

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЧЕРНЫХ ДЫР И КРотовых НОР

*С. В. Чернов**

*Астрономический центр,
Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 декабря 2023 г.,
после переработки 29 декабря 2023 г.
Принята к публикации 23 января 2024 г.

На примере метрики Лами исследуются поляризационные свойства черных дыр и кротовых нор. Строятся карты линейной поляризации и положения угла электрического вектора для тороидального и радиального распределений магнитного поля в тонких дисках. Используя данные результаты по будущим РСДБ-наблюдениям на «Телескопе горизонта событий» следующего поколения и космической миссии «Миллиметрон», можно будет определить, является ли источник черной дырой или кротовой норой.

DOI: 10.31857/S0044451024060051

1. ВВЕДЕНИЕ

Телескоп горизонта событий (ТГС) получил образ горячей замагниченной плазмы, излучающей синхротронное излучение вокруг сверхмассивных черных дыр в эллиптической галактике M87 [1] и в нашей галактике Млечный путь [2]. Образы образуют кольцоподобную морфологию и были получены в миллиметровом диапазоне на частоте 230 ГГц. Однако карты интенсивности несут значительно меньше информации, чем карты поляризации. Из-за этого не удастся ограничить численные модели и определить параметры плазмы и черной дыры из наблюдений [3]. В 2021 г. по данным ТГС опубликована карта линейной поляризации сверхмассивной черной дыры в M87*, благодаря чему была открыта спиральная структура положения угла электрического вектора в горячей замагниченной плазме [4]. Поляризационная карта источника M87* сильно ограничила численные модели, в частности, было выяснено, что структура аккреционного потока лучше описывается режимом с захваченным магнитным полем (MAD), чем диском со стандартной и нормальной эволюцией (SANE) [5]. Поэтому поляризационные наблюдения являются критически

важным шагом к пониманию физических процессов в сильном гравитационном поле.

Другой вопрос, который здесь возникает, действительно ли полученный образ в наблюдениях ТГС является образом черной дыры или является образом другого объекта, например, кротовой норы? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходим критерий отличия черной дыры от кротовой норы. В данной работе предполагается, что отличить черную дыру от кротовой норы можно по линейной поляризации излучения.

Для построения поляризационных карт необходимо вычислить изменение поляризации вдоль траектории фотона. Как известно, поляризация излучения может изменяться по двум причинам. Первая — за счет поворота электрического вектора вдоль геодезической в сильном искривленном пространстве-времени. Вторая — за счет распространения фотона в замагниченной плазме. Здесь мы будем исследовать первую причину. Сильное искривленное пространство-время будет создаваться либо черной дырой, либо кротовой норой.

В данной статье на примере метрики Лами вычислено изменение вектора линейной поляризации при движении фотона в сильном гравитационном поле как для черной дыры, так и для кротовой норы. Для этого выбирается метрика, которая описывает как черные дыры, так и кротовые норы и в предельном случае совпадает с метрикой вращающейся черной дыры Керра. Построены карты линей-

* E-mail: chernov@lpi.ru

ной поляризации и положения угла электрического вектора в зависимости от направления магнитного поля в тонком диске. Рассмотрено тороидальное и радиальное распределение магнитного поля в тонких дисках. Вычислен коэффициент разложения β_2 линейной поляризации в зависимости от параметров метрики и дан критерий отличия черной дыры от кротовой норы.

В работе используется система единиц, в которой скорость света и гравитационная постоянная равны единице, $c = G = 1$. Размерность длины есть Gm/c^2 , размерность времени Gm/c^3 , где m — параметр массы.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ФОТОНА

В данном разделе мы кратко опишем основные уравнения распространения луча света в искривленном пространстве-времени на примере метрики Лами.

Метрика Лами в координатах Бойера – Линдквиста (t, r, θ, ϕ) имеет вид [6]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2rM(r)}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} ((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta) d\phi^2 - \frac{4raM(r) \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi, \quad (1)$$

где введены стандартные обозначения

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$\Delta = r^2 - 2rM(r) + a^2,$$

a — параметр вращения, спин. Эта метрика отличается от метрики вращающейся черной дыры Керра тем, что параметр массы M не является постоянной величиной, а есть функция радиальной координаты вида [6]

$$M(r) = m \frac{|r|^3}{|r|^3 + 2mb^2}. \quad (2)$$

В этом случае параметр m является постоянной величиной и мы будем называть его параметром массы, а параметр b , как было показано в работе [7], является магнитным зарядом. В случае, когда магнитный заряд равен нулю, $b = 0$, данная метрика совпадает с метрикой вращающейся черной дыры Керра. Без потери общности будем считать, что параметр массы равен единице, $m = 1$. Также

в данной работе будем рассматривать случай, когда магнитный заряд принимает значения от нуля до двойки, $0 \leq b \leq 2$. Как было показано в работе [6], данное многообразие является геодезически полным и несингулярным во всем пространстве-времени $-\infty < r < \infty$. Это означает, что два асимптотически плоских пространства-времени соединены между собой в точке $r = 0$. Из выражения (2) можно видеть, что величина $M(r) \geq 0$ всегда больше или равна нулю для любого радиуса, $-\infty < r < \infty$.

Метрика Лами обладает координатными особенностями, которые соответствуют горизонтам событий в случае метрике Керра. Эти условия определяются выражением вида

$$\Delta = r^2 - 2rM(r) + a^2 = 0.$$

В случае, когда оба параметра a и b не равны нулю, уравнение $\Delta = 0$ решается численно. На рис. 4 статьи [6] показаны случаи, когда данное уравнение либо не имеет корней, либо имеет один (экстремальный случай) или два корня. Данные корни уравнения $\Delta = 0$ будем называть горизонтами событий по аналогии с корнями уравнения в метрике Керра. Если метрика Лами обладает двумя или одним горизонтом событий, то данная метрика соответствует метрике черной дыры, в противном случае соответствует кротовой норе.

