

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК ДЛЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО И ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ

А. Д. Сухов^{a,b*}, А. Г. Петров^{a**}

^a Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского Российской академии наук
119526, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 13 апреля 2023 г.,
после переработки 23 мая 2023 г.
Принята к публикации 24 мая 2023 г.

Рассматривается течение жидкости со сводной границей, которая задается как функция высоты от координаты x с двумя асимптотами на положительной и отрицательной бесконечностях (гидравлический прыжок). Для описания явления используется приближение Буссинеска, а также вводится дополнительная сила. Сила подбирается зависящей только от высоты поверхности. Задача решается аналитически без применения численных схем. При помощи данной методики определяются поверхность прыжка и действующая сила в зависимости от координаты распространения волны.

DOI: 10.31857/S0044451023110147

EDN: PKGVNL

1. ВВЕДЕНИЕ

Течение в открытых каналах как направление гражданского строительства изучается уже долгое время с помощью лабораторных, численных и натуральных экспериментов. Гидравлический прыжок возникает, когда число Фруда $Fr = u/\sqrt{gh}$ становится много большим единицы [1, 2]. Тогда уровень воды резко возрастает, что в строительстве может использоваться в качестве механизма рассеивания энергии. При этом ключевыми параметрами для проектирования водных сооружений являются место, где происходит прыжок, его начальная глубина и протяженность прыжка. Пионером в данной области был французский ученый Беланджер, который экспериментально связал отношение двух высот прыжка и начальное число Фруда [3]. Рэлей [4] установил эту связь из законов сохранения расхода и импульса. В более поздних работах по гидравлическому прыжку [5–9] еще много раз были найде-

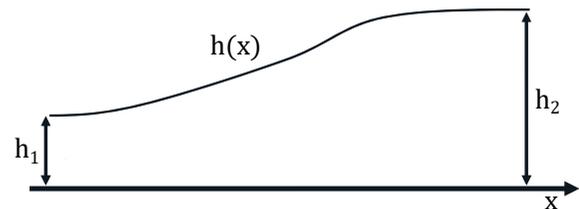


Рис. 1. Постановка задачи гидравлического прыжка

ны основные параметры потока, такие как отношение высот прыжка, длина и профиль прыжка, которые позволяют провести наиболее полное сравнение результатов теоретического и экспериментального исследований. Данная работа посвящена исследованию профиля плоского гидравлического прыжка, т.е. стационарного течения жидкости со свободной поверхностью в виде функции $h(x)$ и двумя горизонтальными асимптотами:

$$h(-\infty) = h_1, \quad h(+\infty) = h_2,$$

где $h_1 < h_2$. На рис. 1 представлена схема, демонстрирующая постановку задачи.

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Сначала запишем классические для теории гидравлического прыжка законы сохранения расхода и

* E-mail: sukhov.ad@phystech.edu

** E-mail: petrovipmech@gmail.com

импульса [3, 4, 10], где индексом «1» помечаются характеристики жидкости перед прыжком и индексом «2» — за прыжком:

$$u_1 h_1 = u_2 h_2 = Q, \quad u_2^2 h_2 - u_1^2 h_1 = -\frac{g}{2} (h_2^2 - h_1^2). \quad (1)$$

Отсюда можно получить формулу для расхода через асимптотические высоты. Разрешая систему

$$u_1 h_1 = u_2 h_2, \quad u_2 Q - u_1 Q = -\frac{g}{2} (h_2^2 - h_1^2)$$

относительно u_1 и u_2 , получим соотношения, найденные Рэлеем [4, 10]:

$$u_1 = \frac{g}{2Q} h_2 (h_1 + h_2), \quad u_2 = \frac{g}{2Q} h_1 (h_1 + h_2), \quad (2)$$

$$Q^2 = \frac{g h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{2}. \quad (3)$$

Это соотношение хорошо согласуется с экспериментальными данными и полезно для измерения расхода [1, 11, 12]. Рэлей показал [4, 10], что в гидравлическом прыжке потеря энергии

$$\frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) + \rho g (h_1 - h_2)$$

