ЖЭТФ, 2024, том 165, вып. 4, стр. 558–571

О РЕШЕНИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Б. Я. Балагуров *

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 ноября 2023 г.,
после переработки 3 декабря 2023 г.
Принята к публикации 3 декабря 2023 г.

Дана последовательная схема решения различных электростатических задач, связанных с макроскопическим телом произвольной формы, методом собственных функций. Рассмотрены основные свойства собственных функций — регулярных решений уравнения Лапласа — вне, внутри и на поверхности тела. В предположении о полноте системы собственных функций на поверхности тела найдено общее выражение для электростатической функции Грина и дано решение краевых задач Дирихле и Неймана, как внешних, так и внутренних.

DOI: 10.31857/S0044451024040102

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи макроскопической электростатики сводятся, в основном, к определению создаваемых внешними зарядами и полями потенциалов, обусловленных наличием диэлектрических и проводящих тел [1–4]. Это, например, вычисление тензора дипольной поляризуемости макроскопических тел, а также более сложная задача о функции Грина, дающей потенциал, создаваемый точечным зарядом в присутствии таких тел. К этим же проблемам относятся краевые (граничные) задачи Дирихле и Неймана, обычно включаемые в соответствующий раздел математической физики [5, 6]. Решение этих задач зачастую требует привлечения довольно сложного математического аппарата и включается, как правило, в раздел Специальные методы электростатики. При рассмотрении каждого конкретного тела заданной формы используется индивидуальный подход, например, определенная система криволинейных координат. Однако, полученный таким способом результат не может быть перенесен на случай тел другой формы, что существенно сужает область применимости традиционных методов электростатики. Представляет интерес поэтому поиск метода решения подобных электростатических задач, применимого к телам произвольной формы. Попытки поиска таких подходов предпринимались ранее в работах [7–9], однако они оказались слишком сложными и громоздкими.

В настоящей работе предлагается метод решения различных электростатических задач, не связанный с применением конкретных систем координат. С этой целью вводятся собственные функции задачи — регулярные решения уравнения Лапласа. Исследуются основные свойства этих функций вне, внутри тела и на его поверхности. Устанавливается связь объемных (вне поверхности S) собственных функций с их значениями на поверхности тела. Основным предположением излагаемого метода является полнота системы собственных функций на поверхности раздела S. Оказывается, что система поверхностных собственных функций состоит из двух подсистем — значений самих функций (потенциалов) на S и их нормальных производных. Интегралы по всей площади поверхности S тела от произведения элементов этих подсистем дают соотношения ортонормированности системы собственных функций. А билинейная комбинация элементов этих подсистем образует соотношение полноты.

Установленные в работе свойства собственных функций вместе с соотношениями ортонормированности и полноты позволяют дать последовательный метод решения различных электростатических задач. Общая схема решения таких задач представ-

* E-mail: byabalagurov@mail.ru

ляется следующей. Искомую величину $f(\mathbf{r})$, подчиняющуюся уравнению Лапласа, необходимо выразить через ее значение $F(\boldsymbol{\rho})$ на поверхности тела S (здесь $\boldsymbol{\rho}$ — радиус–вектор точки, принадлежащей к S). Далее предельным переходом $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\rho}$ находится уравнение для $F(\boldsymbol{\rho})$. Полученное уравнение решается путем разложения $F(\boldsymbol{\rho})$ в ряд по одной из подсистем поверхностных собственных функций. По найденной таким образом величине $F(\boldsymbol{\rho})$ определяется искомая функция $f(\mathbf{r})$.

Последовательное применение этой схемы действий позволило найти общее выражение для электростатической функции Грина. Сходным образом дано решение краевых задач Дирихле и Неймана — как внешних, так и внутренних. Рассмотрена также задача о помещенном в однородное электрическое поле теле и найден его тензор поляризуемости. Полученные в этих задачах результаты не связаны с какой–либо системой координат и справедливы для тел произвольной формы. Применение этих результатов для тела заданной формы требует определить соответствующую систему собственных функций. Если для тела заданной формы имеется адекватная система координат, то собственные функции и собственные значения могут быть найдены в аналитическом виде (см. [9–11]). В противном случае для определения собственных функций следует применить приближенные методы, например, численные.

2. СИСТЕМА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В стандартной электростатической задаче рассматривается, как правило, макроскопическое тело произвольной формы с диэлектрической проницаемостью $\epsilon^{(i)}$ в однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon^{(e)}$. Поместим начало координат в центр этого тела и введем следующие обозначения: $\mathbf{r}_e$ — радиус-вектор точки вне тела, $\mathbf{r}_i$ — внутри тела и $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки на поверхности тела S.

В отсутствие сторонних зарядов основными уравнениями электростатики являются

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0\,. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции. В (2.1)

$$\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{r})\,\mathbf{E} = -\epsilon(\mathbf{r})\,\nabla\varphi(\mathbf{r})\,, \qquad (2.2),$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ — электрический потенциал и $\epsilon(\mathbf{r})$ — зависящая от координат диэлектрическая проницаемость. Запишем $\epsilon(\mathbf{r})$ в виде

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon^{(e)}[1-(1-h)\theta(\mathbf{r})]\,, \quad h = \frac{\epsilon^{(i)}}{\epsilon^{(e)}}\,, \tag{2.3}$$

причем

$$\theta(\mathbf{r}_i) = 1, \quad \theta(\mathbf{r}_e) = 0.$$

Поэтому потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ подчиняется уравнению

$$\nabla\{[1-(1-h)\theta(\mathbf{r})]\nabla\varphi(\mathbf{r})\} = 0\,, \tag{2.4}$$

так что потенциал как вне тела, так и внутри него, подчиняется уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = 0\,, \quad \nabla^2\varphi^{(i)}(\mathbf{r}) = 0\,, \tag{2.5}$$

где

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}_e), \quad \varphi^{(i)}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}_i).$$

На поверхности тела (на границе раздела) при $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ должны выполняться следующие условия:

$$\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = \varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})\,, \quad \chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = h\,\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})\,. \tag{2.6}$$

Здесь

$$\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{n}\cdot\nabla\varphi^{(e)}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}, \tag{2.7.1}$$

$$\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{n}\cdot\nabla\varphi^{(i)}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}} \tag{2.7.2}$$

— нормальные производные потенциала на внешней и внутренней поверхности раздела, вектор $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности тела.

Вычисление потенциала, подчиняющегося уравнениям (2.5) с граничными условиями (2.6) при некоторых дополнительных требованиях к $\varphi(\mathbf{r})$ или его нормальной производной и является одной из основных задач макроскопической электростатики. Для решения этой и некоторых других задач введем систему собственных функций, связанных с телом заданной формы.

2.1. Поляризационные функции

В электростатической задаче той же, что и выше, геометрии поляризационные собственные функции $\psi_\nu(\mathbf{r})$ являются решениями уравнения Лапласа вне и внутри тела:

$$\nabla^2\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) = 0\,, \quad \nabla^2\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{2.8}$$

На поверхности тела (на границе раздела) эти функции подчиняются следующим условиям

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}: \quad \psi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = \psi_\nu^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\,, \tag{2.9}$$

$$\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = -\varepsilon_\nu\, \Phi_\nu^{(i)}(\boldsymbol{\rho})\,, \tag{2.10}$$

где

$$\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{n}\cdot\nabla\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}, \tag{2.11.1}$$

$$\Phi_\nu^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{n}\cdot\nabla\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}\,. \tag{2.11.2}$$

Здесь, как и в (2.7), $\mathbf{n}$ — орт внешней к поверхности тела нормали.