Фотоны распространяются в метрике Лами, движутся вдоль геодезических, которые описываются уравнениями вида

$$\begin{aligned} \frac{dx^\alpha}{d\tau} &= p^\alpha, \\ \frac{dp^\alpha}{d\tau} &= -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha x^\beta x^\gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ — символы Кристоффеля, p^α — 4-импульс фотона, τ — аффинный параметр. В статье [8] приведены метрические коэффициенты и символы Кристоффеля для метрики Лами (1) с функцией вида (2). Ниже мы покажем образы черных дыр и кротовых нор, полученные путем численного решения восьми уравнений (3). Качественно распространение фотонов в метрике Лами, по аналогии в метрике Керра, можно описать с помощью радиального и углового потенциала вида [3]

$$R(r) = (r^2 + a^2 - aL)^2 - \Delta (Q + (L - a)^2), \quad (4)$$

$$\Theta(\theta) = Q + \cos^2 \theta \left(a^2 - \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right), \quad (5)$$

где L — угловой момент фотона, Q — постоянная Картера. В метрике Керра ($b = 0$) радиальный

потенциал является полиномом четвертого порядка относительно радиальной координаты. В метрике Лами данный потенциал является полиномом седьмого порядка [6] и, как было показано в работе [6], некоторые фотонные траектории могут иметь более одной радиальной точки поворота.

Для определения положения образа на экране наблюдателя вводятся декартовы координаты (α, β) , впервые введенные в работе [9]. Эти координаты связывают сохраняющиеся параметры фотона (L, Q) с положением на экране наблюдателя:

$$\alpha = -\frac{L}{\sin \theta_o}, \quad \beta = \pm \sqrt{\Theta(\theta_o)}, \quad (6)$$

где θ_o — угол наклона наблюдателя к оси вращения черной дыры или кротовой норы. Таким образом, зная положение фотона на экране наблюдателя, можно определить параметры фотона (L, Q) , а следовательно, и положение источника фотона в диске.

Для построения карт поляризации нас будет, в первую очередь, интересовать поляризация фотона. Для вычисления изменения поляризации при движении фотона в сильном гравитационном поле воспользуемся постоянными Уокера–Пенроуза [10]. Для этого нам необходимо показать, что метрика Лами относится к типу D по квалификации Петрова [10]. Чтобы это показать, воспользуемся формализмом Ньюмена–Пенроуза. Данный формализм является тетрадным формализмом в изотропном базисе, состоящем из четверки изотропных векторов $(\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{m}^*)$ [10]. В Приложении задается четверка изотропных векторов, удовлетворяющих условиям ортогональности, изотропности и условию нормировки. Также выписываются коэффициенты вращения Риччи в метрике Лами, которые в данном формализме называются спинными коэффициентами [10]. В силу того, что спинные коэффициенты в метрике Лами

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \varepsilon = 0 \quad (7)$$

равны нулю (см. Приложение), из следствия теоремы Гольдберга–Сакса следует, что метрика Лами относится к типу D по классификации Петрова [10]. Также в Приложении выписан не равный нулю вейлевский скаляр Ψ_2 . Все эти величины нам понадобятся для вычисления постоянных Уокера–Пенроуза.

Переходим к вычислению изменения вектора поляризации фотона при движении в искривленном пространстве-времени [10]. Пусть f^μ — 4-

вектор поляризации фотона, который ортогонален 4-импульсу фотона p^μ , т. е.

$$f^\mu p_\mu = 0,$$

и параллельно переносится вдоль фотонной траектории, т. е.

$$p^\mu \nabla_\mu f^\nu = 0.$$

Тогда величина

$$K_s = -p^i f^j (l_i n_j - l_j n_i - m_i m_j^* + m_i^* m_j) \Psi_2^{-1/3} \quad (8)$$

остаётся постоянной вдоль геодезической [10]. Величина

$$K_s = K_2 + iK_1$$

является постоянной комплексной величиной и называется постоянной Уокера–Пенроуза. Существование этой постоянной позволяет вычислить изменение 4-вектора поляризации вдоль траектории фотона и сравнить значения поляризации для случаев метрики черной дыры и кротовой норы. Для этого нам необходимо связать величины f и p возле наблюдателя и источника. Вводим обозначения

$$A = p^t f^r - p^r f^t + a \sin^2 \theta (p^r f^\phi - p^\phi f^r), \quad (9)$$

$$B = \sin \theta [(p^\phi f^\theta - p^\theta f^\phi)(r^2 + a^2) - a(p^t f^\theta - p^\theta f^t)]. \quad (10)$$

Тогда выражение (8) можно переписать в виде

$$K_2 + iK_1 = -(A - iB) \Psi_2^{-1/3}. \quad (11)$$

Значения 4-импульса в любой точке пространства-времени задается в Приложении формулами (38). Задавая начальное магнитное поле в точке излучения и вычисляя значения постоянных K_1 и K_2 , можно определить значения 4-вектора поляризации в точке наблюдателя, а следовательно, и параметры Стокса (см. (53) и (54)).

Другой важной величиной является коэффициент разложения линейной поляризации β_m , введенной в работе [11]:

$$\begin{aligned} \beta_m &= \frac{1}{I_{ann}} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \int_0^{2\pi} P(\rho, \phi) P_m^*(\phi) \rho d\rho d\phi = \\ &= \frac{1}{I_{ann}} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \int_0^{2\pi} P(\rho, \phi) e^{-im\phi} \rho d\rho d\phi, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$I_{ann} = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \int_0^{2\pi} I(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi, \quad (13)$$

$$P(\rho, \phi) = Q(\rho, \phi) + iU(\rho, \phi). \quad (14)$$

Здесь Q и U — параметры Стокса линейной поляризации, (ρ, ϕ) — полярные координаты на экране наблюдателя, звездочка «*» означает комплексное сопряжение, I_{ann} — интенсивность излучения. Без потери общности положим величину I_{ann} равной единице, $I_{ann} = 1$. Обозначим суммарную линейную поляризацию как

$$LP = \sqrt{Q^2 + U^2},$$

а положения угла электрического вектора как

$$EVPA = \frac{1}{2} \arctg \frac{U}{Q}. \quad (15)$$

В следующем разделе мы представим карты суммарной линейной поляризации и положения угла электрического вектора для радиального и тороидального магнитных полей в тонком диске, расположенном в экваториальной плоскости черной дыры или кротовой норы, и сравним полученные результаты.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе мы обсудим разницу в картах линейной поляризации и положения угла электрического вектора для черной дыры и кротовой норы на примере метрики Лами.

