

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ ЖИДКОСТИ ЛАТТИНЖЕРА С ОТТАЛКИВАНИЕМ И ОДНОЙ ТОЧЕЧНОЙ ПРИМЕСЬЮ

*В.В. Афонин**, *В.Ю. Петров*

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 27 февраля 2023 г.,
после переработки 27 февраля 2023 г.
Принята к публикации 5 мая 2023 г.

Проанализировано выражение для кондактанса одномерного канала, полученное с помощью хорошо известного точного решения. Показано, что в случае сильного электрон-электронного взаимодействия самая медленная (линейная) по частоте асимптотика кондактанса определяется поведением взаимодействия в области перехода от одномерного движения к трехмерному, реализующемуся вблизи примеси.

DOI: 10.31857/S0044451023090134
EDN: KEFLBU

Здесь M — параметр ультрафиолетового обрезания,
 ω — частота внешнего поля,

$$v_c = \sqrt{1 + V_0/\pi} > 1$$

1. ВВЕДЕНИЕ

История изучения сильновзаимодействующих одномерных электронов насчитывает уже более 50 лет. Первоначально эта задача рассматривалась как простейшая точно решаемая модель, позволяющая вычислить любую n -частичную функцию Грина в случае сильного фермион-фермионного взаимодействия. После появления технологий по производству одномерных баллистических каналов она стала актуальной и для физики твердого тела, в которой и получила название жидкости Латтинжера (LL). Одновременно с этим встал вопрос о влиянии электрон-примесного ($e-i$) рассеяния на свойства LL. Учет $e-i$ -рассеяния выводил эту задачу (даже в простейшем случае одной упругой примеси) из класса точно решаемых теорий. Сразу после появления пионерских работ [1–4] стало ясно, что упругое рассеяние качественно меняет свойства одномерного канала. К настоящему времени достигнуто достаточно хорошее понимание вопросов, связанных с упругим рассеянием, в случае слабого электрон-электронного ($e-e$) рассеяния:

$$\nu = v_c - 1 \ll 1, \quad \nu \ln \frac{M}{|\omega|} \ll 1. \quad (1)$$

— перенормированная скорость Ферми. (В работе будет обсуждаться простейшая задача: однокомпонентные отталкивающиеся фермионы и точечное $e-e$ -взаимодействие:

$$V_{e-e} = V_0 \delta(x - y).$$

Все скорости измеряются в единицах скорости Ферми, $\hbar = 1$.)

Случай сильного $e-e$ -взаимодействия (при $\nu = v_c - 1 \gtrsim 1$) обсуждался в ограниченном числе работ. Уже в первых работах [1, 3] было высказано утверждение о том, что аномальную частотную зависимость кондактанса ($\omega^{2\nu}/M^{2\nu}$; M — параметр ультрафиолетового обрезания), полученную для слабого $e-e$ -взаимодействия, можно экстраполировать в область сильного взаимодействия. Оно поддерживалось с помощью точного решения, существующего в гамильтониане Кейна–Фишера (КФ) при $v_c = 2$ и дававшего квадратичную зависимость от частоты. К этому же выводу пришли авторы работ [5, 6], использовавшие для вычислений термодинамический анзац Бете. Противоположное утверждение было выдвинуто в работе [7]. В ней было проанализировано выражение для кондактанса, справедливое при очень слабом $e-i$ -взаимодействии и любом ν . Оно давало ту же частотную зависимость коэффициента отражения при $\nu < 1/2$. При

* E-mail: vasil.afonin@mail.ioffe.ru

$\nu > 1/2$ (область сильного e - e -взаимодействия) инфракрасная расходимость в ответе для кондактанса пропала, а главный вклад в кондактанс давала ультрафиолетовая область (точнее, область перехода $\sim 1/M$), в которой эффективное e - e -взаимодействие (учитывающее существование точечной примеси) существенно ослабилось. В результате частотная зависимость кондактанса становилась равной $|K_0|^2|\omega|/M$. (Здесь K_0 — коэффициенты прохождения электронов без учета e - e -взаимодействия.) Кроме того, отсюда сразу следовало, что в случае сильного e - e -взаимодействия скейлинговый анализ для нашей задачи оказывается неприменимым. (Он возможен только для инфракрасно-расходящихся задач). Поэтому в случае сильного e - e -взаимодействия становится принципиально важным правильное описание ультрафиолетовой области в исходном гамильтониане. (В отличие от области слабого взаимодействия, где эффекты, связанные с e - e -взаимодействием, определяются инфракрасным масштабом $\sim v_c/|\omega|$ и, следовательно, не требуют пристального внимания к ультрафиолетовой области.)