Внутри тела функция $\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})$ регулярна при $r\to 0$, а вне тела $\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})$ обращается в нуль при $r\to\infty$. В формуле (2.10) ε_ν — собственные значения задачи, которые, как будет показано далее, положительны

$$\varepsilon_\nu > 0\,. \tag{2.12}$$

Проинтегрируем второе уравнение из (2.8) по объему тела v:

$$\int\limits_v \nabla^2\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int\limits_S \Phi_\nu^{(i)}(\boldsymbol{\rho})\,dS = \int \Phi_\nu^{(i)}(\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\rho} = 0\,, \tag{2.13}$$

где $dS = d\boldsymbol{\rho}$ — элемент площади. Интеграл по $d\boldsymbol{\rho}$, как и по dS, распространяется на всю площадь поверхности тела. В (2.13) при переходе от интегрирования по объему к интегрированию по поверхности, ограничивающей этот объем, использована формула Остроградского–Гаусса. Та же формула применяется и при обратной операции — переход от поверхностного интегрирования к объемному. Из (2.13) следует, что

$$\int \sigma_\nu(\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\rho} = 0\,, \quad \sigma_\nu(\boldsymbol{\rho}) \propto \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\,. \tag{2.14}$$

Здесь $\sigma_\nu(\boldsymbol{\rho})$ — плотность поверхностного заряда в состоянии ν (см. формулу (3.30)), так что соответствующий полный заряд поляризационного состояния равен нулю. Интегрирование первого уравнения из (2.8) по объему вне тела V_e также должно привести к результату, (2.14). При этом интеграл по V_e преобразовывается в интегралы по поверхности тела S и по сфере радиуса R с последующим предельным переходом $R\to\infty$. Интеграл по сфере бесконечного радиуса равен нулю, если функция $\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})$ убывает следующим образом

$$r\to\infty:\quad \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r^k}\,, \quad k\geqslant 2\,. \tag{2.15}$$

Оказывается таким образом, что поляризационные собственные функции имеют мультипольную асимптотику.

Нетрудно видеть, что как вне тела, так и внутри него, выполняется равенство

$$\nabla\big\{\psi_\nu(\mathbf{r})\nabla\psi_\mu(\mathbf{r}) - \psi_\mu(\mathbf{r})\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})\big\} = 0\,. \tag{2.16}$$

Интегрируя равенство (2.16) по объему вне тела V_e, получим

$$-\int\big\{\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\mu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) - \Psi_\mu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\big\}d\boldsymbol{\rho} =$$

$$= \varepsilon_\mu\int\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\mu^{(i)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} - \varepsilon_\nu\int\Psi_\mu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\nu^{(i)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = 0\,. \tag{2.17}$$

Отсюда, с учетом равенств

$$\int\limits_v \nabla\psi_\nu(\mathbf{r})\nabla\psi_\mu(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\mu^{(i)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} =$$

$$= \int\Psi_\mu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\nu^{(i)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}\,, \tag{2.18}$$

следует

$$(\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu)\int\limits_v \nabla\psi_\mu(\mathbf{r})\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})d\mathbf{r} = 0\,. \tag{2.19}$$

Аналогичным образом, интегрируя равенство (2.16) по объему тела v, получим

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_\mu} - \frac{1}{\varepsilon_\nu}\right)\int\limits_{V_e}\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})\nabla\psi_\mu(\mathbf{r})d\mathbf{r} = 0\,. \tag{2.20}$$

Таким образом, при $\varepsilon_\mu \neq \varepsilon_\nu$ интегралы от произведения $\nabla\psi_\nu\cdot\nabla\psi_\mu$ по объемам v тела, V_e вне тела и по всему пространству равны нулю. Положим поэтому

$$\int\limits_{V_e}(\nabla\psi_\nu\cdot\nabla\psi_\mu)d\mathbf{r} = \delta_{\nu\mu}\,. \tag{2.21}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{V_e}\big[\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})\big]^2 d\mathbf{r} = -\int\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} =$$

$$= \varepsilon_\nu\int\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\mu^{(i)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}\,,$$

так что

$$\int\limits_{V_e}\big[\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})\big]^2 d\mathbf{r} = \varepsilon_\nu\int\limits_v\big[\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})\big]^2 d\mathbf{r}\,. \tag{2.22}$$

Отсюда следует, в частности, что собственные значения ε_ν положительны, см.(2.12).

Из (2.21) с учетом равенства (2.22) находим

$$\int\limits_v\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})\nabla\psi_\mu(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon_\nu}\,\delta_{\nu\mu} \tag{2.23}$$

или

$$\int\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\mu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = -\delta_{\nu\mu}\,. \tag{2.24}$$

Равенство (2.24) представляет собой соотношение ортонормированности для поверхностных поляризационных собственных функций.

Отметим, что в [8, 9] выбрана другая нормировка собственных функций. Функции из [8, 9] (отметим их значком «тильда») связаны с $\psi_\nu(\mathbf{r})$ согласно (2.24), соотношением

$$\tilde{\psi}_\nu(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}}\,\psi_\nu(\mathbf{r})\,. \qquad (2.25)$$

Таким же соотношением связаны величины $\tilde{\Psi}_\nu(\boldsymbol{\rho})$, $\tilde{\Phi}^{(e)}_\nu(\boldsymbol{\rho})$ и $\tilde{\Phi}^{(i)}_\nu(\boldsymbol{\rho})$ с $\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})$, $\Phi^{(e)}_\nu(\boldsymbol{\rho})$ и $\Phi^{(i)}_\nu(\boldsymbol{\rho})$.

2.2. Зарядовые функции

Уравнение Лапласа имеет также и решение с монопольной асимптотикой, которое необходимо учитывать для полноты картины. В электростатике таким поведением при $r \to \infty$ обладает потенциал заряженного металлического тела. Этот потенциал и следует выбрать в качестве дополнительной собственной функции. Соответствующая функция $\bar{\psi}(\mathbf{r})$ (назовем ее зарядовой) вне тела удовлетворяет уравнению Лапласа и принимает постоянное значение на поверхности тела

$$\nabla^2\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) = 0\,, \quad \bar{\psi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = \bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}) = \mathrm{const}\,. \qquad (2.26)$$

На больших от тела расстояниях имеем следующую асимптотику

$$r \to \infty: \quad \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\bar{q}}{r}\,, \qquad (2.27),$$

где $\bar{q}$ — заряд тела в этом состоянии. Поэтому, интегрируя уравнение для $\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})$ из (2.26) по объему вне тела V_e, получим

$$\bar{q} = \int \bar{\sigma}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}\,, \quad \bar{\sigma}(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{1}{4\pi}\,\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\,, \qquad (2.28)$$

где величина $\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ определена согласно

$$\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{n}\cdot\nabla\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}\,. \qquad (2.29)$$

В (2.28) $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\rho})$ — плотность заряда на поверхности тела.

