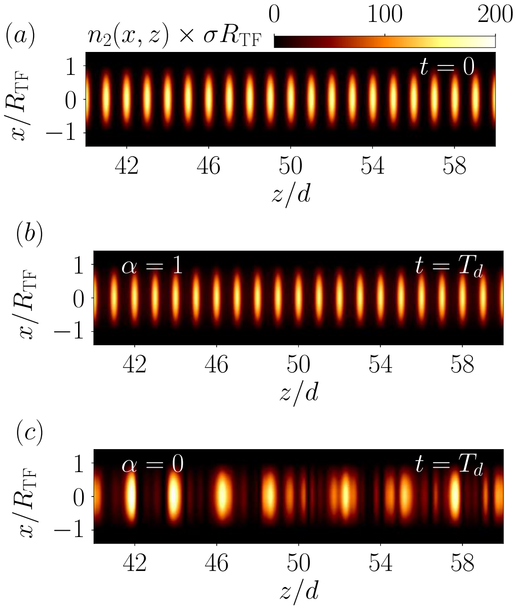

Рис. 2. Расчетная столбцовая концентрация цепочки конденсатов $n_2(x,z)$: в оптической решетке при $t=0$ (a), при $t=T_d$ для одинаковых начальных фаз конденсатов ($\alpha=1$) (b), при $t=T_d$ для полностью разупорядоченных начальных фаз ($\alpha=0$) (c)

3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОЛОС И ИХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА

Покажем следующие из модели общие свойства интерференционных полос, образующихся в момент времени t после резкого отключения оптической решетки при $t=0$ и последующей эволюции конденсатов в свободном пространстве.

Без взаимодействия и для равных фаз начальное распределение точно восстанавливается спустя период Телбота T_d: $\psi(z,0)=\psi(z,T_d)$. Межчастичные взаимодействия приводят к исчезновению точной временной периодичности $\psi(z,t)$, однако при $t=T_d$ профиль плотности все же близок к начальному, что можно видеть на рис. 2a, b, где представлены результаты расчета столбцовой концентрации для $t=0$ и T_d.

Разупорядочивание начальных фаз конденсатов $\{\varphi_j\}$ качественно меняет положение интерференционных полос, что видно на рис. 2c, где показан случай полного отсутствия когерентности ($\alpha=0$). Четкие полосы сохраняются, хотя их положения зависят от конкретных значений фаз и при повторениях для нового набора $\{\varphi_j\}$ не воспроизводятся.

Закономерность для случая разупорядоченых фаз обнаруживается при анализе спектра интерференционных полос

$$\tilde{n}_1(k,t)=\int n_1(z,t)e^{-ikz}dz, \qquad (8)$$

рассчитанного по распределению линейной концентрации

$$n_1(z,t)=\int n_2(x,z,t)dx.$$

В рамках модели

$$\tilde{n}_1(k,t)=\int |\psi(z,t)|^2 e^{-ikz}dz.$$

На рис. 3 представлены расчетные спектры $\langle|\tilde{n}_1(k,T_d)|\rangle$ для различных уровней корреляции фаз конденсатов.

В расчете использованы характерные для эксперимента [17] параметры: $N_0=500$, $a=1520$ бор, $s=20$, $K=50$, $d=5.3$ мкм, которые в частности дают $\sigma=1.36 l_z$, а также выполнен расчет для $a=0$. Для подавления мелкомасштабного шума спектры усреднены по 800 повторениям. Во всех случаях в спектре присутствуют пики, указывая на пространственную упорядоченность интерференционных полос.

При одинаковых фазах ($\alpha=1$) спектр состоит из узких пиков при $k=2\pi l/d$, $l\in\mathbb{Z}$, что видно на рис. 3 a. Для полностью разупорядоченных конденсатов ($\alpha=0$) и $a=0$ ранее аналитически показано [17], что спектр снова состоит из эквидистантных пиков, которые, однако, шире и лежат при других импульсах $k=\pi l T_d/(td)$. Здесь результат численного счета, показанный на рис. 3c черной кривой, близок к аналитическому. Для частично разупорядоченных фаз спектр показан на рис. 3 b. Сочетаются два типа спектра — узкие пики, отвечающие эффекту Телбота, и широкие пики, возникающие из-за флуктуации фаз. Относительный вклад этих двух типов спектра можно использовать для измерения фактора когерентности α.