На сегодняшний день, видимо, единственным надежным источником информации для случая сильного e - e -взаимодействия в подходе КФ являются точные решения при $v_c = 2$ (см., например, [1–3] и др.) и при $v_c = 1/2$ [8], существующие только для гамильтониана КФ. Сравнение полученных с их помощью ответов для наблюдаемых величин с результатами работы [7] позволит понять причины, приводящие к разным частотным зависимостям кондактанса, и, если это окажется возможным, устранить их. Часто это удается сделать за счет правильной схемы ренормировки ультрафиолетовых вкладов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КАЧЕСТВЕННОЕ ОБСУЖДЕНИЕ ЭФФЕКТА КЕЙНА–ФИШЕРА

В настоящее время для описания e - i -рассеяния почти общепринятым является подход КФ. В нем в гамильтониан с линейным спектром и электрон-электронным взаимодействием типа плотность-плотность вводится возможность перехода правого электрона в левый в точке расположения примеси (см. [1–3, 5, 6]):

$$\mathcal{H}_{KF} = \int dx dy [\hat{\Psi}_R^\dagger(x) V_{imp} \delta(x) \delta(x-y) \hat{\Psi}_L(y) + \text{H.c.}], \quad (2)$$

где $\hat{\Psi}_R^\dagger(0)$ и $\hat{\Psi}_L^\dagger(0)$ — операторы рождения правого и левого электронов. Он не содержит прошедшей волны. Нетрудно убедиться, что гамильтониан такого типа не может правильно описывать рассеяние на точечной примеси на малых длинах. Для этого достаточно проинтегрировать линеаризованное уравнение Шредингера без взаимодействия по бесконечно малому интервалу вокруг примеси и получить равенство, в котором левая часть нечетна при инверсии, а правая — четна:

$$i[\Psi_R(\epsilon) - \Psi_R(-\epsilon)] = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dy V_{imp} \Psi_L(y) \delta(y).$$

Попытка же исправить такую чисто математическую некорректность с помощью введения плавного одномерного потенциала (такого что правая часть этого выражения была бы равна нулю) означает переход от точечной к дальнедействующей примеси, а ответы этой задачи качественно отличаются от случая точечной примеси. (Под точечной примесью мы понимаем примесь, размер которой a_i удовлетворяет условию $p_F a_i \ll 1$.) В такой некорректности нет большой беды, если длинноволновые эффекты дают вклад, параметрически больший, чем инфракрасная область ($\nu < 1/2$). (С большого расстояния рассеяние на примеси выглядит точечным.) Однако даже в этом случае она приводит к существованию нефизических ультрафиолетовых расходимостей в наблюдаемых величинах (и поэтому соответствующие слабые нельзя считать малыми), стартующих уже с точки $v_c = 1$ (невзаимодействующие электроны). Все вклады в частотно-зависящий кондактанс, существующие даже для невзаимодействующих электронов, являются артефактом не очень корректного в ультрафиолетовой области подхода и должны быть просто опущены. Однако ситуация осложняется, когда речь идет о вкладах в наблюдаемую величину от ультрафиолетовой области, вычисленных с помощью точного решения гамильтониана КФ при одном значении v_c . Но и в этом случае есть выход: имея аналитическое выражение, нетрудно проверить, как изменится ответ для наблюдаемой величины при исключении из него вклада от области глубокого ультрафиолета (длин волн, много меньших $1/M$). Если окончательный ответ покажет, что вклад от ультрафиолетовой области существен, то такую величину нельзя будет «просто вычислить», имея точное выражение, полученное из гамильтониана (2), потому что сам гамильтониан КФ в области малых длин некорректен. Вопрос о возможности существования вклада от ультрафиолетовой области и

способе его вычисления в этом случае потребует отдельной физической аргументации.

Вначале обсудим вопрос о том, какие физические величины определяют ультрафиолетовое обрезание M . Прежде всего нам необходимо разделить полную волновую функцию электрона на правую и левую «частицы», т.е. выделить огибающую на фоне быстрых осцилляций в выражении

$$\hat{\Psi}(x, t) = \exp(ip_F x) \hat{\Psi}_R(x, t) + \exp(-ip_F x) \hat{\Psi}_L(x, t).$$