Будем предполагать, что источником излучения фотонов является тонкий диск, расположенный в экваториальной плоскости черной дыры (кротовой норы), который излучает изотропно во все стороны. Тонкий диск пронизывает радиальное или тороидальное магнитное поле. Внутренний радиус диска задавался равным $r_{in} = 8$. Параметр вращения в метрике Лами задавался равным $a = 0.9$, а магнитный заряд — равным $b = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 2.0$. Случай, когда $b \lesssim 0.245$, соответствует черной дыре, а случай, когда $b \gtrsim 0.245$, — кротовой норе (см. рис. 4 из работы [6]). Величина 0.245 определяется численно из уравнения $\Delta = 0$ для спина $a = 0.9$. Наблюдатель расположен на расстоянии $r_o = 50$ от черной дыры (кротовой норы) под углом $i = 17^\circ, 45^\circ, 80^\circ$ к оси вращения черной дыры (кротовой норы). Для построения карт поляризации использовался метод

обратной трассировки лучей. Уравнения геодезических (3) решались численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Все карты поляризации показаны в масштабе от -10 до 10 в единицах Gm/c^2 и с разрешением 2500×2500 пикселей. Образы интенсивности для тех же параметров метрики показаны на рис. 3 в статье [8].

На рис. 1 и 2 показаны карты линейной поляризации для начального распределения радиального и тороидального магнитных полей соответственно. Цветом показан модуль линейной поляризации, величина LP. Зелеными стрелками показано направление электрического вектора линейной поляризации. Длина стрелки пропорциональна величине линейной поляризации. Три верхних рисунка соответствуют черной дыре, остальные — кротовой норе. Рисунки слева направо для разных углов наклона наблюдателя относительно оси вращения черной дыры (кротовой норы), $i = 17^\circ, 45^\circ, 80^\circ$. Рисунки сверху вниз для разных величин магнитного заряда, $b = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 2.0$.

Из сравнения линейной поляризации для черных дыр и кротовых нор можно сделать следующие выводы. Линейная поляризация в фотонных кольцах для кротовых нор имеет большие значения, чем в диске. Это связано с тем, что для некоторых фотонов круговые орбиты расположены ближе к центру и, следовательно, гравитационное поле будет намного сильнее искривлять траекторию движения, а значит, и величину линейной поляризации. Данное утверждение справедливо как для радиального, так и для тороидального распределения магнитного поля в диске. Направления линейной поляризации (на рисунках обозначены зелеными стрелками) в фотонных кольцах будут приблизительно взаимно перпендикулярны для радиального и тороидального магнитных полей в случае, когда наблюдатель расположен под углом $i = 17^\circ$ к оси вращения черной дыры или кротовой норы. В случае, когда наблюдатель расположен под углом $i = 45^\circ$ или $i = 80^\circ$, угол между направлениями линейной поляризации для начального радиального и тороидального магнитных полей будет увеличиваться.

На рис. 3 и 4 показаны карты положения угла электрического вектора линейной поляризации для начального распределения радиального и тороидального магнитных полей соответственно. Цветом показана величина положения угла электрического вектора. Угол меняется от -90° до 90° . Сравнивая карты положения угла электрического вектора, можно сделать следующие выводы. Величина положения угла электрического вектора для радиально-