Межчастичное взаимодействие по-разному воздействует на каждый из двух типов спектра, что видно из сравнения черных и оранжевых кривых на рис. 3. Положение узких пиков невосприимчиво к среднему полю. Центры широких пиков сдвинуты к меньшим импульсам из-за среднего поля.

4. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

В эксперименте [17] методом теневой съемки измеряется столбцовая концентрация газа $n_2(x,z)$. Примеры показаны на рис. 4 a, c, повторяющие рис. 2b и рис. 3 b из работы [17].

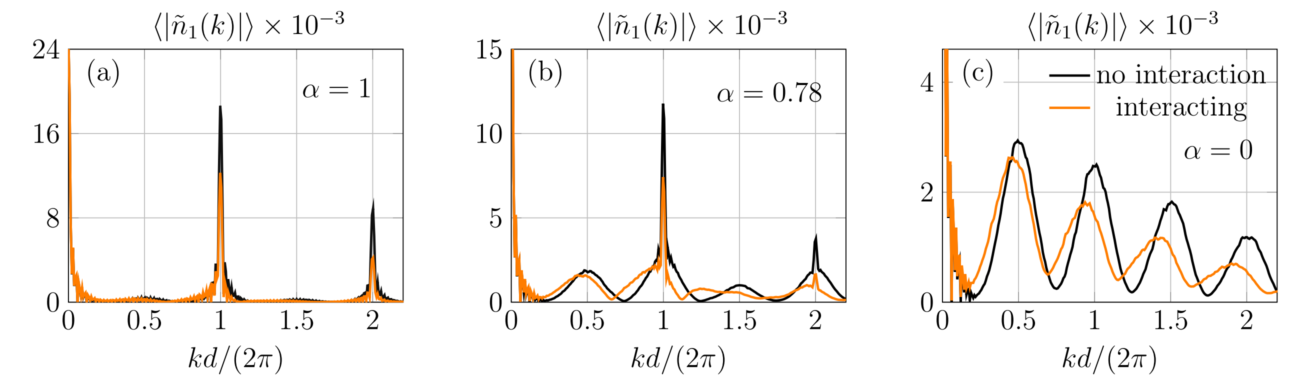

Рис. 3. Усредненный модуль спектра интерференционных полос $\langle|\tilde{n}_1(k,T_d)|\rangle$ при $t=T_d$ для различной степени упорядоченности начальных фаз: a — $\alpha=1$, фазы одинаковы; b — $\alpha=0.78$, фазы частично упорядочены; c — $\alpha=0$, фазы полностью разупорядочены. Показаны расчеты со взаимодействием (interacting) и без взаимодействия (no interaction)