Внутри металлического тела имеем

$$\bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r}) = \bar{\Psi}\,, \quad \bar{\Phi}^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = 0\,, \qquad (2.30)$$

так что для формального выполнения граничного условия типа (2.10) следует положить $\bar{\varepsilon} = \infty$. Нормировку функции $\bar{\psi}(\mathbf{r})$ определим с помощью соотношения, аналогичного (2.24)

$$\int \bar{\Psi}\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = -1\,. \qquad (2.31)$$

Отметим, что из (2.31) с учетом (2.28) получаем

$$\bar{\Psi}\bar{q} = \frac{1}{4\pi}\,. \qquad (2.32)$$

С другой стороны имеет место соотношение [1]

$$\bar{q} = C\bar{\Psi}\,, \qquad (2.33)$$

где C — электрическая емкость тела. Отсюда

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi C}}\,, \quad \bar{q} = \sqrt{\frac{C}{4\pi}}\,. \qquad (2.34)$$

Заметим, что согласно (2.14)

$$\int \bar{\Psi}\Phi^{(e)}_\nu(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = \bar{\Psi}\int \Phi^{(e)}_\nu(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = 0\,. \qquad (2.35)$$

Далее проинтегрируем равенство

$$\nabla\{\bar{\psi}(\mathbf{r})\nabla\psi_\nu(\mathbf{r}) - \psi_\nu(\mathbf{r})\nabla\bar{\psi}(\mathbf{r})\} = 0 \qquad (2.36)$$

по объему вне тела

$$\int \bar{\Psi}\Phi^{(e)}_\nu(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} - \int \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = 0\,. \qquad (2.37)$$

Согласно (2.35) первый интеграл в (2.37) равен нулю, так что

$$\int \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = 0\,. \qquad (2.38)$$

Таким образом,согласно (2.24), (2.31), (2.35) и (2.38) система поверхностных собственных функций ортонормирована на поверхности тела.

Как известно, в двумерной задаче монопольный потенциал вдали от заряженного тела неограниченно растет логарифмическим образом. В этом случае зарядовая функция $\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})$ при $r \to \infty$ имеет следующую асимптотику: $\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) \sim \ln r$. Такая функция ненормируема на всей бесконечной плоскости. Поэтому при изучении двумерных зарядовых состояний необходимо рассматривать эту задачу в области, ограниченной окружностью большого, но конечного радиуса R ($R \gg a$, где a — характерный размер тела).При этом следует потребовать равенства нулю функции $\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})$ при $r = R$.

Предполагаем,что система поверхностных собственных функций полна. В этом случае произвольная функция $f(\boldsymbol{\rho})$ может быть разложена в следующий ряд

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \sum_\nu f_\nu\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) + \bar{f}\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho})\,. \qquad (2.39)$$

С учетом (2.24), (2.31), (2.35) и (2,38) из разложения (2.39) найдем коэффициенты f_ν и $\bar{f}$:

$$f_\nu = -\int f(\boldsymbol{\rho})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}\,, \tag{2.40.1}$$

$$\bar{f} = -\int f(\boldsymbol{\rho})\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}\,. \tag{2.40.2}$$

Подставив коэффициенты f_ν и $\bar{f}$ в (2.39) и потребовав, чтобы это разложение сходилось к самой функции $f(\boldsymbol{\rho})$, придем к равенству

$$\sum_\nu \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')+\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho})\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') = -\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\,, \tag{2.41}$$

являющееся соотношением полноты. Аналогичное разложение функции $f(\boldsymbol{\rho})$ в ряд по подсистеме $\left\{\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}), \bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\right\}$ также приводит к соотношению полноты вида (2.41).

3. СВЯЗЬ ОБЪЕМНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ

Введем нулевую функцию Грина

$$G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,, \tag{3.1}$$

подчиняющуюся уравнению

$$\nabla^2_{\mathbf{r}'} G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,. \tag{3.2}$$

Нетрудно видеть, что вне тела и внутри него справедливо равенство

$$\psi_\nu(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \\ = \nabla_{\mathbf{r}'}\left\{\psi_\nu(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}\psi_\nu(\mathbf{r}')\right\}. \tag{3.3}$$

Умножим равенство (3.3) на $d\mathbf{r}'$ и проинтегрируем его по объему V_e вне тела

$$\psi_\nu(\mathbf{r})\,[1-\theta(\mathbf{r})] = \\ = -\int k(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}')\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' + \int G_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}')\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,. \tag{3.4}$$

Здесь

$$\theta(\mathbf{r}_e) = 0, \quad \theta(\mathbf{r}_i) = 1$$

и

$$k(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}') = \mathbf{n}\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}'=\boldsymbol{\rho}'}\,. \tag{3.5}$$

Проинтегрируем уравнение (3.2) по объему тела v

$$\int_v \nabla^2_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = \int k(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = \theta(\mathbf{r})\,. \tag{3.6}$$

Отсюда

$$\int k(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = 0\,, \tag{3.7}$$

$$\int k(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = 1\,. \tag{3.8}$$

Из соотношения (3.4) при $\mathbf{r}=\mathbf{r}_e$ и $\mathbf{r}=\mathbf{r}_i$ находим соответственно

$$\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) = \\ = -\int k(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho}')\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' + \\ + \int G_0(\mathbf{r}_e-\boldsymbol{\rho}')\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}', \tag{3.9}$$

$$\int k(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}')\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' - \\ - \int G_0(\mathbf{r}_i-\boldsymbol{\rho}')\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = 0. \tag{3.10}$$

С другой стороны, интегрирование (3.3) по объему тела v дает

$$\psi_\nu(\mathbf{r})\,\theta(\mathbf{r}) = \\ = \int k(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}')\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' + \\ + \frac{1}{\varepsilon_\nu}\int G_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}')\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'. \tag{3.11}$$

Отсюда при $\mathbf{r}=\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}=\mathbf{r}_e$ находим соответственно

$$\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}) = \\ = \int k(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}')\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' + \\ + \frac{1}{\varepsilon_\nu}\int G_0(\mathbf{r}_i-\boldsymbol{\rho}')\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}', \tag{3.12}$$

$$\int k(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho}')\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' + \\ + \frac{1}{\varepsilon_\nu}\int G_0(\mathbf{r}_e-\boldsymbol{\rho}')\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = 0. \tag{3.13}$$

Из равенства (3.9) с учетом (3.13), а также из (3.12) с учетом (3.10) получаем

$$\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) = -(1+\varepsilon_\nu)\int k(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho}')\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,, \tag{3.14}$$

$$\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{1+\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu}\int k(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}')\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,. \tag{3.15}$$

Из (3.14) при $\mathbf{r}_e\to\boldsymbol{\rho}$ и из(3.15) при $\mathbf{r}_i\to\boldsymbol{\rho}$ имеем

$$\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) = -(1+\varepsilon_\nu)\int K^{(e)}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,, \tag{3.16}$$

$$\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1+\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu}\int K^{(i)}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,. \tag{3.17}$$

Здесь

$$K^{(e)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \lim_{\mathbf{r}_e \to \boldsymbol{\rho}} k(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}'), \tag{3.18.1}$$

$$K^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \lim_{\mathbf{r}_i \to \boldsymbol{\rho}} k(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}'). \tag{3.18.2}$$

Величины (3.16) и (3.17) должны быть равны, что возможно только при выполнении следующего равенства

$$K^{(e)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') - K^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \tag{3.19}$$

— см. ниже.

Аналогичным образом из (3.9) и (3.12) с учетом соотношений (3.10) и (3.13) находим

$$\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) = \frac{1+\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu} \int G_0(\mathbf{r}_e - \boldsymbol{\rho}')\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}', \tag{3.20}$$

$$\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{1+\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu} \int G_0(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\rho}')\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'. \tag{3.21}$$

Интегрируя равенство

$$\bar{\psi}(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') =$$

$$= \nabla_{\mathbf{r}'}\left\{\bar{\psi}(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}\bar{\psi}(\mathbf{r}')\right\} \tag{3.22}$$

по объему V_e вне тела, при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ получим соответственно

$$\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r}_e - \boldsymbol{\rho}')\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}', \tag{3.23}$$

$$\bar{\Psi} = \int G_0(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\rho}')\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'. \tag{3.24}$$

При выводе формул (3.23) и (3.24) учтены равенства (3.7) и (3.8).