вследствие законов сохранения (1) равна

$$\frac{\rho g (h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2} > 0.$$

Отсюда он заключил, что возможен только скачок повышения $h_2 > h_1$ при числе Фруда

$$\text{Fr}^2 = \frac{u_1^2}{g h_1} = \frac{Q^2}{g h_1^3} = \frac{h_2}{2 h_1} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) > 1 \quad (4)$$

при скорости выше критической $u_1 > \sqrt{g h_1}$. Разрешая квадратное уравнение (4) относительно h_2/h_1 , найдем зависимость отношения h_2/h_1 от числа Фруда:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + 8 \text{Fr}^2} - 1}{2}, \quad (5)$$

которая широко используется для инженерных расчетов [1, 11, 12].

Ниже с использованием приближения Буссинеска получено аналитическое описание гидравлического прыжка, согласованное с зависимостью для отношения высот (4).

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ БУССИНЕСКА

Система уравнений Буссинеска для каналов [13–16]

$$Q = hu, \quad hu \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx}, \quad P = \frac{gh^2}{2} + \frac{\ddot{h}h^2}{3}, \quad (6)$$

$$\ddot{h} = u \frac{d}{dx} \left(u \frac{dh}{dx} \right)$$

интегрируется следующим образом. Сначала интегрируется второе уравнение (6): $Qu + P + A_1 = 0$. Подставляя в него выражение для P и $u = Q/h$, получим

$$\frac{Q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} + \frac{hQ^2}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right) + A_1 = 0.$$

Если умножить это уравнение на $\frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx}$, то его можно записать в виде производной:

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{Q^2}{2h^2} + \frac{gh}{2} + \frac{Q^2}{6} \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{A_1}{h} \right] = 0.$$

Отсюда получаем полный интеграл системы. Из него можно выразить производную высоты поверхности по координате как функцию от высоты поверхности:

$$(h')^2 = \text{Pol}(h),$$

$$\text{Pol}(h) = 3 \left(1 + \frac{2}{Q^2} A_1 h + \frac{2}{Q^2} A_2 h^2 - \frac{gh^3}{Q^2} \right). \quad (7)$$

Это уравнение приведено в [13] и последующих работах [14, 15]. Кубический полином $\text{Pol}(h)$ имеет три корня. Если корни действительные $h_0 < h_1 < h_2$, то уравнение имеет вид

$$h' = \pm \sqrt{\text{Pol}(h)},$$

$$\text{Pol}(h) = 3 \left(1 - \frac{h}{h_0} \right) \left(1 - \frac{h}{h_1} \right) \left(1 - \frac{h}{h_2} \right), \quad (8)$$

и определяет периодические волны. Корни h_1 и h_2 соответствуют низшей и высшей точкам волны $h_1 = \min(h)$, $h_2 = \max(h)$. В случае совпадения корней $h_0 = h_1$ получаются решения в виде уединенной волны (солитона).

Расход Q выражается через h_0, h_1, h_2 из уравнений (7) и (8) путем приравнивания коэффициентов в полиноме при третьей степени h^3 следующим образом: $Q^2 = g h_0 h_1 h_2 < g h_1 h_2 (h_1 + h_2)/2$. Он меньше, чем расход (2) в гидравлическом прыжке, который вытекает из законов сохранения. Поэтому система уравнений (6) неприменима для описания гидравлического прыжка. Его можно попытаться описать, дополнив уравнения (6) силой f :

$$Q = hu, \quad hu \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx} - f, \quad P = \frac{gh^2}{2} + \frac{\ddot{h}h^2}{3}. \quad (9)$$

Данная сила имеет физический смысл сопротивлений на дне и вихревых сопротивлений на свободной границе гидравлического прыжка.