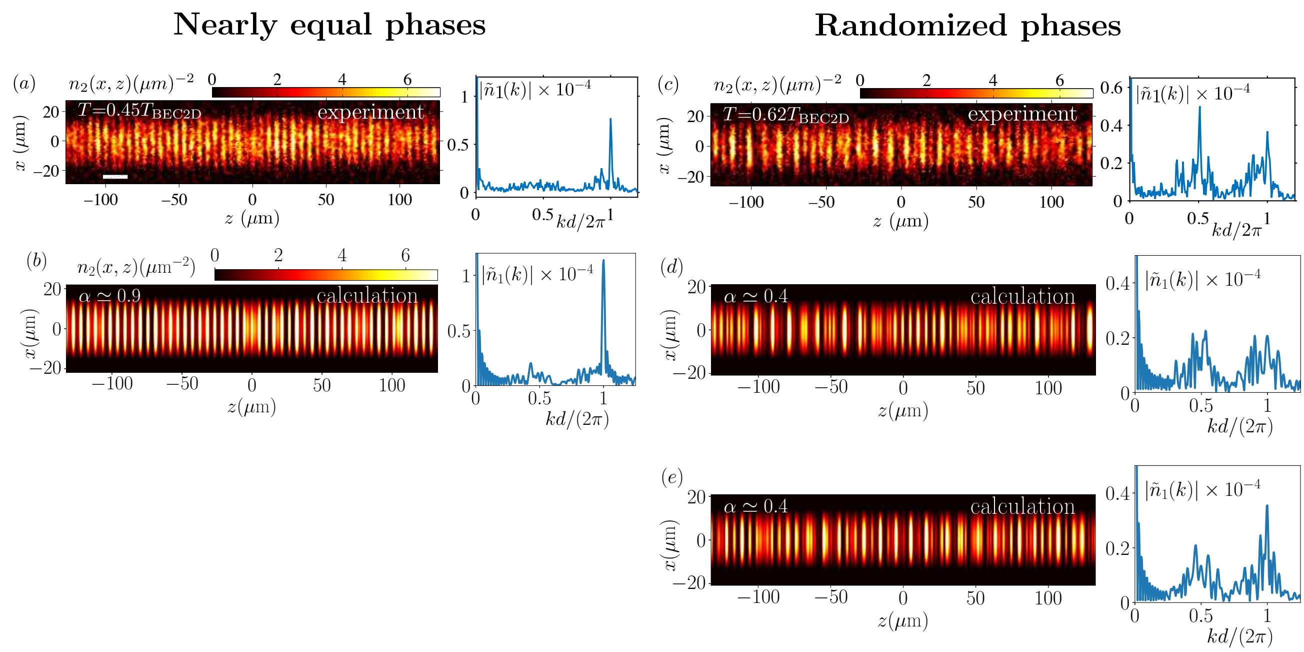

Рис. 4. a, c — Снимки интерференции из эксперимента [17] при $t=T_d$ и их спектры для цепочки бозе-конденсатов с температурой $T=0.45T_{\mathrm{BEC2D}}$ и $T=0.62T_{\mathrm{BEC2D}}$ соответственно. b — Моделирование данных с рис. a. d, e — Моделирование данных с рис. c с использованием двух разных наборов фаз $\{\varphi_j\}$ с одинаковым фактором когерентности α

Снимок может быть сделан в любой момент t, что приводит к разрушению квантового состояния. Новый снимок требует повторения эксперимента заново. На снимках на рис. 4 *a, c*, сделанных при $t=T_d$, интерференционные полосы параллельны, что указывает на отсутствие флуктуаций фазы внутри конденсатов и оправдывает введение в модельном распределении (3) единой фазы φ_j для j-го микроконденсата. По распределениям $n_2(x,z)$ рассчитаны спектры, также показанные на рис. 4*a, c*. Уменьшение когерентности между соседними конденсатами и переход от эффекта Телбота к выраженным проявлениям некогерентности в спектре достигнут увеличением температуры T, которая отмечена на рисунках в единицах критической температуры двумерного бозе-газа $T_{\mathrm{BEC2D}}=\hbar\omega_\perp\sqrt{6N}/\pi$. Температура найдена по радиальному распределению концентрации, измеренному при $t=0$. Для определения T/T_{BEC2D} радиальное распределение подогнано бимодальным профилем, что также дало N_0/N, где N — полное число частиц в одной дископодобной ловушке, включая неконденсированные.

Моделирование данных с рис. 4 *a* представлено на 4 *b*, а данных с 4 *c* — на 4 *d, e*. В расчетах использованы $K=50$, $s=23.3$, $a=1520$ бор, $d=5.3$ мкм, а также $N_0=463$ для рис. 4*c* и $N_0=271$