Используя разложение

$$r \to \infty: \quad G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \simeq -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^3} + \cdots\right\}, \tag{3.25}$$

из (3.23) находим асимптотику зарядовой функции

$$r \to \infty: \quad \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\bar{q}}{r} + \frac{\mathbf{r}\bar{\mathbf{d}}}{r^3} + \cdots, \tag{3.26}$$

где $\bar{q}$ — полный заряд, см. (2.28), $\bar{\mathbf{d}}$ — дипольный момент этого состояния

$$\bar{\mathbf{d}} = \int \boldsymbol{\rho}\bar{\sigma}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}. \tag{3.27}$$

Здесь $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\rho})$ — плотность поверхностного заряда, определенная в (2.28). Соответственно из (3.20) находим асимптотику поляризационной функции

$$r \to \infty: \quad \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mathbf{r}\mathbf{d}_\nu}{r^3} + \cdots, \tag{3.28}$$

где $\mathbf{d}_\nu$ — дипольный момент состояния ν

$$\mathbf{d}_\nu = \int \boldsymbol{\rho}\sigma_\nu(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} \tag{3.29}$$

и $\sigma_\nu(\boldsymbol{\rho})$ — плотность поверхностного заряда этого состояния

$$\sigma_\nu(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{1}{4\pi}\,\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\,\frac{1+\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu}. \tag{3.30}$$

Умножим формулу (3.20) на $(\varepsilon_\nu/(1+\varepsilon_\nu))\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})$ и просуммируем по ν. Добавив к $\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')$ и вычтя слагаемое $\bar{\Psi}\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')$, получим с учетом соотношения полноты (2.41)

$$G_0(\mathbf{r}_e - \boldsymbol{\rho}') =$$

$$= -\left\{\sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})\bar{\Psi}\right\}. \tag{3.31}$$

Аналогичным образом из (3.21) находим

$$G_0(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\rho}') =$$

$$= -\left\{\sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\Psi}^2\right\}. \tag{3.32}$$

С учетом уравнения (3.2) для нулевой функции Грина имеем

$$G_0(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i')\delta(\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}'') =$$

$$= \nabla_{\mathbf{r}''}\left\{G_0(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}'')\nabla_{\mathbf{r}''}G_0(\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}'') - \right.$$

$$\left. - G_0(\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}'')\nabla_{\mathbf{r}''}G_0(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}'')\right\} +$$

$$+ G_0(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i')\delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}''). \tag{3.33}$$

Проинтегрируем равенство (3.33) по объему тела v:

$$G_0(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i') =$$

$$= \int k(\mathbf{r}_i', \boldsymbol{\rho}'')G_0(\mathbf{r}_e - \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}'' -$$

$$- \int k(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}'')G_0(\mathbf{r}_i' - \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}''. \tag{3.34}$$

Подставив формулу (3.34) в выражения (3.31), (3.32) и воспользовавшись соотношениями (3.14), (3.15), найдем

$$G_0(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i') =$$

$$= -\left\{\sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}') + \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})\bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r}')\right\}, \tag{3.35}$$

где $\bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r}') = \bar{\Psi} = \mathrm{const}$. При выводе формулы (3.35) учитывались также соотношения (3.23) и (3.24).

Используя выражение (3.35) для $G_0(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_i')$ найдем величины $k(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho}')$ и $k(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}')$, определенные согласно (3.5):

$$k(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho}')=\sum_\nu\frac{1}{1+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\,, \tag{3.36}$$

$$k(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}')= =-\left\{\sum_\nu\frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')+\bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r})\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\right\}. \tag{3.37}$$

Здесь также $\bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r})=\bar{\Psi}=\mathrm{const}$. Отсюда при $\mathbf{r}_e\to\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{r}_i\to\boldsymbol{\rho}$ находим соответственно

$$K^{(e)}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')=\sum_\nu\frac{1}{1+\varepsilon_\nu}\,\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\,, \tag{3.38}$$

$$K^{(i)}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')= =-\left\{\sum_\nu\frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')+\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho})\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\right\}. \tag{3.39}$$

Подстановка формул (3.38) и (3.39) в соотношение (3.19) обращает его, в силу соотношения полноты (2.41), в тождество.

4. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Если в задаче, сформулированной в разделе 2, имеются сторонние заряды, то основное уравнение электростатики принимает вид

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=4\pi\varrho\,, \tag{4.1}$$

где $\varrho(\mathbf{r})$ — объемная плотность этих зарядов. В этом случае потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ подчиняется уравнению

$$\nabla\big\{[1-(1-h)\theta(\mathbf{r})]\nabla\varphi(\mathbf{r})\big\}=-\frac{1}{\epsilon^{(e)}}\,4\pi\varrho\,, \tag{4.2}$$

где, как и в (2.3), $h=\epsilon^{(i)}/\epsilon^{(e)}$. Решение уравнения (4.2), дающее наведенный внешними зарядами потенциал, запишем в виде

$$\varphi(\mathbf{r})=-\frac{4\pi}{\epsilon^{(e)}}\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\varrho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'\,. \tag{4.3}$$

Здесь $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$ — электростатическая функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla_{\mathbf{r}'}\big\{[1-(1-h)\theta(\mathbf{r}')]\nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\big\}=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,. \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что при $\mathbf{r}'=\mathbf{r_e}'$ и $\mathbf{r}'=\mathbf{r_i}'$ имеем

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}_e':\quad \nabla^2_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}_i':\quad \nabla^2_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{1}{h}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,. \tag{4.6}$$

Функция Грина подчиняется следующим граничным условиям

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_e')|_{\mathbf{r}_e'\to\boldsymbol{\rho}'}=G(\mathbf{r},\mathbf{r}_i')|_{\mathbf{r}_i'\to\boldsymbol{\rho}'}\,, \tag{4.7}$$

$$j^{(e)}(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}')=h\,j^{(i)}(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}')\,. \tag{4.8}$$

Здесь

$$j^{(e)}(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}')=\mathbf{n}\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}_e')|_{\mathbf{r}_e'\to\boldsymbol{\rho}'}\,, \tag{4.9}$$

$$j^{(i)}(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}')=\mathbf{n}\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r},\mathbf{r}_i')|_{\mathbf{r}_i'\to\boldsymbol{\rho}'}\,. \tag{4.10}$$

Интегрируя уравнение (4.9) по объему V_e вне тела и (4.10) по объему тела v, получим

$$\int j^{(e)}(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}'=0,\quad \int j^{(e)}(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'=1; \tag{4.11.1}$$

$$\int j^{(i)}(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'=\frac{1}{h},\quad \int j^{(i)}(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'=0\,. \tag{4.11.2}$$

Здесь предположено, что $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ имеет ту же асимптотику, что и $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$:

$$r\to\infty:\quad G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\simeq-\frac{1}{4\pi r}\,. \tag{4.12}$$

Ниже это предположение будет подтверждено непосредственно.