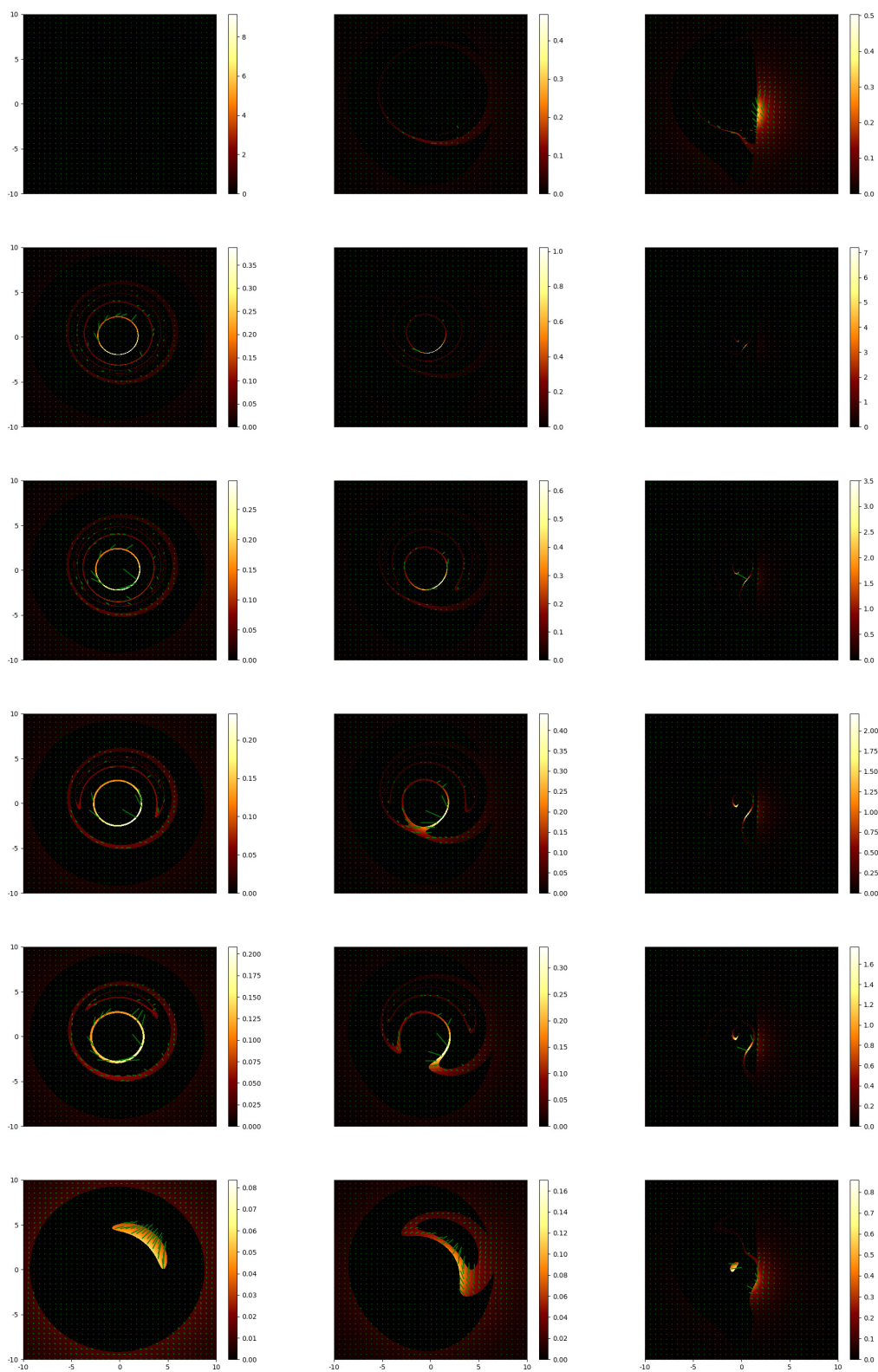


Рис. 1. Карта суммарной линейной поляризации (показана цветом) LP для начального радиального распределения магнитного поля вокруг черной дыры и кротовой норы. Слева направо углы наклона равны $i = 17^\circ, 45^\circ, 80^\circ$. Сверху вниз магнитный заряд равен $b = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 2.0$. Масштаб карт от $-10 Gm/c^3$ до $10 Gm/c^3$

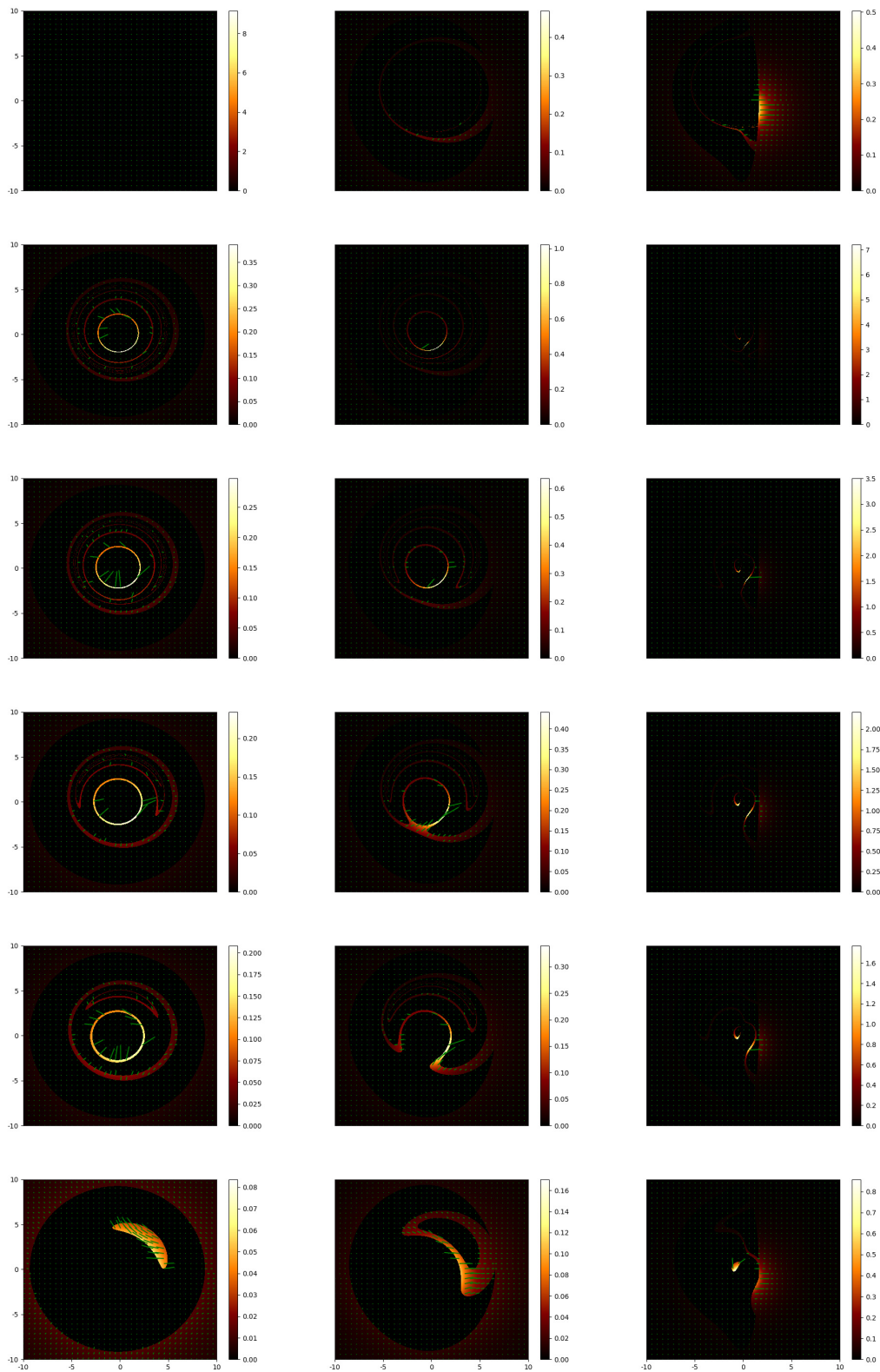


Рис. 2. Карта суммарной линейной поляризации (показана цветом) LP для начального тороидального распределения магнитного поля вокруг черной дыры или кротовой норы. Слева направо углы наклона равны $i = 17^\circ, 45^\circ, 80^\circ$. Сверху вниз магнитный заряд равен $b = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 2.0$. Масштаб карт от $-10 Gm/c^3$ до $10 Gm/c^3$