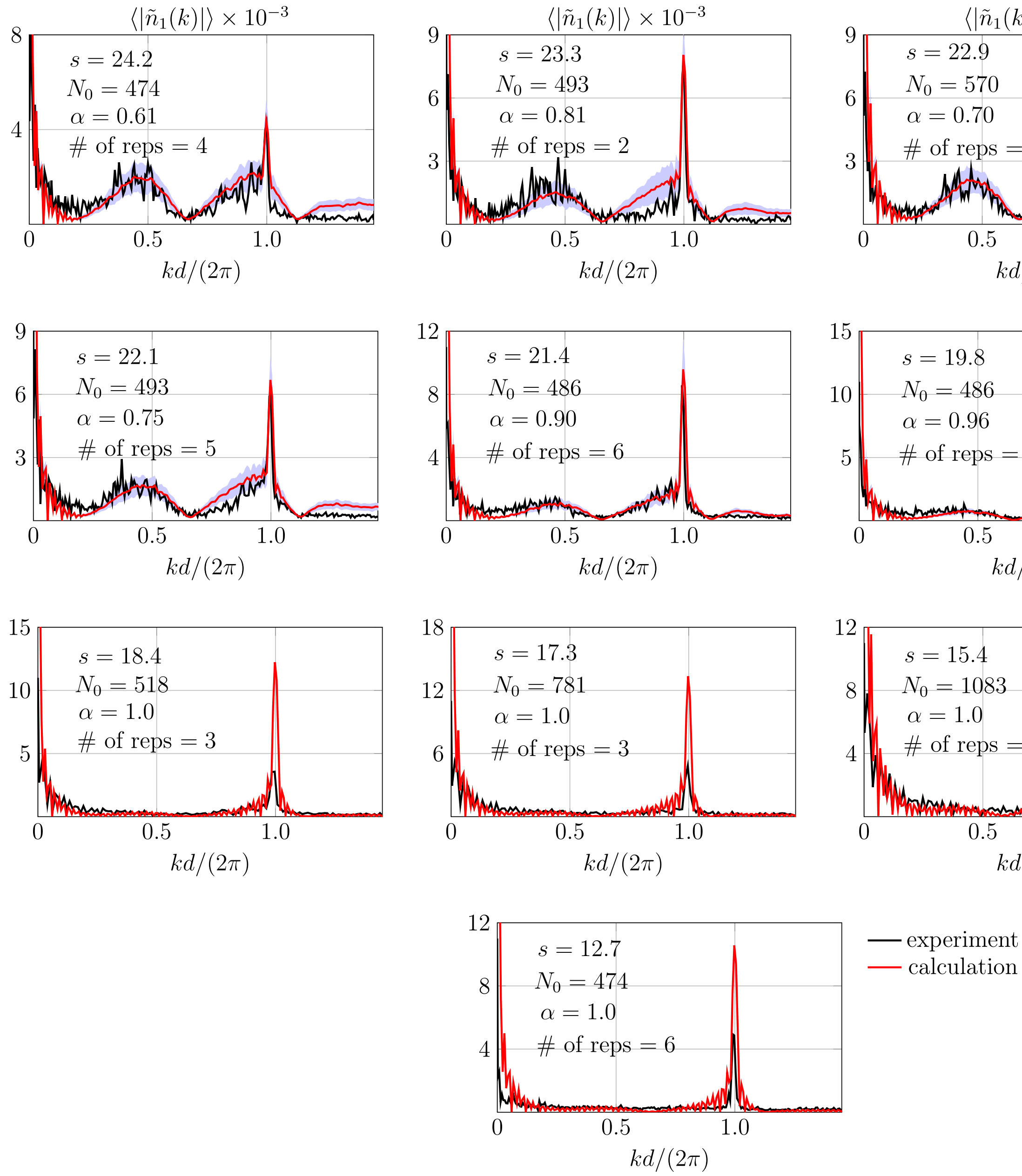

Рис. 5. Спектры линейного распределения концентрации, получившегося после эволюции конденсатов в свободном пространстве в течение периода Телбота T_d. Показаны результаты эксперимента [17] и расчета. Изменяемые параметры показаны на графиках, «# of reps» — число повторений эксперимента. Расчеты усреднены по 200 наборам $\{\varphi_j\}$, границы сиреневой заливки соответствуют $\pm$ одному стандартному отклонению

для 4 *d, e*. Подстраиваемым параметром модели был фактор когерентности α, а наборы $\{\varphi_j\}$ для каждого рисунка выбирались произвольно, лишь с условием $\overline{\cos(\varphi_j - \varphi_{j+1})} = \alpha$. Подбором α получено сходство экспериментальных и расчетных спектров. При этом для сходства спектров не требуется идентичного воспроизведения интерференционных полос.