Такой же подход применен в работе [17], в которой сила берется пропорциональной квадрату скорости. Однако проинтегрировать аналитически систему уравнений в [17] не удается, и она исследуется только численно. Ниже сила выражается через ее потенциал G так, чтобы выполнялись законы сохранения (1). Покажем, что сила, определяемая по формуле

$$f = -\frac{dG}{dx},$$

$$G = \frac{Q^2}{h_1 h_2} \left(h^2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) - \frac{h^3}{h_1 h_2} \right) - \frac{gh^2}{2}, \quad (10)$$

с расходом Q , равным (3), не меняет импульс системы. Действительно, импульс в системе изменяется на величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dx = -G(h_2) + G(h_1).$$

Находим значения

$$G(h_2) = \frac{Q^2}{h_1} - \frac{gh_2^2}{2}, \quad G(h_1) = \frac{Q^2}{h_2} - \frac{gh_1^2}{2}.$$

Их разность

$$G(h_2) - G(h_1) = \frac{(h_1 - h_2) (gh_1 h_2 (h_1 + h_2) - 2Q^2)}{2h_1 h_2}$$

при расходе (3) действительно равна нулю, что и требовалось доказать.

Уравнения (9) с учетом (10) можно записать в виде

$$Q = hu, \quad hu \frac{du}{dx} = -\frac{dP_1}{dx},$$

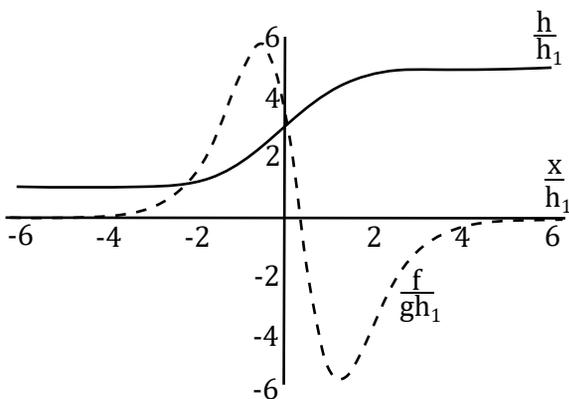


Рис. 2. Зависимости силы (штриховая линия) и формы прыжка (сплошная линия) от координаты

$$P_1 = \frac{Q^2}{h_1 h_2} \left(h^2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) - \frac{h^3}{h_1 h_2} \right) + \frac{\ddot{h} h^2}{3}.$$

Они интегрируются так же, как и уравнение (6). Сначала интегрируем второе уравнение:

$$\frac{Q^2}{h} + \frac{Q^2}{h_1 h_2} \left(h^2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) - \frac{h^3}{h_1 h_2} \right) + \frac{hQ^2}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right) + A_1 = 0. \quad (11)$$

Умножая его на $\frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx}$, находим

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{Q^2}{2h^2} + \frac{Q^2}{h_1 h_2} \left(h \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) - \frac{h^2}{2h_1 h_2} \right) + \frac{Q^2}{6} \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{A_1}{h} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{Q^2}{2h^2} + \frac{Q^2}{h_1 h_2} \left(h \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) - \frac{h^2}{2h_1 h_2} \right) + \frac{Q^2}{6} \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{A_1}{h} - A_2 = 0. \quad (12)$$

Подставляя в (11) и (12) предельные значения $h(-\infty) = h_1$, $dh/dx(-\infty) = 0$ и расход (3), найдем следующие значения для постоянных интегрирования:

$$A_1 = -\frac{1}{2}g(h_1 + h_2)^2,$$

$$A_2 = \frac{g(h_1 + h_2) (h_1^2 + 4h_2 h_1 + h_2^2)}{4h_1 h_2},$$

$$Q^2 = \frac{gh_1 h_2}{2} (h_1 + h_2).$$

Разрешая уравнение (12) относительно $(dh/dx)^2$ с учетом найденных постоянных интегрирования, получим автономное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = 3 \left(1 - \frac{h}{h_2} \right)^2 \left(1 - \frac{h}{h_1} \right)^2. \quad (13)$$