С учетом уравнений (3.2), (4.5) и (4.6) имеем следующие равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''=\mathbf{r}_e'':\quad & G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')=\\ &=\nabla_{\mathbf{r}''}\big\{G(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\nabla_{\mathbf{r}''}G_0(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')-\\ &-G_0(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\nabla_{\mathbf{r}''}G(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\big\}+\\ &+G_0(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')\,,\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''=\mathbf{r}_i'':\quad & G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')=\\ &=\nabla_{\mathbf{r}''}\big\{G(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\nabla_{\mathbf{r}''}G_0(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')-\\ &-G_0(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\nabla_{\mathbf{r}''}G(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\big\}+\\ &+\frac{1}{h}\,G_0(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')\,.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Положим (4.13) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_e$, $\mathbf{r}'=\mathbf{r}_e'$ и проинтегрируем полученное равенство по объему V_e вне тела

$$\begin{aligned}G(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_e')=&\\ =-&\int k(\mathbf{r}_e',\boldsymbol{\rho}'')G(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}''+\\ +&\int j^{(e)}(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho}'')G_0(\mathbf{r}_e'-\boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}''+G_0(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_e')\,.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Аналогичным образом при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_e$ интегрирование равенства (4.14) по объему тела v дает

$$\int k(\mathbf{r}'_e, \boldsymbol{\rho}'')G(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}'' - $$
$$-\frac{1}{h}\int j^{(e)}(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}'')G_0(\mathbf{r}'_e - \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}'' = 0\,. \qquad (4.16)$$

Исключая из (4.15) и (4.16) интеграл, содержащий $j^{(e)}(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}'')$, находим

$$G(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}'_e) =$$
$$= -(1-h)\int k(\mathbf{r}'_e, \boldsymbol{\rho}'')G(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}'' + G_0(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}'_e)\,. \qquad (4.17)$$

Положив в (4.17) $\mathbf{r}'_e = \boldsymbol{\rho}'$, получим уравнение для величины $G(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}')$:

$$G(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}') =$$
$$= -(1-h)\int K^{(e)}(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'')G(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}'' + G_0(\mathbf{r}_e - \boldsymbol{\rho}') \qquad (4.18)$$

с $K^{(e)}(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'')$, определенным согласно (3.18). Величину $G(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}')$ ищем в виде разложения по системе поверхностных собственных функций:

$$G(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}') = \sum_\nu a_\nu \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \bar{a}\bar{\Psi}\,. \qquad (4.19)$$

Подстановка (4.19) в (4.18) с учетом (3.7) и (3.16) дает

$$\sum_\nu a_\nu \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \bar{a}\bar{\Psi} =$$
$$= \sum_\nu a_\nu \frac{1-h}{1+\varepsilon_\nu}\,\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + G_0(\mathbf{r}_e - \boldsymbol{\rho}')\,. \qquad (4.20)$$

Поменяв в(4.20)индекс $\nu \to \mu$, умножим полученное равенство на $\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')$, затем проинтегрируем по $\boldsymbol{\rho}'$ и найдем коэффициент a_ν. Далее, умножив (4.20) на $\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')$ и проинтегрировав по $\boldsymbol{\rho}'$ найдем коэффициент $\bar{a}$. Таким образом,

$$a_\nu = -\frac{\varepsilon_\nu}{h+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\,, \quad \bar{a} = -\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})\,, \qquad (4.21)$$

так что

$$G(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}') =$$
$$= -\sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{h+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') - \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})\bar{\Psi}\,. \qquad (4.22)$$

При выводе выражений для коэффициентов (4.21) использовались формулы (3.20) и (3.23), а также соотношение ортонормированности (2.24), (2.31), (2.35), (2.38). Подстановка (4.22) в (4.17) дает

$$G(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}'_e) = G_0(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}'_e) -$$
$$-\sum_\nu \frac{1-h}{h+\varepsilon_\nu}\,\frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}')\,. \qquad (4.23)$$

Положим теперь в (4.13), (4.14)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_e$$

и проинтегрируем (4.13) по объему V_e вне тела, а (4.14) — по объему тела v:

$$G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_e) = -\int k(\mathbf{r}'_e, \boldsymbol{\rho}'')G(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}'' +$$
$$+\int j^{(e)}(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}'')G_0(\mathbf{r}'_e - \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}''\,, \qquad (4.24)$$

$$\int k(\mathbf{r}'_e, \boldsymbol{\rho}'')G(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}'' -$$
$$-\frac{1}{h}\int j^{(e)}(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}'')G_0(\mathbf{r}'_e - \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}'' + \frac{1}{h}\,G_0(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_e) = 0\,. \qquad (4.25)$$

Исключая из (4.24), (4.25), как обычно, интеграл с $j^{(e)}(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}'')$, получим

$$G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_e) =$$
$$= -(1-h)\int k(\mathbf{r}'_e, \boldsymbol{\rho}'')G(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}'' + G_0(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_e)\,. \qquad (4.26)$$

Положив в (4.26) $\mathbf{r}'_e = \boldsymbol{\rho}'$, найдем уравнение для величины $G(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}')$. Решая полученное уравнение также как (4.18) найдем для $G(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}')$ выражение, отличающееся от (4.22) только заменой $\mathbf{r}_e$ на $\mathbf{r}_i$. Поэтому в общем случае

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}') =$$
$$= -\left\{\sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{h+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu(\mathbf{r})\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\psi}(\mathbf{r})\bar{\Psi}\right\}\,. \qquad (4.27)$$

Подстановка (4.27) при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ в формулу (4.26) дает

$$G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_e) =$$
$$= -\left\{\sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{h+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}') + \bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r})\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}')\right\} \qquad (4.28)$$

с $\bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r}) = \bar{\Psi}$. При выводе (4.28) использовано разложение (3.35) для $G_0(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}'_i)$. В силу симметрии функции Грина из (4.28) следует

$$G(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}'_i) =$$
$$= -\left\{\sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{h+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}') + \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})\bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r}')\right\}\,. \qquad (4.29)$$

Наконец, положив в (4.13), (4.14) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_i$ и проинтегрировав полученные равенства, как обычно, по V_e и v, получим

$$-\int k(\mathbf{r}'_i,\boldsymbol{\rho}'')G(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}''+$$

$$+\int j^{(e)}(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}'')G_0(\mathbf{r}'_i-\boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}''=0\,, \tag{4.30}$$

$$G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}'_i)=\int k(\mathbf{r}'_i,\boldsymbol{\rho}'')G(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}''-$$

$$-\frac{1}{h}\int j^{(e)}(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}'')G_0(\mathbf{r}'_i-\boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}''+G_0(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}'_i)\,. \tag{4.31}$$

Исключая из (4.30) и (4.31) интеграл, содержащий $j^{(e)}(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}'')$, найдем

$$G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}'_i)=-\frac{1-h}{h}\int k(\mathbf{r}'_i,\boldsymbol{\rho}'')G(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}'')d\boldsymbol{\rho}''+$$

$$+\frac{1}{h}\,G_0(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}'_i)\,. \tag{4.32}$$

Положив в (4.32) $\mathbf{r}'_i=\boldsymbol{\rho}'$, получим уравнение для величины $G(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}')$, решение которого дается формулой (4.27) при $\mathbf{r}=\mathbf{r}_i$, так что из (4.32) следует

$$G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}'_i)=\frac{1}{h}\,G_0(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}'_i)+$$

$$+\frac{1}{h}\sum_\nu \varepsilon_\nu\,\frac{1-h}{h+\varepsilon_\nu}\,\frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\psi^{(i)}_\nu(\mathbf{r})\psi^{(i)}_\nu(\mathbf{r}')+$$

$$+\frac{1-h}{h}\,\bar\psi^{(i)}(\mathbf{r})\bar\psi^{(i)}(\mathbf{r}')\,, \tag{4.33}$$

где

$$\bar\psi^{(i)}(\mathbf{r})=\bar\psi^{(i)}(\mathbf{r}')=\bar\Psi.$$

При больших $\mathbf{r}_e$ из формул (4.23) и (4.29) находим

$$\mathbf{r}_e\to\infty:\quad G(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}'_e)\simeq G_0(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}'_e)\simeq-\frac{1}{4\pi r_e}\,; \tag{4.34}$$

$$\mathbf{r}_e\to\infty:\quad G(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}'_i)\simeq-\bar\psi^{(e)}(\mathbf{r})\bar\psi^{(i)}(\mathbf{r}')\simeq$$

$$\simeq-\frac{\bar q}{r_e}\,\bar\Psi=-\frac{1}{4\pi r_e}\,. \tag{4.35}$$

В (4.35) учтена асимптотика (2.27) для зарядовой функции $\bar\psi^{(e)}(\mathbf{r})$ и соотношение (2.31).