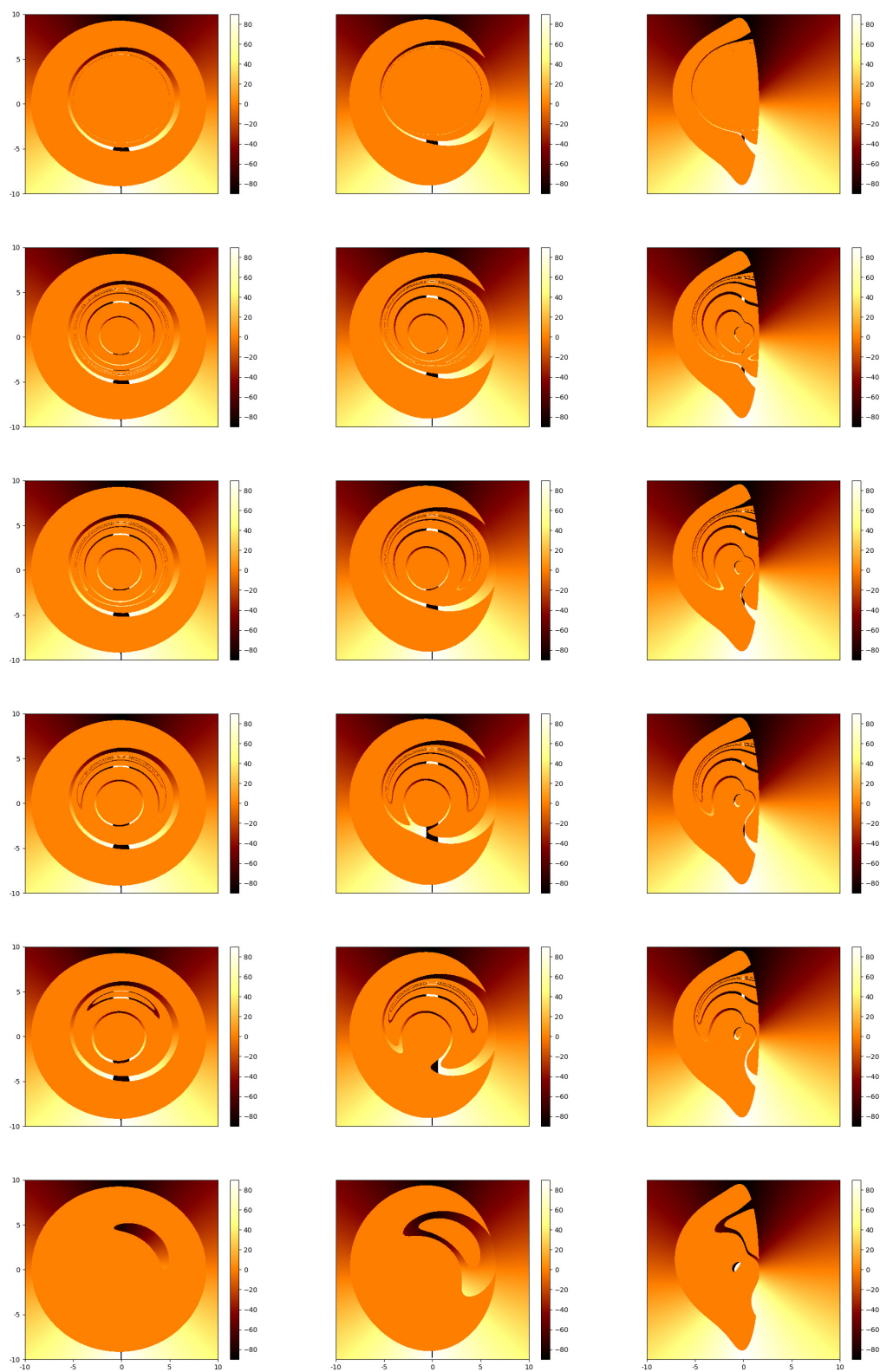


Рис. 3. Карта положения угла электрического вектора (показана цветом) для начального радиального распределения магнитного поля вокруг черной дыры или кротовой норы. Слева направо углы наклона равны $i = 17^\circ, 45^\circ, 80^\circ$. Сверху вниз магнитный заряд равен $b = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 2.0$. Масштаб карт от $-10 Gm/c^3$ до $10 Gm/c^3$