Грубо говоря, нам надо «усреднить» это выражение по масштабам $\Delta x \gg 1/p_F$. В нашей задаче это условие позволяет разделить полную волновую функцию электрона на падающую и отраженную волны на расстоянии $\gtrsim 1/p_F$ от примеси. Кроме того, необходимо вспомнить о конечной толщине канала и заметить, что волновая функция отраженной от точечной примеси частицы будет зависеть от расстояния от примеси, равно $\sqrt{y^2 + z^2 + x^2}$, где y, z — координаты в плоскости перпендикулярного сечения канала, а x — вдоль его оси. Таким образом, если все три переменные одного порядка, то переменные «не делятся», и провести независимое от продольного движения усреднение трехмерного гамильтониана по волновой функции поперечного размерного квантования в этой области невозможно. Для этого требуется условие $x \gg d$, где d — поперечный размер канала. Таким образом, ультрафиолетовое обрезание в подходах КФ и работы [7], т.е. масштаб, начиная с которого электроны можно считать одномерными, определяется величиной $\max(1/p_F; d)$, а глубокий ультрафиолет — это область вблизи примеси, в которой в нашей задаче электроны должны описываться как трехмерные частицы.

Постановка задачи об электрон-примесном рассеянии в работе [7] принципиально отличается от подхода КФ. В качестве первого шага (до вывода длинноволнового гамильтониана) мы учли, что разделение полной волновой функции электрона на волновые функции правого (Ψ_R) и левого (Ψ_L) электронов вблизи примеси на длинах $\sim a_i$ невозможно. Для такой задачи стандартным способом решения является учет примесного рассеяния как граничного условия до линеаризации исходного уравнения Шредингера второго порядка. Эта процедура усложняется из-за существования сильного $e-e$ -взаимодействия. Кратко она изложена в работе [7]. Однако на качественном уровне ответы можно понять, обратившись к хорошо известному ответу гидродинамической задачи: любой поток (а тем более одномерный), встретив препятствие, образует горб перед препятствием и впадину за ним (и на-

ши вычисления приводят к этой же картине). Характерный размер такого двойного слоя — порядка размера примеси. (Кроме того, за препятствием существует еще достаточно протяженный ламинарный след, который уже описывается чисто одномерной теорией с линеаризованным гамильтонианом.) В случае точечной примеси этот эффект означает существование скачка заряда в точке $x = \pm 0$. Поэтому единственным вариантом появления конечного заряда вокруг δ -функциональной примеси является существование ультрафиолетовых расходимостей в аналитических выражениях для электронной концентрации в точке $x \rightarrow \pm 0$, которые должны быть «вычислены» до перехода к длинноволновому гамильтониану. Критерием правильности регуляризации расходящихся выражений для концентрации электронов в нашем случае являлось появление δ -функциональных источников, связанных с прямым нарушением киральной симметрии, в аналитическом выражении для адлеровской аномалии при сохранении уравнения неразрывности для полного электрического заряда. (Для того чтобы оба эти требования выполнялись, достаточно потребовать калибровочной инвариантности выражений для электронной плотности [9, 10].) Такие ультрафиолетовые расходимости имеют понятную физическую природу и обязаны существовать при любом способе описания $e-i$ -рассеяния на короткодействующей примеси. Несмотря на то, что двойной слой заряда локализован вблизи примеси на микроскопическом масштабе, его существование важно для одномерной области, так как он приводит к возникновению в ней полей, искажающих волновую функцию основного состояния системы без примеси. Частотная зависимость кондактанса — это и есть проявление эффектов, связанных с экранировкой одномерными электронами электрических полей, появившихся из-за существования двойного слоя и ламинарного следа. Только после решения граничной задачи можно приступить к выводу длинноволнового гамильтониана.

Из всего это обсуждения следует, что гамильтониан, полученный в [7], и гамильтониан КФ — это разные теории. Они различаются поведением решений в области глубокого ультрафиолета (на масштабах $\ll 1/M$). В первом подходе вклад от этой области в наблюдаемые величины мал и в случае сильного $e-e$ -взаимодействия. (Отсутствие ультрафиолетовых расходимостей — прямое следствие регуляризации аналитических выражений для скачка заряда.) Поэтому вклад от всей ультрафиолетовой области в наблюдаемые величины, полученный с помощью подхода со шшивкой, определяется верхней границей

переходной области. (Теория сходится в ультрафиолетовой области, а единственный связанный с ней масштаб — $1/M$.) Это позволило вычислить частотную зависимость кондактанса, но коэффициент при ней оказался неуниверсальным и зависел от деталей e - e -взаимодействия на длинах $\sim 1/M$. Что касается КФ-подхода, то он нуждается в уточнении, касающемся области глубокого ультрафиолета. Аналогичную некорректность подходов в ультрафиолетовой области часто оказывалось возможным компенсировать схемой ренормировки ультрафиолетовых вкладов. При этом одним из критериев правильности окончательных ответов для нас будет являться дуальность задач с притяжением и отталкиванием¹⁾.