Как известно, общее решение автономного уравнения получается из частного $h(x)$ сдвигом аргумента $h(x+c)$ на произвольную константу c . Поэтому достаточно найти частное решение уравнения (13):

$$Y = \frac{h(x)}{h_1} = \frac{1 + h_{21} E(x/h_1)}{1 + E(x/h_1)},$$

$$E(X) = \text{Exp} \left[\frac{h_{21} - 1}{h_{21}} \sqrt{3} X \right],$$

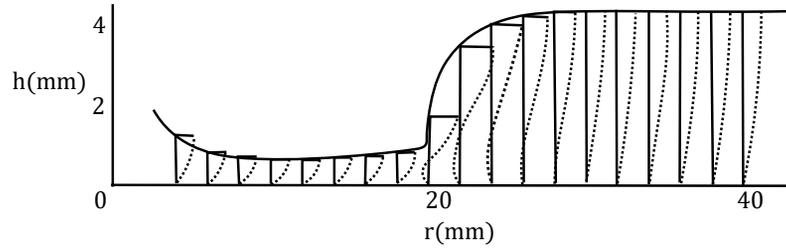


Рис. 3. Эпюры скоростей, адаптировано из работы [18]

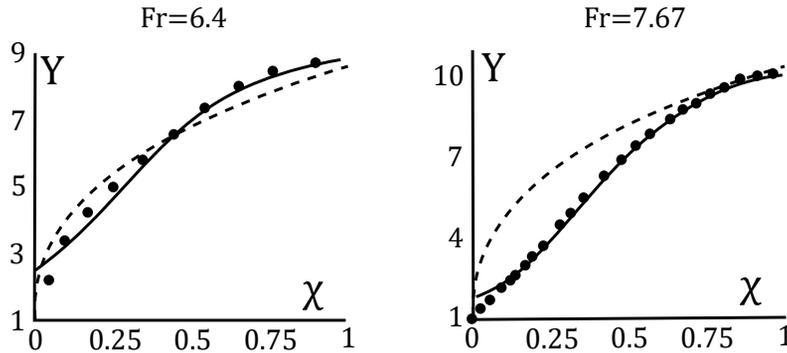


Рис. 4. Сравнение профиля прыжка с данными эксперимента и другой современной аналитической модели с разными начальными числами Фруда (6.4 слева и 7.67 справа). Черные точки — эксперимент [8], черная линия — представленная аналитическая модель, черная штриховая линия — аналитическая модель из [19]

$$h_{21} = \frac{h_2}{h_1}. \tag{14}$$

Оно удовлетворяет условию

$$h(0) = \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Все решения общего класса $h(x + c)$ удовлетворяют условиям гидравлического прыжка на бесконечностях. Таким образом, формула (14) определяет профиль гидравлического прыжка при заданном соотношении высот на бесконечностях h_{21} . А само соотношение высот хорошо предсказывается исходя из соотношения Беланджера [3, 10–12].

На рис. 2 изображены зависимости (14) безразмерного уровня h/h_1 и (10) безразмерной силы $f/(gh_1)$ от безразмерной координаты x/h_1 при $h_{21} = 5$.

4. ПРЫЖОК ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ РАСТЕКАНИИ ЖИДКОГО СЛОЯ

В опытах по осесимметричному растеканию жидкости также наблюдаются гидравлические прыжки. В них длина прыжка существенно меньше, чем расстояние до оси симметрии. Поэтому формы прыжков для прямолинейного и осесимметричного

течений жидкости близки. Ниже учитывается различие геометрий этих прыжков из-за кривизны фронта прыжка при осесимметричном растекании жидкости. Уравнения (9) для осесимметричного растекания жидкого слоя имеют вид

$$\begin{aligned} QR &= rhu, \\ hu \frac{du}{dr} &= -\frac{dP}{dr} - f, \\ P &= \frac{gh^2}{2} + \frac{\ddot{h}h^2}{3}, \end{aligned}$$

где r — цилиндрическая координата, а R — постоянная размерности длины.