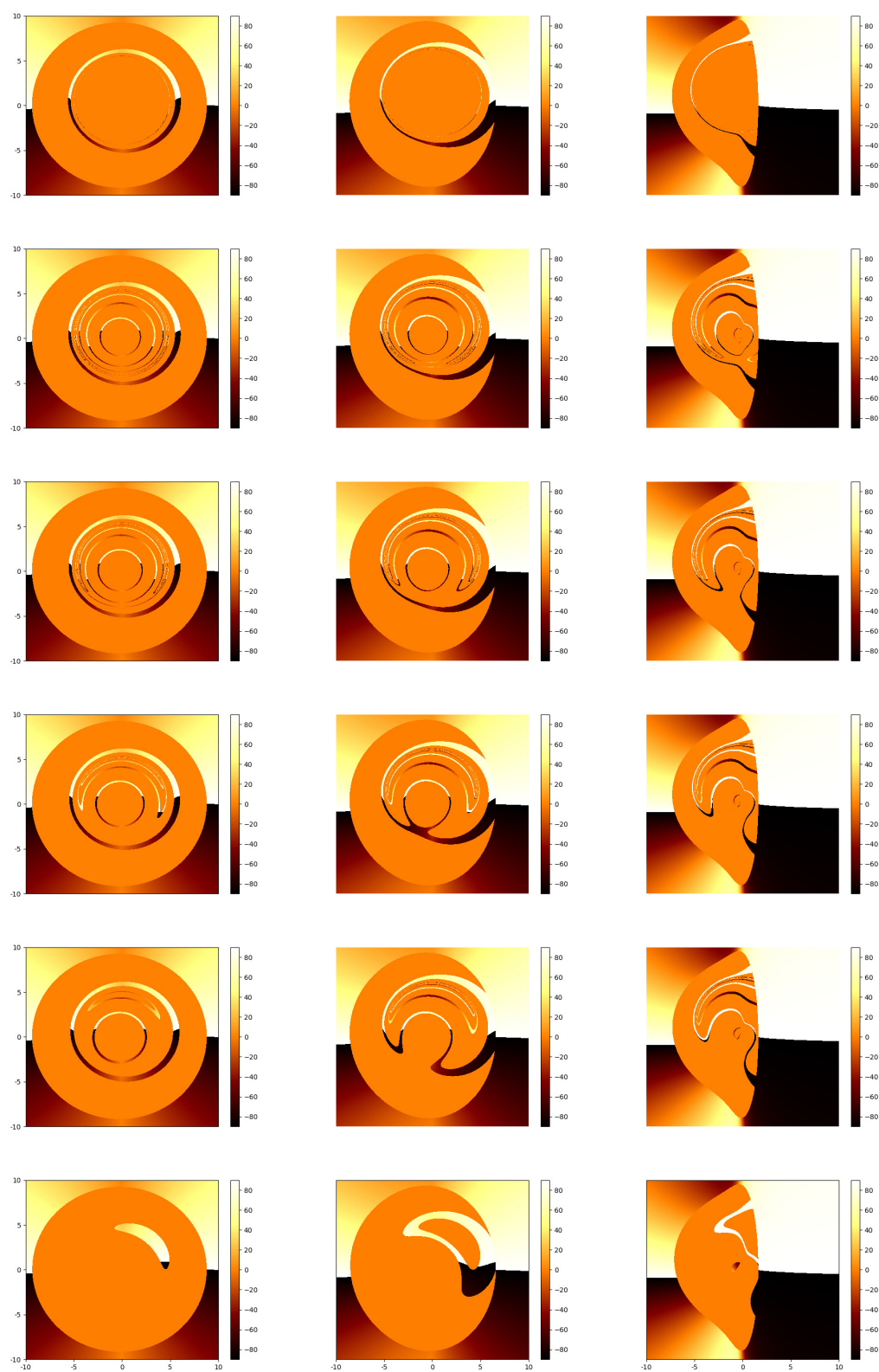


Рис. 4. Карта положения угла электрического вектора (показана цветом) для начального тороидального распределения магнитного поля вокруг черной дыры или кротовой норы. Слева направо углы наклона равны $i = 17^\circ, 45^\circ, 80^\circ$. Сверху вниз магнитный заряд равен $b = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 2.0$. Масштаб карт от $-10 Gm/c^3$ до $10 Gm/c^3$

го магнитного поля в диске отличается приблизительно на 90° от соответствующей величины для тороидального магнитного поля в диске. Таким образом, по картам положения угла электрического вектора можно определять направления магнитного поля в диске, т. е. восстанавливать топологию магнитного поля.

На рис. 5 и 6 показаны зависимости абсолютной величины параметра $|\beta_2|$ от величины магнитного заряда при различных углах наклона наблюдателя к оси вращения черной дыры или кротовой норы для случаев радиального (рис. 5) и тороидального (рис. 6) магнитных полей в диске. Черная сплошная кривая соответствует случаю, когда наблюдатель расположен под углом $i = 17^\circ$ к оси вращения черной дыры или кротовой норы, синяя штрихпунктирная кривая — случаю, когда $i = 45^\circ$, а зеленая штриховая кривая — случаю, когда $i = 80^\circ$. Красная вертикальная линия определяет границу между черной дырой (слева) и кротовой норой (справа). На рис. 5 и 6 видно, что β_2 остается постоянной величиной для черных дыр и меняется скачкообразно на границе между черной дырой и кротовой норой. Для радиального магнитного поля в диске абсолютная величина $|\beta_2|$ для черной дыры будет меньше, чем для кротовой норы. Для тороидального распределения магнитного поля в диске ситуация зависит от наклона наблюдателя к оси вращения черной дыры (кротовой норы). Для наклона $i = 17^\circ$ и $i = 45^\circ$ абсолютная величина $|\beta_2|$ для черной дыры будет меньше, чем для кротовой норы, а для наклона $i = 80^\circ$ — ситуация обратная. Зная угол наклона наблюдателя к оси вращения источника (черной дыры или кротовой норы), распределение магнитного поля в диске и измеряя абсолютную величину $|\beta_2|$ линейной поляризации, можно сделать вывод о том, является ли источник черной дырой или кротовой норой.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе численно исследовались поляризационные свойства черных дыр и кротовых нор на примере метрики Лами. Данная метрика с хорошей точностью воспроизводит метрику вращающейся черной дыры Керра при малых магнитных зарядах и вращающуюся кротовую нору в противном случае. С помощью метода обратной трассировки лучей были построены карты линейной поляризации и положения угла электрического вектора как для случая черной дыры, так и для случая кротовой норы. Ис-

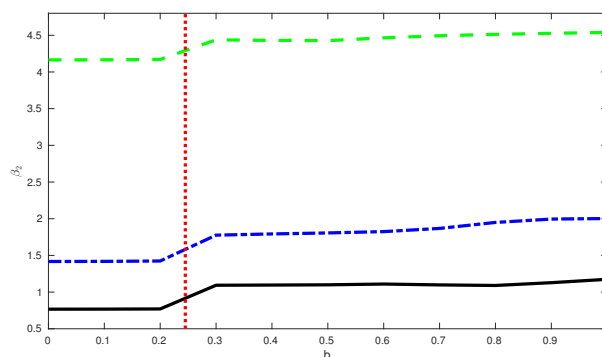


Рис. 5. Зависимости абсолютной величины параметра $|\beta_2|$ от магнитного заряда для радиального магнитного поля в диске. Сплошная черная кривая соответствует случаю, когда наблюдатель расположен под углом $i = 17^\circ$ к оси вращения черной дыры или кротовой норы, синяя штрихпунктирная кривая — случаю $i = 45^\circ$, а зеленая штриховая кривая — случаю $i = 80^\circ$. Красная вертикальная пунктирная линия соответствует границе между черной дырой (слева) и кротовой норой (справа)

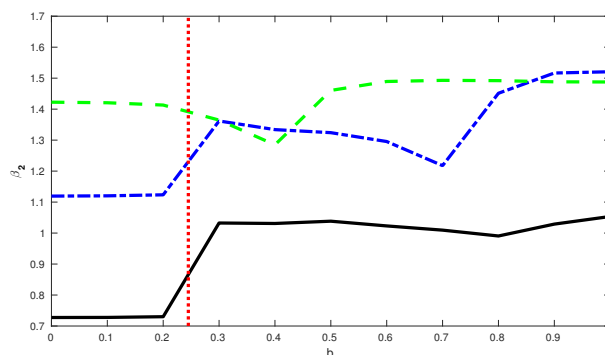


Рис. 6. Зависимости абсолютной величины параметра $|\beta_2|$ от магнитного заряда для тороидального магнитного поля в диске. Сплошная черная кривая соответствует случаю, когда наблюдатель расположен под углом $i = 17^\circ$ к оси вращения черной дыры или кротовой норы, синяя штрихпунктирная кривая — случаю $i = 45^\circ$, а зеленая штриховая — случаю $i = 80^\circ$. Красная вертикальная пунктирная линия соответствует границе между черной дырой (слева) и кротовой норой (справа)

точник излучения фотонов задавался в виде тонкого диска с тороидальным или радиальным магнитным полем. Были построены карты линейной поляризации и положения угла электрического вектора. Была построена зависимость коэффициента разложения $|\beta_2|$ линейной поляризации от величины магнитного заряда для разных значений углов наклона наблюдателя к оси вращения черной дыры (крото-

вой норы) и начального распределения магнитного поля. Был предложен критерий отличия черной дыры от кротовой норы по линейной поляризации. Измеряя линейную поляризацию, можно восстановить топологию магнитного поля, вычислить коэффициент разложения $|\beta_2|$ и, зная наклонение, можно установить, является ли источник черной дырой или кротовой норой.