Для того чтобы сформулировать правило работы с ультрафиолетовыми вкладами в КФ-подходе, необходимо обсудить вид основного состояния, который, с нашей точки зрения, реализуется в LL с отталкиванием (канал без примеси). Обычная интерпретация основного состояния LL основана на существовании аномалий в корреляторах типа плотность–плотность. Они ассоциировались с пайерлсовской нестабильностью, показывающей (в случае однокомпонентных фермионов) «тенденцию к образованию волны зарядовой плотности» с волновым вектором, равным удвоенному импульсу Ферми [11]. Конечно, такое состояние возможно, однако кулоновское взаимодействие в одномерных системах очень сильное. Поэтому для его реализации требуется достаточно большая энергия. Понятно, что основное состояние, состоящее из электронейтральных комплексов, имело бы меньшую энергию. Электронейтральность означает, что оно должно состоять из электронов и дырок, двигающихся в одном направлении. Единственным кандидатом на такие «экситоноподобные» образования могут быть комплексы, состоящие из киральных пар типа $\hat{a}_R^\dagger \hat{b}_L^\dagger$ (здесь \hat{a}/\hat{b} — операторы уничтожения электрона/дырки), представляющие из себя бозе-частицы. Поэтому все они должны «накапливаться» в основном состоянии, образуя конденсат с макроскопически большим (растущим с увеличением объема) числом частиц. Обычным аргументом против такой картины является так называемая теорема Ландау [12], согласно которой фазовый переход второго рода в одно-

мерной системе невозможен. Однако при доказательстве теоремы имелась ввиду бесконечная система. Для нее легко показать, что корреляционная функция двух бозонов уменьшается экспоненциально на длинах больших $r_c \sim v_c/T$ и степенным образом на длинах меньших r_c . Но в канале конечной длины экспоненциальная асимптотика может просто «не поместиться» в образце. Это дает возможность оценить температуру такого фазового перехода как $T_c \sim v_c/L$. При меньшей температуре в конечном одномерном канале возможен фазовый переход второго рода. (Мы считаем число уровней продольного квантования $N_e \sim p_FL \gg 1$. Это позволяет заменить римановские суммы по p_n интегралами, но в главном порядке по $1/N_e$ не требует предела $L \rightarrow \infty$. Таким образом, мы можем проводить вычисления, как в случае бесконечного образца, но сохранить конечную L в критериях фазового перехода. Отметим, что предел $\omega \rightarrow 0$ в определении кондактанса нужно понимать в смысле $\omega \ll v_c/L$ [8]. Это условие имеет простой физический смысл: внешнее поле должно быть почти постоянным все время пролета квазичастицы через одномерный канал.)

Для того чтобы доказать правильность этих утверждений, нами была вычислена волновая функция основного состояния для LL ($|\Omega\rangle$). Эта задача не является точно решаемой, и аналитическое выражение для нее может быть написано только в пределе бесконечно сильного e - e -взаимодействия. В этом приближении $|\Omega\rangle$ представляет из себя волновую функцию, описывающую настоящий киральный конденсат (с ненулевой плотностью) и состоящий из точечных электронейтральных комплексов [13]. Важным свойством таких одномерных фаз, существующим и в $|\Omega\rangle$, является появление в теории еще одной характерной температуры, $T_d = v_F/L$, — температуры вырождения. Ниже T_d аномальное среднее $\langle \Omega | \hat{a}_R^\dagger \hat{b}_L^\dagger | \Omega \rangle = 0$ (несмотря на существование конденсата), а выше — отлично от нуля. Дело в том, что матричный элемент $\langle \Omega | \hat{a}_R^\dagger \hat{b}_L^\dagger | \Omega \rangle \neq 0$ только в том случае, когда $|\Omega\rangle$ представляет из себя пакет, состоящий из состояний с разным числом пар $\hat{a}_R^\dagger \hat{b}_L^\dagger$, а характерная разность энергий этих состояний порядка $v_F/L < T_c$. В этой работе мы предполагаем, что $T \ll T_d$ (в противном случае при выводе выражения (5) необходимо учитывать аномальные средние). В высокотемпературной области ($T \gtrsim T_K$) аналитическое выражение для $|\Omega\rangle$ соответствует состоянию, в котором киральные пары коррелированы только на расстоянии $\sim r_c$. Таким образом, наше основное состояние не противоречит теореме Ландау. При уменьшении силы e - e -взаимодействия по-

¹⁾ В работе [7] было показано, что перенормированный коэффициент отражения для LL с притяжением получается из коэффициента прохождения для LL с отталкиванием заменой $v_c; K_0 \leftrightarrow v_c^{-1}; R_0$. Это свойство точное и справедливое при любых виде и силе e - e -взаимодействия. При доказательстве предполагалась только сходимости (хотя бы асимптотическая) ряда теории возмущений.