Пусть точка $r = R$ является серединой прыжка. Тогда с помощью замены $r = R + x$ уравнения в окрестности точки $r = R$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} Q &= \left(1 + \frac{x}{R}\right) hu, \\ Q \left(1 - \frac{x}{R}\right) \frac{du}{dx} &= -\frac{dP}{dx} - f, \\ P &= \frac{gh^2}{2} + \frac{\ddot{h}h^2}{3}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнение импульса по x от начала прыжка $x = -x_0$ со значениями

$$h(-x_0) = h_1, \quad u(-x_0) = u_1$$

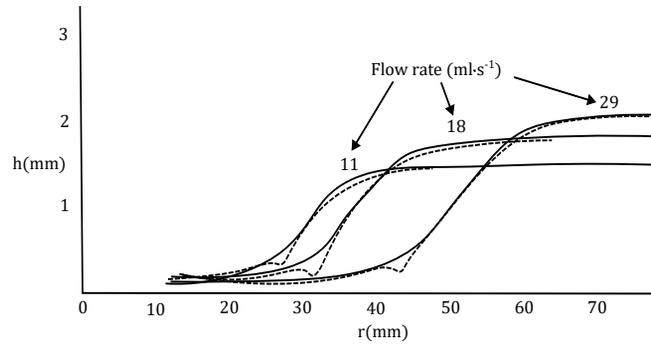


Рис. 5. Сравнение результатов нашей теории (сплошные линии) с экспериментальными данными из [20] (пунктирные линии)

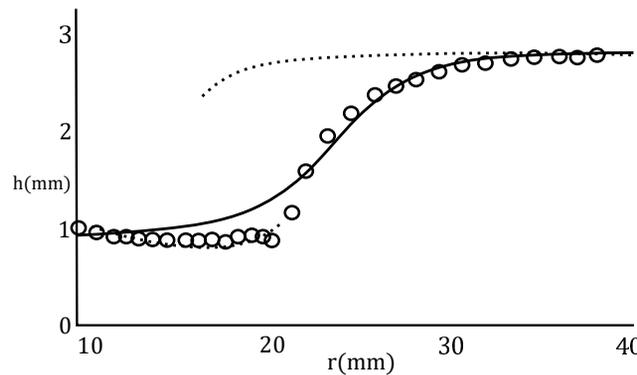


Рис. 6. Сравнение результатов нашей теории (сплошная линия) с теоретическими данными из [21] (пунктирные линии) и экспериментальными данными из [22] (кружки)

до точки установления $x = x_0$, в которой

$$h(x_0) = h_2, \quad u(x_0) = u_2.$$

Учитывая, что

$$h\ddot{h}\Big|_{-x_0}^{x_0} = \int_{-x_0}^{x_0} f dx = 0,$$

и предполагая, что R значительно превышает длину прыжка, с точностью до малых x/R первого порядка получим

$$Q(u_2 - u_1) + \frac{g}{2} (h_2^2 - h_1^2) = \frac{Q}{R} \int_{-x_0}^{x_0} x \frac{du}{dx} dx.$$

Это уравнение отличается от закона сохранения (1) на малую величину, пропорциональную $1/R$. Интеграл можно вычислить, подставив в него функцию

$$u = \frac{Q}{h(x)} = \frac{Q}{h_1} \frac{1 + E(X)}{1 + h_{21}E(X)}, \quad X = \frac{x}{h_1},$$

нулевого приближения (14) и заменив конечные пределы интегрирования на бесконечные:

$$\int_{-x_0}^{x_0} x \frac{du}{dx} dx = Q \int_{-\infty}^{\infty} X \frac{d}{dX} \left(\frac{1 + E(X)}{1 + h_{21}E(X)} \right) dX = Q \frac{\ln h_{21}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда законы сохранения принимают вид

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x_0}{R}\right) h_1 u_1 &= \left(1 + \frac{x_0}{R}\right) h_2 u_2 = Q, \\ -\frac{g}{2} (h_2^2 - h_1^2) &= Q(u_2 - u_1) - \frac{Q^2}{R} \frac{\ln h_{21}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Эта система отличается от (1) малыми членами, пропорциональными $1/R$. Разрешая эту систему относительно u_1, u_2 , получим решение (2), дополненное малыми поправками, пропорциональными $1/R$:

$$u_1 = \frac{g}{2Q} h_2 (h_1 + h_2) \left(1 - \frac{h_1(6x_0 + h_2 \ln h_{21} \sqrt{3})}{3R(h_2 - h_1)} \right),$$