5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Ряд физических задач электростатики, гидродинамики идеальной жидкости и т.д. приводит к следующей математической проблеме: вне или внутри макроскопического тела заданной формы необходимо найти решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее на поверхности S этого тела некоторому условию. Ниже будут рассматриваться две основные краевые (граничные) задачи: Дирихле, когда на границе тела задается значение самого потенциала, и Неймана, когда на поверхности S задается нормальная производная потенциала.

Для рассмотрения сформулированных задач исходим из равенства

$$\varphi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=$$

$$=\nabla_{\mathbf{r}'}\left\{\varphi(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}\varphi(\mathbf{r}')\right\}\,, \tag{5.1}$$

справедливое внутри и вне тела, если потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Для вывода уравнений, необходимых для решения внешних задач, проинтегрируем (5.1) по объему V_e вне тела. При $\mathbf{r}=\mathbf{r}_e$ и $\mathbf{r}=\mathbf{r}_i$ получаем соответственно

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r})=-\int k(\mathbf{r}_e,\boldsymbol{\rho}')\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'+$$

$$+\int G_0(\mathbf{r}_e-\boldsymbol{\rho}')\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,, \tag{5.2}$$

$$\int k(\mathbf{r}_i,\boldsymbol{\rho}')\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'=$$

$$=\int G_0(\mathbf{r}_i-\boldsymbol{\rho}')\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,. \tag{5.3}$$

Здесь величина $k(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}')$ определена в (3.5), а нормальная производная $\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ в (2.6).

5.1. Внешняя задача Дирихле

В этой задаче на поверхности тела задается сам потенциал $\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$. Следует поэтому, используя соотношение (5.3), выразить величину $\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ через значение потенциала $\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ на поверхности S. Величину $\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ ищем в виде

$$\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})=\sum_\nu A_{\nu D}\Phi^{(e)}_\nu(\boldsymbol{\rho})+\bar A_D\bar\Phi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\,. \tag{5.4}$$

Подстановка (5.4) в уравнение (5.3) с учетом (3.21) и (3.24) дает

$$\sum_\nu A_{\nu D}\,\frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\psi^{(i)}_\nu(\mathbf{r})+\bar A_D\bar\Psi=$$

$$= \int k(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}')\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' \,. \qquad (5.5)$$

Положим здесь $\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\rho}$ и заменим индекс ν на μ:

$$\sum_\mu A_{\mu D}\,\frac{\varepsilon_\mu}{1+\varepsilon_\mu}\,\Psi_\mu(\boldsymbol{\rho}) + \bar{A}_D\bar{\Psi} =$$

$$= \int K^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' \,. \qquad (5.6)$$

Величина $K^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ определена в (3.18). Умножим соотношение (5.6) последовательно на $\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ и на $\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$, а затем проинтегрируем полученные равенства по всей площади поверхности тела. Используя выражение (3.39) найдем

$$\int K^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = \frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\,, \qquad (5.7.1)$$

$$\int K^{(i)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = \bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\,, \qquad (5.7.2)$$

так что

$$A_{\nu D} = -\int \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,, \qquad (5.8.1)$$

$$\bar{A}_D = -\int \bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' \,. \qquad (5.8.2)$$

Здесь и далее применяются соотношения ортонормированности (2.24), (2.31), (2.35), (2.38). В результате получим

$$\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) =$$

$$= -\int \left\{ \sum_\nu \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') \right\} \times$$

$$\times \varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' \,. \qquad (5.9)$$

Подстановка этого выражения в равенство (5.2) дает

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) =$$

$$= -\int \left\{ k(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}') + \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu} \times \right.$$

$$\left. \times \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') \right\} \times$$

$$\times \varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' \,. \qquad (5.10)$$

При выводе этого выражения использовались равенства (3.20) и (3.23). Из соотношения (5.10) с учетом выражения (3.36) для величины $k(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}')$, получим решение внешней задачи Дирихле в следующем виде

$$\varphi_D^{(e)}(\mathbf{r}) = \int F_D^{(e)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}')\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,, \qquad (5.11)$$

где

$$F_D^{(e)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}') =$$

$$= -\left\{ \sum_\nu \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r})\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') \right\} \,. \qquad (5.12)$$

Потенциал $\varphi_D^{(e)}(\mathbf{r})$ вне тела очевидным образом удовлетворяет уравнению Лапласа. На поверхности тела ($\mathbf{r}_e = \boldsymbol{\rho}$) в силу соотношения полноты (2.41) имеем

$$F_D^{(e)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'),$$

так что равенство (5.11) превращается в тождество

$$\varphi_D^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = \varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}).$$

5.2. Внешняя задача Неймана

В этом случае на границе тела S задается нормальная производная потенциала $\chi^{)e)}(\boldsymbol{\rho})$. Следует поэтому, используя уравнение (5.3), выразить поверхностный потенциал $\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ через величину $\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$. Ищем $\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ в виде

$$\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_\nu A_{\nu N}\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) + \bar{A}_N\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho})\,. \qquad (5.13)$$

Подстановка (5.13) в уравнение (5.3) с учетом (3.15) и (3.8) дает

$$\sum_\nu A_{\nu N}\frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}) + \bar{A}_N\bar{\Psi} =$$

$$= \int G_0(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\rho}')\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' \,. \qquad (5.14)$$

Положим здесь $\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\rho}$ и заменим индекс ν на μ. Преобразованное таким образом равенство (5.14), умножим на $\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$, а затем на $\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$. Проинтегрировав полученные соотношения по всей площади поверхности тела, найдем коэффициенты разложения (5.13):

$$A_{\nu N} = -\int \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}', \qquad (5.15.1)$$

$$\bar{A}_N = -\int \bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}')\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' \,. \qquad (5.15.2)$$

Поэтому для $\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ из (5.13) получим

$$\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) =$$

$$= -\int \Big\{ \sum_\nu \Psi_n(\boldsymbol{\rho})\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho})\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}') \Big\} \chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'. \qquad (5.16)$$

Здесь

$$\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}) = \bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}') = \bar{\Psi}.$$

Подстановка $\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ из (5.16) в (5.2) дает

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = = -\int \left\{ \sum_\nu \frac{1}{1+\varepsilon_\nu} \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') - G_0(\mathbf{r}_e - \boldsymbol{\rho}') \right\} \times \times \chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' . \qquad (5.17)$$

При выводе (5.17) учтены соотношения (3.14) и (3.7). Используя в (5.17) явное выражение (3.31) для $G_0(\mathbf{r}_e - \boldsymbol{\rho}')$ получим решение внешней задачи Неймана в следующем виде

$$\varphi_N^{(e)}(\mathbf{r}) = \int F_N^{(e)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}') \chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' , \qquad (5.18)$$

где

$$F_N^{(e)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}') = -\Big\{ \sum_\nu \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) \bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}') \Big\} . \qquad (5.19)$$

Потенциал $\varphi_N^{(e)}(\mathbf{r})$ вне тела удовлетворяет уравнению Лапласа. Вычислив нормальную производную $\chi_N^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ потенциала (5.18), (5.19), убедимся,что она совпадает с $\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$.