Изучение альтернативных геометрий пространства-времени, отличающихся от вращающейся черной дыры Керра, оказывается особенно своевременным в связи с последними результатами группы Телескопа горизонта событий. Полученные образы центра галактик в M87* и SGR A* открыли новые тесты общей теории относительности в сильном гравитационном поле. Сходство образов черных дыр, бозонных звезд, кротовых нор и других объектов побуждает исследователей более подробно изучать альтернативные геометрии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В формализме Ньюмена – Пенроуза вводится четыре изотропных вектора $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}^*$, которые удовлетворяют следующим условиям [10]: условию ортогональности

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}^* = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}^* = 0, \quad (16)$$

условию изотропности

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{m}^* = 0 \quad (17)$$

и условию нормировки

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^* = -1, \quad (18)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. По аналогии с черной дырой Керра можно показать, что в метрике Лами следующая четверка векторов удовлетворяет приведенным выше соотношениям:

$$l^\alpha = \frac{1}{\Delta}(r^2 + a^2, \Delta, 0, a), \quad (19)$$

$$n^\alpha = \frac{1}{2\Sigma}(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \quad (20)$$

$$m^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\bar{\rho}} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right), \quad (21)$$

$$m^{\alpha*} = \frac{1}{\sqrt{2}\bar{\rho}^*} \left(-ia \sin \theta, 0, 1, \frac{-i}{\sin \theta} \right). \quad (22)$$

Для выбранной четверки изотропных векторов ненулевые λ -символы (определение λ -символов см. в [10]) определяются следующими соотношениями:

$$\lambda_{(1)(2)(2)} = - \left(\frac{r - M - rM'}{\Sigma} - \frac{r\Delta}{\Sigma^2} \right), \quad (23)$$

$$\lambda_{(1)(3)(2)} = \frac{\sqrt{2}ira \sin \theta}{\bar{\rho}\Sigma}, \quad \lambda_{(1)(3)(4)} = \frac{1}{\bar{\rho}^*}, \quad (24)$$

$$\lambda_{(1)(4)(2)} = -\frac{\sqrt{2}ira \sin \theta}{\bar{\rho}^*\Sigma}, \quad \lambda_{(1)(4)(3)} = \frac{1}{\bar{\rho}}, \quad (25)$$

$$\lambda_{(2)(1)(3)} = -\frac{\sqrt{2}a^2 \sin \theta \cos \theta}{\bar{\rho}\Sigma}, \quad (26)$$

$$\lambda_{(2)(1)(4)} = -\frac{\sqrt{2}a^2 \sin \theta \cos \theta}{\bar{\rho}^*\Sigma}, \quad (27)$$

$$\lambda_{(2)(3)(4)} = -\frac{\Delta}{2\Sigma\bar{\rho}^*}, \quad \lambda_{(2)(4)(3)} = -\frac{\Delta}{2\Sigma\bar{\rho}}, \quad (28)$$

$$\lambda_{(3)(1)(4)} = -\frac{2ia \cos \theta}{\Sigma}, \quad (29)$$

$$\lambda_{(3)(2)(4)} = -\frac{ia\Delta \cos \theta}{\Sigma^2}, \quad \lambda_{(3)(3)(4)} = \frac{r \cos \theta + ia}{\sqrt{2} \sin \theta \bar{\rho}^2}, \quad (30)$$

$$\lambda_{(3)(4)(4)} = \frac{ia - r \cos \theta}{\sqrt{2} \sin \theta \bar{\rho}^{*2}}. \quad (31)$$

Спиновые коэффициенты (определение спиновых коэффициентов см. в [10]) в метрике Лами равны

$$\kappa = \sigma = \nu = \lambda = \varepsilon = 0, \quad (32)$$

$$\mu = -\frac{\Delta}{2\Sigma\bar{\rho}^*}, \quad \pi = \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}\bar{\rho}^{*2}}, \quad (33)$$

$$\tau = -\frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma}, \quad \rho = -\frac{1}{\bar{\rho}^*}, \quad (34)$$

$$\beta = \frac{\cos \theta}{2\sqrt{2} \sin \theta \bar{\rho}}, \quad \alpha = \pi - \beta^*, \quad (35)$$

$$\gamma = \mu + \frac{r - M - rM'}{2\Sigma}. \quad (36)$$

Можно заметить, что только спиновый коэффициент γ в метрике Лами отличается от спинового коэффициента γ в метрике Керра.

Вейлевский скаляр Ψ_2 в метрике Лами отличен от нуля и равен

$$\Psi_2 = -\frac{M}{(r - ia \cos \theta)^3} + rM' \frac{r + ia \cos \theta}{\Sigma^2}. \quad (37)$$

В случае, когда $b = 0$, данное выражение переходит в вейлевский скаляр Ψ_2 в метрике Керра.

Уравнения движения фотона в пространстве-времени метрики Лами в координатах Бойера–Линдквиста имеют такой же вид, как и в метрике Керра:

$$\begin{aligned}\Sigma p^t &= \frac{r^2 + a^2}{\Delta}(r^2 + a^2 - aL) - a^2 \sin^2 \theta + aL, \\ \Sigma p^r &= \sqrt{(r^2 + a^2 - aL)^2 - \Delta(Q + (a - L)^2)}, \\ \Sigma p^\theta &= \sqrt{Q + a^2 \cos^2 \theta - L^2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}}, \\ \Sigma p^\phi &= \frac{a}{\Delta}(r^2 + a^2 - aL) + \frac{L}{\sin^2 \theta} - a.\end{aligned}\quad (38)$$

Напомним, что в величину Δ входит параметр (2).