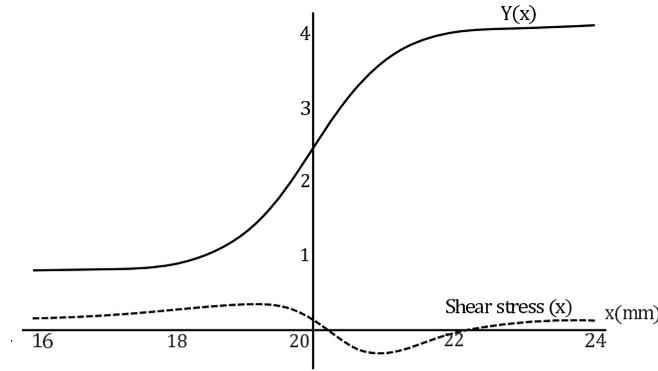


Рис. 7. Профиль и касательное напряжение вдоль оси прыжка

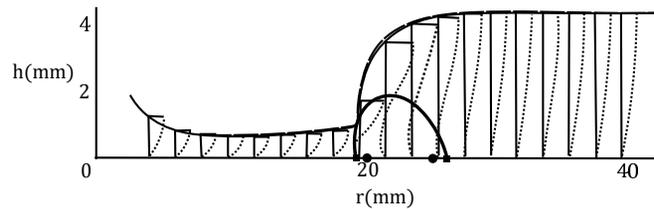


Рис. 8. Сравнение точек отрыва, найденных из формулы (16) и полученных численно [18]. Черные круги — данные по представленной модели, черные квадраты — численный расчет

$$u_2 = \frac{g}{2Q} h_1 (h_1 + h_2) \left(1 - \frac{h_1(6x_0 + h_2 \ln h_{21} \sqrt{3})}{3R(h_2 - h_1)} \right), \quad z = \frac{\sqrt{1 + 8\text{Fr}^2} - 1}{2},$$

Отсюда следует уточненная по сравнению с (3) формула для расхода

$$Q^2 = \frac{g}{2} h_1 h_2 (h_1 + h_2) \times \left(1 - \frac{3(h_1 + h_2)x_0 + \sqrt{3}h_1 h_2 \ln h_{21}}{3R(h_2 - h_1)} \right)$$

и уточненная по сравнению с (4) формула для числа Фруда

$$\begin{aligned} \text{Fr}^2 &= \frac{u_1^2}{gh_1} = \frac{Q^2}{gh_1^3} \left(1 + 2\frac{x_0}{R} \right) = \\ &= \frac{h_{21}}{2} (1 + h_{21}) \times \\ &\times \left(1 - \frac{3 - h_{21} \frac{x_0}{R}}{h_{21} - 1} - \frac{\ln h_{21}}{\sqrt{3}(h_{21} - 1)} \frac{h_2}{R} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим через z зависимость невозмущенной относительной величины скачка (5):

$$z = \frac{\sqrt{1 + 8\text{Fr}^2} - 1}{2}.$$

Через нее можно выразить возмущенное относительное значение скачка и число Фруда:

$$h_{21} = z + \frac{z(1+z)}{(z-1)(2z+1)} \left(-(z-3)\frac{x_0}{R} + \frac{\ln z}{\sqrt{3}} \frac{h_2}{R} \right),$$

где $2x_0$ — длина скачка. Можно предложить приближенную оценку поправочного члена на интервале чисел Фруда $\text{Fr} \in (2, 4.5)$,

$$h_{21} = \frac{\sqrt{1 + 8\text{Fr}^2} - 1}{2} + \frac{1}{2R} \left(\frac{\text{Fr}(6 - \text{Fr}^2)}{\text{Fr}^2 - 1} x_0 + h_2 \right),$$

на этом интервале чисел Фруда величина скачка меняется в диапазоне $h_{21} \in (1.45, 4)$. Эта формула удобна для проведения инженерных расчетов.