Целью внутренних краевых (граничных) задач является отыскание решения уравнения Лапласа внутри некоторой полости, на поверхности которой задано значение самого потенциала $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$, либо его нормальной производной $\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$. Для вывода уравнений, необходимых для решения внутренних задач, проинтегрируем соотношение (5.1) по объему v. В результате при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e$ получим соответственно

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{r}) = \int k(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}') \varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' - - \int G_0(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\rho}') \chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' , \qquad (5.20)$$

$$\int k(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}') \varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' = = \int G_0(\mathbf{r}_e - \boldsymbol{\rho}') \chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' . \qquad (5.21)$$

5.3. Внутренняя задача Дирихле

В этом случае задается само значение потенциала $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ на поверхности S полости. Следует поэтому, решая уравнение (5.21), выразить нормальную производную $\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ через поверхностный потенциал $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$. Величину $\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ ищем в виде

$$\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_\nu B_{\nu D} \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) + \bar{B}_D \bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) . \qquad (5.22)$$

Подстановка (5.22) в (5.21) с учетом (3.20) и (3.23) дает

$$\sum_\nu B_{\nu D} \frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu} \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) + \bar{B}_D \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) = = \int k(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}') \varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' . \qquad (5.23)$$

Положим здесь $\mathbf{r}_e = \boldsymbol{\rho}$ и заменим индекс ν на μ, так что (5.23) примет вид

$$\sum_\mu B_{\mu D} \frac{\varepsilon_\mu}{1+\varepsilon_\mu} \Psi_\mu(\boldsymbol{\rho}) + \bar{B}_D \bar{\Psi} = = \int K^{(e)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' . \qquad (5.24)$$

Умножим (5.24) на $\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ и проинтегрируем по всей площади поверхности S. Затем умножим (5.24) на $\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ и также проинтегрируем по площади S. Так как, в согласии с (3.38),

$$\int K^{(e)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{1+\varepsilon_\nu} \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') , \qquad (5.25.1)$$

$$\int K^{(e)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} = 0 , \qquad (5.25.2)$$

то

$$B_{\nu D} = \frac{1}{\varepsilon_\nu} \int \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') \varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' , \quad \bar{B}_D = 0 . \qquad (5.26)$$

Поэтому из (5.22) и (5.26) следует

$$\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_\nu \frac{1}{\varepsilon_\nu} \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) \int \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') \varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' . \qquad (5.27)$$

Подстановка $\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ из (5.27) в (5.20) дает

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{r}) = = \int \left\{ k(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}') - \sum_\nu \frac{1}{1+\varepsilon_\nu} \psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}) \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') \right\} \times \times \varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' . \qquad (5.28)$$

Наконец, используя выражение (3.37) для $k(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\rho}')$, получим решение внутренней задачи Дирихле в следующем виде

$$\varphi_D^{(i)}(\mathbf{r}) = \int F_D^{(i)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}') \varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' , \qquad (5.29)$$

где

$$F_D^{(i)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}') = -\Big\{ \sum_\nu \psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}) \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r}) \bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}') \Big\} . \qquad (5.30)$$

Потенциал $\varphi_D^{(i)}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри полости, а на ее поверхности выполняется граничное условие

$$\varphi_D^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}).$$

5.4. Внутренняя задача Неймана

В этой задаче на поверхности полости задается нормальная производная потенциала $\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$. Следует поэтому при решении уравнения (5.21) выразить поверхностный потенциал $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ через величину $\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$.

Потенциал $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ ищем в виде разложения

$$\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_\nu B_{\nu N}\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) + \bar{B}_N\bar{\Psi}\,. \tag{5.31}$$

Подстановка (5.31) в (5.21) с учетом (3.14) приводит к соотношению

$$-\sum_\nu B_{\nu N}\frac{1}{1+\varepsilon_\nu}\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r}_e-\boldsymbol{\rho}')\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'. \tag{5.32}$$

В силу соотношения (3.7) коэффициент $\bar{B}_N$ в это выражение не входит. Положим в (5.32) $\mathbf{r}_e = \boldsymbol{\rho}$, заменим индекс ν на μ, умножим на $\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ и проинтегрируем по всей площади поверхности S полости. Найдя таким образом коэффициент $B_{\nu N}$, для поверхностного потенциала $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ из (5.31) получим

$$\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_\nu \varepsilon_\nu\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\int\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'. \tag{5.33}$$

Подстановка $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ из (5.33) в соотношение (5.20) дает

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{r}) = \int\left\{\sum_\nu\frac{\varepsilon_\nu^2}{1+\varepsilon_\nu}\,\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') - G_0(\mathbf{r}_i-\boldsymbol{\rho}')\right\}\times \chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,. \tag{5.34}$$

Используя выражение (3.32) для $G_0(\mathbf{r}_i-\boldsymbol{\rho}')$, получим решение внутренней задачи Неймана в виде

$$\varphi_N^{(i)}(\mathbf{r}) = \int F_N^{(i)}(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}')\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,, \tag{5.35}$$

где

$$F_N^{(i)}(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}') = \sum_\nu\varepsilon_\nu\,\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r})\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}')\,. \tag{5.36}$$

Заметим, что интегрирование уравнения Лапласа для потенциала по объему v полости дает

$$\int_v\nabla^2\varphi^{(i)}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = 0\,. \tag{5.37}$$

Так как $\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}') = \bar{\Psi} = \text{const}$, то в силу (5.37) имеем

$$\int\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}')\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = \bar{\Psi}\int\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = 0\,. \tag{5.38}$$

Поэтому произведение $\bar{\psi}^{(i)}(\mathbf{r})\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}')$ в (5.36) следует опустить.

Так что для потенциала $\varphi_N^{(i)}(\mathbf{r})$ получаем окончательно

$$\varphi_N^{(i)}(\mathbf{r}) = \int\Big\{\sum_\nu\varepsilon_\nu\,\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')\Big\}\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,. \tag{5.39}$$

Потенциал $\varphi_N^{(i)}(\mathbf{r})$ внутри полости удовлетворяет уравнению Лапласа. Для нормальной производной потенциала $\chi_N^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ из (5.39) находим

$$\chi_N^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = -\int\Big\{\sum_\nu\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}')\Big\}\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,, \tag{5.40}$$

где учтено соотношение (2.10). Добавив и вычтя в фигурных скобках $\bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}')$, приведем (5.40) к виду

$$\chi_N^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = -\int\Big\{\sum_\nu\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}')\Big\}\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' + \bar{\Phi}^{(e)}(\boldsymbol{\rho})\int\bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho}')\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'\,. \tag{5.41}$$

Здесь интеграл во втором слагаемом согласно (5.38) равен нулю. Поэтому в силу соотношения полноты (2.41) из (5.41) следует

$$\chi_N^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}),$$

так что граничные условия задачи выполняются.