Физические величины задаются с помощью введения ортонормированной тетрады. Зададим ортонормированную тетраду вида (см. [10])

$$\begin{aligned}e_{(t)}^\alpha &= (e^{-\nu}, \omega e^{-\nu}, 0, 0), \\ e_{(r)}^\alpha &= (0, e^{-\mu_2}, 0, 0), \\ e_{(\theta)}^\alpha &= (0, 0, e^{-\mu_3}, 0), \\ e_{(\phi)}^\alpha &= (0, 0, 0, e^{-\psi}),\end{aligned}\quad (39)$$

где метрические коэффициенты $e^\nu, e^\psi, e^{\mu_2}, e^{\mu_3}, \omega$ задаются в Приложении статьи [8]. Индекс в круглых скобках обозначает тетрадный индекс.

Мы связываем величины в тетрадном базисе с величинами в координатах Бойера–Линдквиста посредством соотношений

$$f^\alpha = e_{(a)}^\alpha f^{(a)}, \quad p^{(a)} = e_\alpha^{(a)} p^\alpha.$$

В развернутом виде имеем

$$f^t = e^{-\nu} f^{(t)}, \quad p^{(t)} = e^\nu p^t, \quad (40)$$

$$f^r = e^{-\mu_2} f^{(r)}, \quad p^{(r)} = e^{\mu_2} p^r, \quad (41)$$

$$f^\theta = e^{-\mu_3} f^{(\theta)}, \quad p^{(\theta)} = e^{\mu_3} p^\theta, \quad (42)$$

$$f^\phi = e^{-\psi} f^{(\phi)} + \omega e^{-\nu} f^{(t)}, \quad p^{(\phi)} = e^\psi p^\phi - \omega e^\psi p^t. \quad (43)$$

4-вектор поляризации выражается через магнитное поле в тетрадном базисе посредством формул

$$f^{(t)} = 0, \quad (44)$$

$$f^{(r)} \propto p^{(\phi)} B^{(\theta)} - p^{(\theta)} B^{(\phi)}, \quad (45)$$

$$f^{(\theta)} \propto p^{(r)} B^{(\phi)} - p^{(\phi)} B^{(r)}, \quad (46)$$

$$f^{(\phi)} \propto p^{(\theta)} B^{(r)} - p^{(r)} B^{(\theta)}. \quad (47)$$

Радиальное поле соответствует случаю

$$B^{(r)} = 1, \quad B^{(\theta)} = B^{(\phi)} = 0,$$

тороидальное поле — случаю

$$B^{(\phi)} = 1, \quad B^{(r)} = B^{(\theta)} = 0.$$

Без потери общности мы положили, что $f^{(t)} = 0$. Задавая магнитное поле, можно определить 4-вектор поляризации в источнике излучения $f^{(a)}$ и с помощью постоянных Уокера–Пенроуза найти поляризацию в точке наблюдения. На бесконечности $r \rightarrow \infty$ значения 4-импульса фотона равны

$$p^t \rightarrow 1, \quad p^r \rightarrow 1, \quad p^\phi \rightarrow \frac{\lambda}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (48)$$

$$p^\theta \rightarrow \frac{\sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta - \lambda^2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}}}{r^2}, \quad (49)$$

а 4-векторы поляризации выражаются через постоянные Уокера–Пенроуза следующим образом:

$$\sin \theta_0 f^\phi = -\frac{1}{r} \frac{K_1 D_1 + K_2 D_2}{\eta + (a - \lambda)^2}, \quad (50)$$

$$f^\theta = \frac{1}{r} \frac{K_1 D_2 - K_2 D_1}{\eta + (a - \lambda)^2}, \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned}D_1 &= \sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta_0 - \lambda^2 \frac{\cos^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0}}, \\ D_2 &= \frac{\lambda}{\sin \theta_0} - a \sin \theta_0.\end{aligned}\quad (52)$$

Электрическое поле выражается через 4-векторы поляризации следующим образом:

$$E^\phi = -r \sin \theta_0 f^\phi, \quad E^\theta = -r f^\theta. \quad (53)$$

Параметры Стокса линейной поляризации определяются как

$$Q = E^{\phi^2} - E^{\theta^2}, \quad U = -2E^\phi E^\theta. \quad (54)$$

Чтобы вычислить коэффициент разложения β_m , в интеграле

$$\beta_m = \int_0^{\rho_{max}} \int_0^{2\pi} P(\rho, \phi) e^{-im\phi} \rho d\rho d\phi \quad (55)$$

сделаем замену переменных от полярных координат к декартовым:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \text{tg } \phi = \frac{y}{x}.$$

Якобиан преобразования равен

$$J = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \beta_m &= \int_{-10}^{10} \int_{-10}^{10} P(x, y) e^{-im \arctg \frac{y}{x}} dx dy = \\ &= \int_{-10}^{10} \int_{-10}^{10} \left[Q \cos m\phi + U \sin m\phi + \right. \\ &\quad \left. + i(U \cos m\phi - Q \sin m\phi) \right] dx dy, \end{aligned} \quad (56)$$

где пределы интегрирования определяются размерами карт поляризации (см. рис. 1–4). Коэффициент β_2 равен

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \int_{-10}^{10} \int_{-10}^{10} \left[Q \cos 2\phi + U \sin 2\phi + \right. \\ &\quad \left. + i(U \cos 2\phi - Q \sin 2\phi) \right] dx dy, \end{aligned} \quad (57)$$

откуда легко получить

$$\cos 2\phi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \phi}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (58)$$

$$\sin 2\phi = \frac{2 \operatorname{tg} \phi}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}. \quad (59)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. The Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L1 (2019).
2. The Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **930**, L12 (2022).
3. С. В. Чернов, *Астрон. ж.* **98**, 132 (2021).
4. The Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **910**, L12 (2021).
5. The Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **910**, L13 (2021).
6. F. Lamy et al., *Class. Quant. Grav.* **35**, 115009 (2018).
7. Z.-Y. Fan and X. Wang, *Phys. Rev. D* **94**, 124027 (2016).
8. С. В. Чернов, *Астрон. ж.* **100**, 693 (2023).
9. C. T. Cunningham and J.M. Bardeen, *Astrophys. J.* **173**, L137 (1972).
10. С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, Мир, Москва (1986).
11. D. C. M. Palumbo, G. N. Wong, and B. S. Prather, *Astrophys. J.* **894**, 156 (2020).