5. АНАЛИЗ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ФОРМЫ ПРЫЖКА

Как видно из графика на рис. 2, сила сопротивления f примерно до середины прыжка положительна, а после середины отрицательна. Это согласуется с численными расчетами Ватанабе [18]. На рис. 3 приведены эпюры скоростей из [18]. Из них следует, что действительно сдвиг скорости на дне соответствует положительной силе трения примерно до середины прыжка, а после середины из-за возникшего вихря меняет свой знак, что соответствует отрицательной силе трения.

На рис. 4 сплошной линией изображена найденная по предложенной теории зависимость $Y(\chi)$, где

$$\chi = \frac{x + x_0}{2x_0}$$

— относительная координата от выделенного подножия прыжка до точки набора максимальной высоты поверхности прыжка. Видно, что она описывает экспериментальную форму прыжка [8] (точки) при больших числах Фруда лучше, чем другая современная аналитическая модель [19] (штриховая линия). Рисунок 3 показывает, насколько сложен характер течения жидкости при изменении глубины прыжка. Сдвиговой характер течения возле дна и появление вихревой зоны показывает, что сдвиг скорости на дне меняет свое направление, что соответствует изменению знака силы, действующей на слой жидкости. На рис. 5 приведено сравнение теоретической кривой (сплошная линия) с экспериментальными данными [20] (точки) при различных скоростях потока для осесимметричного прыжка. Сравнение теоретической кривой (сплошная линия) с результатами расчета из [6] и эксперимента из [22] приведено на рис. 6. Представленная модель описывает изменение высоты профиля скачка вдоль координаты.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ПРЫЖКА

Длину прыжка будем определять исходя из того, что поток отрывается от дна, а затем присоединяется. Расстояние между этими двумя точками отрыва определяет характерную длину прыжка. Точки отрыва определяем как точки, где касательное напряжение равно нулю. Касательное напряжение связываем со скоростью на границе при помощи метода Лойцянского [23–27]:

$$\frac{v'(x)}{v^b(x)} \int_0^{x_{cr}} (v(x))^{b-1} dx + 0.202 = 0, \quad b = 5.35. \quad (16)$$

Исходя из этого, находим точки x_{cr} . Скорость находится через расход и высоту

$$v(x) = \frac{Q}{h(x)}$$

для плоского случая и

$$v(x) = \frac{Q}{2\pi RY(x)}$$

для осесимметричного случая. На рис. 7 представлены профиль и касательное напряжение вдоль оси

прыжка. А на рис. 8 проведено сравнение отрывной зоны, полученной с помощью (16), с результатами численного расчета для осесимметричного случая из [18], которое подтверждает применимость данного метода для определения длины прыжка.

7. ВЫВОДЫ

Получена аналитическая зависимость, описывающая форму прыжка в зависимости от соотношения высот на бесконечности. Само отношение высот может быть определено из числа Фруда у подножия с помощью формулы Беланжера. Для описания прыжка предложена модель с приближением Буссинеска и с учетом силы трения, действующей на прыжок со стороны подложки. Природа этой силы качественно подтверждена численными расчетами, она положительна до первой половины прыжка, но после середины прыжка становится отрицательной из-за появления вихревой зоны, что видно на рис. 3. Решение полученных уравнений записывается в виде простых элементарных функций и хорошо описывает форму прыжка. Таким образом, сложная структура гидравлического прыжка была описана простыми формулами в элементарных функциях. Также проведено сравнение с существующими аналитическими моделями и экспериментальными данными, результаты представлены на рис. 4–6.

Точки отрыва находятся с помощью теории пограничного слоя из условия равенства нулю касательного напряжения. На рис. 8 приведено сравнение с численным расчетом.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00833).