6. ТЕНЗОР ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ

Рассмотрим следующую электростатическую задачу. В среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon^{(e)}$ находится макроскопическое тело с диэлектрической проницаемостью $\epsilon^{(i)}$. На эту систему наложено однородное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0$. В этом случае внешний (вне тела) потенциал $\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$, подчиняющийся уравнению Лапласа, может быть представлен в виде

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}\mathbf{E}_0 + \delta\varphi^{(e)}(\mathbf{r})\,, \tag{6.1}$$

где величина $\delta\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$ также подчиняется уравнению Лапласа. На больших расстояниях от тела «усеченный» потенциал $\delta\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$ имеет следующую асимптотику

$$r\to\infty:\quad \delta\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3} + \cdots\,, \tag{6.2}$$

где

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda}\mathbf{E}_0 \tag{6.3}$$

— дипольный момент тела, $\hat{\Lambda}$ — тензор поляризуемости. Требуется, решив эту задачу, найти выражение для тензора поляризуемости $\hat{\Lambda}$ в случае тела произвольной формы.

Сформулированную задачу решаем с помощью метода собственных функций. Оказывается, что в этой задаче зарядовое состояние вклада не дает. Поэтому зарядовую функцию с самого начала будем опускать. Для отыскания потенциала $\varphi^{(i)}(\mathbf{r})$ внутри тела воспользуемся результатами решения внутренней задачи Дирихле, согласно которому задание поверхностного потенциала $\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ позволяет определить его нормальную производную $\chi^{(i)}(\boldsymbol{\rho})$ по соотношению (5.27), а саму функцию $\varphi^{(i)}(\mathbf{r})$ — по формулам (5.29), (5.30). Поэтому, положив

$$\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_\nu B_\nu \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) \,, \tag{6.4}$$

найдем

$$\chi(i)(\boldsymbol{\rho}) = \sum_\nu \frac{1}{\varepsilon_\nu} \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) \int \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = = -\sum_\nu \frac{1}{\varepsilon_\nu} B_\nu \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) \,; \tag{6.5}$$

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{r}) = -\sum_\nu \psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}) \int \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\varphi^{(i)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = \sum_\nu B_\nu \psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}). \tag{6.6}$$

Для полного потенциала $\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$ вне тела результаты решения внешней задачи Дирихле непригодны из-за расходимости при $r \to \infty$ члена $-\mathbf{r}\mathbf{E}_0$. В то же время их можно применить для усеченного потенциала $\delta\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$. Если задать поверхностный потенциал $\delta\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$, то его нормальную производную $\delta\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ можно определить по равенству (5.9), а саму функцию $\delta\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$ — по формулам (5.11), (5.12). Положив поэтому

$$\delta\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_\nu A_\nu \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) \,, \tag{6.7}$$

найдем

$$\delta\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = -\sum_\nu \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) \int \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\delta\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = = \sum_\nu A_\nu \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) \,; \tag{6.8}$$

$$\delta\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = -\sum_\nu \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) \int \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')\delta\varphi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}' = = \sum_\nu A_\nu \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) \,. \tag{6.9}$$

Полный потенциал $\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$ дается формулой (6.1) с $\delta\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$ из (6.9), а для его нормальной производной имеем

$$\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = -\mathbf{n}\mathbf{E}_0 + \delta\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) \,, \tag{6.10}$$

где $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали и $\delta\chi^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$ определено в (6.8).

Для потенциалов $\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$ и $\varphi^{(i)}(\mathbf{r})$ должны выполняться граничные условия (2.6), так что

$$-\boldsymbol{\rho}\mathbf{E}_0 + \sum_\nu A_\nu \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) = \sum_\nu B_\nu \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) \,, \tag{6.11}$$

$$-\mathbf{n}\mathbf{E}_0 + \sum_\nu A_\nu \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = -h \sum_\nu \frac{1}{\varepsilon_\nu} B_\nu \Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) \,, \tag{6.12}$$

где

$$h = \frac{\epsilon^{(i)}}{\epsilon^{(e)}}.$$

Заменим в (6.11), (6.12) индекс ν на μ, умножим (6.11) на $\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})$, а (6.12) — на $\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})$. Проинтегрировав полученные равенства по всей площади поверхности тела, найдем

$$\mathbf{E}_0 \int \boldsymbol{\rho}\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} + A_\nu = B_\nu \,, \tag{6.13}$$

$$\mathbf{E}_0 \int \mathbf{n}\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} + A_\nu = -\frac{h}{\varepsilon_\nu} B_\nu \,. \tag{6.14}$$

Заметим, что

$$\int \boldsymbol{\rho}\Phi_\nu^{(i)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = \int\limits_v \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\mathbf{r}\frac{\partial\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha}\right\}d\mathbf{r} = = \int\limits_v \nabla\psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int \mathbf{n}\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} \,, \tag{6.15}$$

так что

$$\int \mathbf{n}\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = -\frac{1}{\varepsilon_\nu} \int \boldsymbol{\rho}\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} \,. \tag{6.16}$$

Поэтому равенство (6.14)принимает вид

$$-\mathbf{E}_0 \int \boldsymbol{\rho}\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} + \varepsilon_\nu A_\nu = -hB_\nu \,. \tag{6.17}$$

Из (6.13) и (6.17) находим

$$A_\nu = \frac{1-h}{h+\varepsilon_\nu} \mathbf{E}_0 \int \boldsymbol{\rho}\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} \,, \tag{6.18}$$

где, согласно (3.29), (3.30),

$$\int \boldsymbol{\rho}\Phi_\nu^{(e)}(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = -4\pi\mathbf{d}_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu} \,. \tag{6.19}$$

На больших расстояниях от тела выражение (6.9) с учетом асимптотики (3.28) принимает вид (6.2), где

$$\mathbf{p} = \sum_{\nu} A_\nu \mathbf{d}_\nu \, . \tag{6.20}$$

Подставив коэффициент A_ν из (6.18), (6.19) в формулу (6.20) и сравнив с (6.3) получаем выражение для тензора поляризуемости

$$\Lambda_{\alpha\beta} = -4\pi(1-h) \sum_{\nu} \gamma_\nu \, \frac{d_{\nu\alpha} d_{\nu\beta}}{h+\varepsilon_\nu} \, , \tag{6.21}$$

где

$$\gamma_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше метод собственных функций изложен в рамках макроскопической электростатики. В то же время собственные функции и собственные значения определяются геометрией рассматриваемой задачи, а не ее физическим содержанием. Поэтому этот метод может применяться во всех тех случаях, когда исходная проблема сводится к решению уравнения Лапласа. Такие задачи возникают, как известно, в гидродинамике идеальной жидкости [12], аэродинамике [13], в стационарных теориях теплопроводности, диффузии, проводимости и т. д. Так, в работах [10, 11, 14] обсуждаемый метод использовался при рассмотрении проводимости двумерной модели Рэлея — тонкой пленки с периодическим распределением включений круговой формы. Применение метода дало возможность найти точное выражение для эффективной проводимости модели в наиболее трудной для изучения области — окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).

2. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т.II, ИИЛ, Москва (1960).

3. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, ИИЛ, Москва (1954).

4. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, Москва (1970).

5. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Основные дифференциальные уравнения математической физики*, Физматгиз, Москва (1962).

6. *Линейные уравнения математической физики*, (СМБ), Наука, Москва (1964).

7. Г. А. Гринберг, *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений*, Изд. АН СССР, Москва–Ленинград (1948).

8. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **94**, 95 (1988).

9. Б. Я. Балагуров, *Метод собственных функций в макроскопической электростатике*, URSS, Москва (2016).

10. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **157**, 669 (2020).

11. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **159**, 553 (2021).

12. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).

13. Л.Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа*, Наука, Москва (1988).

14. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **161**, 358 (2022).