Мелкомасштабный шум присутствует и на экспериментальных, и на расчетных спектрах рис. 4. В случае разупорядоченных фаз шум мешает установить, связан ли острый пик при $kd/(2\pi) = 1$ с эффектом Телбота или является шумовым выбросом. Эта сложность видна при сравнении спектров на рис. 4*d* и рис. 4*e*, рассчитанных для одинаковых α, но разных конкретных наборов фаз $\{\varphi_j\}$. Мелкомасштабный шум может быть подавлен усреднением по повторениям эксперимента или расчета, как на рис. 3 и 5.

Постепенный переход от интерференции с разупорядоченными фазами к эффекту Телбота можно наблюдать по данным и расчетам, представленным на рис. 5. Данные взяты с рис. 6 дополнительных материалов статьи [17]. Показан результат интерференции при $t = T_d$. И в данных, и при моделировании используется усреднение по повторениям эксперимента или расчета. На расчетных кривых величину мелкомасштабного шума можно видеть по сиреневой заливке. Ее границы соответствуют $\pm$ одному стандартному отклонению. Усреднение позволяет верно идентифицировать пик, связанный с интерференцией по Телботу, и использовать его для подбора α. Фактор когерентности α зависит от температуры [22], что открывает возможность для термометрии, в том числе для температур существенно меньших критической, которые не могут быть найдены бимодальной подгонкой [19, 23].

Переход между двумя режимами интерференции, показанный на рис. 5, достигнут плавным изменением глубины решетки s. Для глубин $s \leq 18.4$ высота расчетного спектра очевидно превышает высоту экспериментального. Причина различия не ясна. Можно отметить, что приближение Питаевского – Гросса не учитывает обеднение конденсата из-за взаимодействий. Кроме того, при уменьшении s аксиальная волновая функция исходного конденсата отходит от гауссова профиля (3).

Широкие пики в спектре, отвечающие флуктуациям фаз, сдвинуты влево относительно положений, предсказанных моделью без взаимодействий. В случае $a = 0$ центры пиков на рис. 4 и 5 должны были бы находиться при $kd/(2\pi) = 0.5$ и 1.0. Модель на основе уравнения Питаевского – Гросса хорошо воспроизводит сдвиг пиков. Важную роль для количественного сходства играет уширение конденсата, задаваемое формулой (6). Без этого уширения при $\sigma = l_z$ сдвиг в 2–3 раза меньше.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках уравнения Питаевского – Гросса рассчитана интерференция длинной цепочки конденсатов. Получены два режима интерференции и их комбинация. Сравнение спектра интерференционных полос с данными эксперимента показывает количественное согласие в положении и ширине пиков, в том числе — согласие в среднеполевых сдвигах. Касательно высот пиков есть рассогласование с частью данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. L. Kapitza and P. A. M. Dirac, *The Reflection of Electrons from Standing Light Waves*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **29**, 297 (1933).
2. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *К квантовой теории резонансного рассеяния атомов светом*, Письма в ЖЭТФ **31**, 542 (1980) [JETP Lett. **31**, 509 (1980)].
3. P. L. Gould, G. A. Ruff, and D. E. Pritchard, *Diffraction of Atoms by Light: The Near-Resonant Kapitza–Dirac Effect*, Phys. Rev. Lett. **56**, 827 (1986).
4. H. F. Talbot, *Facts Related to Optical Science*, Philos. Mag. **6**, 401 (1836).
5. N. Saiga and Y. Ichioka, *Visualization of the Strain Wave Front of a Progressive Acoustic Wave Based on the Talbot Effect*, Appl. Opt. **24**, 1459 (1985).
6. А. Н. Морозов, М. П. Крикунова, Б. Г. Скуйбин, Е. В. Смирнов, *Наблюдение эффекта Тальбота для ультразвуковых волн*, Письма в ЖЭТФ **106**, 26 (2017) [JETP Lett. **106**, 23 (2017)].
7. W. Zhang, C. Zhao, J. Wang, and J. Zhang, *An Experimental Study of the Plasmonic Talbot Effect*, Opt. Express **17**, 19757 (2009).
8. S. Mansfeld, J. Topp, K. Martens, J. N. Toedt, W. Hansen, D. Heitmann, and S. Mendach, *Spin Wave Diffraction and Perfect Imaging of a Grating*, Phys. Rev. Lett. **108**, 047204 (2012).
9. T. Gao, E. Estrecho, G. Li, O. A. Egorov, X. Ma, K. Winkler, M. Kamp, C. Schneider, S. Höfling, A. G. Truscott, and E. A. Ostrovskaya, *Talbot Effect for Exciton Polaritons*, Phys. Rev. Lett. **117**, 097403 (2016).
10. V. L. Bratman, G. G. Denisov, N. S. Ginzburg, B. D. Kol'chugin, N. Y. Peskov, S. V. Samsonov, and A. B. Volkov, *Experimental Study of an FEM with a Microwave System of a New Type*, IEEE Trans. Plasma Sci. **24**, 744 (1996).
11. T. G. A. Verhoeven, W. A. Bongers, V. L. Bratman, M. Caplan, G. G. Denisov, C. A. J. van der Geer, P. Manintveld, A. J. Poelman, J. Plomp, A. V. Savilov, P. H. M. Smeets, A. B. Sterk, and W. H. Urbanus, *First mm-Wave Generation in the FOM Free Electron Maser*, IEEE Trans. Plasma Sci. **27**, 1084 (1999).