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И. Агроскин, *Гидравлика*, Энергия, Москва (1964).
2. W. H. Hager, *Critical Fow Condition in Open Channel Hydraulics*, Acta Mechanica **54**, 157 (1985).
3. J.B. Belanger, *Essay on the Numerical Solution of Some Problems Relative to Steady Flow of Water*, Chez Carilian-Goeury libraire, Paris (1828).
4. Lord Rayleigh, *On the Theory of Long Waves and Bore*, Proc. Roy. Soc. A **90**, 324 (1914).
5. W. H. Hager and K. Hutter, *Approximate Treatment of the Plane Hydraulic Jump with Separation* *Approximate Treatment of the Plane Hydraulic Jump*

- with Separation Zone Above the Flow Zone*, J. Hydraulic Res. **21**, 195 (1983).
6. R. Schröder, *A Contribution to the Question of Energy Dissipation and the Turbulence of Discontinuous Water Flow*, Institute of Hydraulic Engineering and Water Resources Management, Berlin (1957).
 7. R. Schröder, *The Turbulent Flow in the Free Alternating Jump*, Institute of Hydraulic Engineering and Water Resources Management, Berlin (1963).
 8. F. Murzyn and H. Chanson, *Free Surface, Bubbly Flow and Turbulence Measurements in Hydraulic Jumps*, The University of Queensland, Brisbane (2007).
 9. K. Woycicki, *Water Jump, Cover Roller and Discharge under a Contactor*, ETH Zurich, Zurich (1931).
 10. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1932).
 11. R.M. Khatsuria, *Hydraulics of Spillways and Energy Dissipators*, CRC Press, Atlanta (2004).
 12. J.J. Bloomer, *Practical Fluid Mechanics for Engineering Applications*, Marcel Dekker, New York (2000).
 13. T. B. Benjamin and M. J. Lighthill, *On Cnoidal Waves and Bore*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Math. Phys. Sci. **224**, 448 (1954).
 14. A.G. Petrov, *Integrating the Long Wave Equations in Kulikovskii–Drozdova Form*, Dokl. Ross. Akad. Nauk **373**, 762 (2000).
 15. A.G. Petrov, *Integration of the Boussinesq Equations for Steady Channel and Jet Flows*, Fluid Dynamics **42**, 966 (2007).
 16. Yu.A. Drozdova and A.G. Kulikovskii, *Concerning the Description of Long Nonlinear Waves in Channels*, Fluid Dynamics **31**, 739 (1996).
 17. G. L. Richard and S. L. Gavriluk, *The Classical Hydraulic Jump in a Model of Shear Shallow-water Flows*, J. Fluid Mech. **725**, 492 (2013).
 18. S. Watanabe, *Integral Methods for Shallow Free-surface Flows with Separation*, J. Fluid Mech. **480**, 233 (2003).
 19. O. Castro-Orgaz and W. H. Hager, *Classical Hydraulic Jump: Basic Flow Features*, J. Hydraulic Res. **47**, 744 (2009).
 20. A. D. Craik, R. C. Latham, M.J. Fawkes, and P. W. F. Gribbon, *The Circular Hydraulic Jump*, J. Fluid Mech. **112**, 347 (1981).
 21. R. K. Bhagat and P. F. Linden, *The Circular Hydraulic Jump; the Influence of Downstream Flow on the Jump Radius*, Phys. Fluids **34**, 72 (2022).
 22. T. Bohr, C. Ellegaard, A. E. Hansen, and A. Haaning, *Hydraulic Jumps, Flow Separation and Wave Breaking: An Experimental Study*, Physica B **228**, 1 (1996).
 23. Л.Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа*, Наука, Москва (1973) [L. G. Loitsyanskii, *Mechanics of Liquids and Gases*, Nauka, Moscow (1973), Begell House, New York (1996)].
 24. А.Г. Петров, *Аналитическая гидродинамика*, Физматлит, Москва (2009).
 25. A. G. Petrov, *Saturation Free Numerical Scheme for Computing the Flow Past a Lattice of Airfoils and the Determination of Separation Points in a Viscous Fluid*, Comp. Math. Math. Phys. **51**, 1239 (2011).
 26. A. M. Elizarov, A. R. Kasimov, and D. V. Maklakov, *Shape Optimization in Aerodynamics*, Fizmatlit, Moscow (2009).
 27. A. G. Petrov, A. D. Sukhov, and I. N. Sibgatullin, *Laminar Flow of Viscous Fluid around Elliptical Contours at an Angle of Attack*, Lobachevskii J. Math. **43**, 1184 (2022).