12. M. S. Chapman, C. R. Ekstrom, T. D. Hammond, J. Schmiedmayer, B. E. Tannian, S. Wehinger, and D. E. Pritchard, *Near-field Imaging of Atom Diffraction Gratings: The Atomic Talbot Effect*, Phys. Rev. A **51**, R14 (1995).

13. L. Deng, E. W. Hagley, J. Denschlag, J. E. Simsarian, M. Edwards, C. W. Clark, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *Temporal, Matter-Wave-Dispersion Talbot Effect*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5407 (1999).

14. B. Santra, C. Baals, R. Labouvie, A. B. Bhattacherjee, A. Pelster, and H. Ott, *Measuring Finite-Range Phase Coherence in an Optical Lattice Using Talbot Interferometry*, Nature Comm. **8** 15601 (2017).

15. F. Wei, Z. Zhang, Y. Chen, H. Shui, Y. Liang, C. Li, and X. Zhou, *Temporal Talbot Interferometer of Strongly Interacting Molecular Bose–Einstein Condensate*, arXiv:2402.14629 (2024).

16. M. J. Mark, E. Haller, J. G. Danzl, K. Lauber, M. Gustavsson, and H.-C. Nägerl, *Demonstration of the Temporal Matter-Wave Talbot Effect for Trapped Matter Waves*, New J. of Phys. **13**, 085008 (2011).

17. V. Makhalov and A. Turlapov, *Order in the Interference of a Long Chain of Bose Condensates with Unrestricted Phases*, Phys. Rev. Lett. **122**, 090403 (2019).

18. Z. Hadzibabic, S. Stock, B. Battelier, V. Bretin, and J. Dalibard, *Interference of an Array of Independent Bose–Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **93**, 180403 (2004).

19. В. Б. Махалов, А. В. Турлапов, *Квантовый эффект Телбота для цепочки частично коррелированных конденсатов Бозе—Эйнштейна (Минобзор)*, Письма в ЖЭТФ **109**, 564 (2019) [JETP Lett. **109**, 552 (2019)].

20. Л. П. Питаевский, *Вихревые линии в неидеальном бозе-газе*, ЖЭТФ **40**, 646 (1961) [JETP **13**, 451 (1961)].

21. E. P. Gross, *Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems*, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).

22. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Thermal vs Quantum Decoherence in Double Well Trapped Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **87**, 180402 (2001).

23. R. Gati, B. Hemmerling, J. Fölling, M. Albiez, and M. K. Oberthaler, *Noise Thermometry with Two Weakly Coupled Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **96**, 130404 (2006).