лучить аналитическое выражение для $|\Omega\rangle$ не представляется возможным, но можно показать, что корреляторы типа $\langle \Omega | \hat{b}_L(x) \hat{a}_R(x) \hat{a}_R^\dagger(y) \hat{b}_L^\dagger(y) | \Omega \rangle$ убывают степенным образом. Это дает возможность оценить число киральных пар в образце [13]:

$$N_{cir} \sim L^\beta, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

Таким образом, в реальной ситуации основное состояние LL — это тоже состояние с дальним порядком (фаза БКТ [14]). В свете изложенного выше становится понятным, почему исходные электроны не являются элементарными возбуждениями фермижидкости. Как и в теории сверхпроводимости, ими являются нормальные возбуждения над правильным основным состоянием, определяемые условием $\hat{a}_\chi |\Omega\rangle = 0$ [15] (а не над сферой Ферми исходных электронов). Волновая функция такой квазичастицы, двигающейся вправо (χ_R), представляет из себя сложный (нелинейный) пакет из правых электронов и левых дырок, ортогональный $|\Omega\rangle$ и имеющий электрический заряд $e_0/\sqrt{v_c}$. Это есть не что иное, как правый квазиэлектрон, двигающийся вместе с поляризационным облаком. Поэтому его заряд не квантуется в единицах заряда свободного электрона, e_0 (ср. с [16]).

Переход к квазичастичному представлению в гамильтониане КФ дает ключ к пониманию физической причины «закрытия» одномерного канала сколь угодно слабым примесным рассеянием. Она реализуется для e - e -взаимодействия любой силы, но становится очевидной в рассматриваемой задаче. В ней примесная часть гамильтониана рассеяния оказывается пропорциональной полю $\hat{\chi}$ (т.е. вершины не сохраняют электрический заряд, см. уравнение (7)). Это означает, что процесс рассеяния не сводится к рассеянию квазичастицы на примеси: в нем обязан участвовать конденсат. Появление точечной примеси искажает волновую функцию конденсата. Это делает волновую функцию падающей на примесь квазичастицы неортогональной к новому основному состоянию, что приводит к появлению дополнительного канала «отражения квазичастиц от примеси», аналогичного андреевскому отражению в сверхпроводнике [17]. Обсудим его подробнее. Для этого разделим волновую функцию квазичастицы, двигающейся вправо, на электронную и дырочную части. Тогда из-за неортогональности волновых функций нового основного состояния и квазичастицы и существования флуктуативных процессов образования электрон-дырочных пар левых электронов падающий на примесь правый электрон может «подхватить» левую дырку и уйти в конденсат, а

оставшийся левый электрон уйдет от примеси. Он будет восприниматься как отраженный примесью правый электрон,

$$\hat{a}_R^\dagger; \hat{a}_L^\dagger + \hat{b}_L^\dagger \rightarrow \hat{a}_R^\dagger \hat{b}_L^\dagger; \hat{a}_L^\dagger.$$

Важно, что вероятность этого процесса будет пропорциональна макроскопически большому числу «правых» пар конденсата, а так как сумма вероятностей всех возможных процессов равна единице, то вероятность обычного рассеяния электрона на примеси будет иметь малость $1/N_{cir}$. В результате этого в задаче пропадает единственный канал рассеяния, содержащий прошедшую волну. В итоге одномерный проводник и оказывается закрытым для постоянного тока. Таким образом, бесконечно слабое e - i -рассеяние «разрезает» канал. Эта качественная картина очень хорошо видна в точном решении при $v_c = 2$. Согласно выражению (13) «отраженная от примеси» волна (это майоран β) не входит в выражение для гамильтониана рассеяния (11). Такое может быть только в том случае, когда процесс рассеяния нарушает в подсистеме квазичастичных возбуждений какой-нибудь закон сохранения. В данном случае — электрического заряда (см. выражение (7)). Чтобы этого не произошло во всей системе, и рождается частица β . Обычный канал примесного рассеяния входил бы в гамильтониан как $\sum_{n,m} V_{n,m} \Phi_n \beta_m$, но он имел бы малость $1/\sqrt{N_{cir}}$.

Для того чтобы понять роль ультрафиолетовой области в процессе e - i -рассеяния, вспомним, что e - e -взаимодействие оказывается аномально сильным в одномерном случае, потому что пакеты, созданные из фермионов с линейным спектром, вообще не расплываются. Это приводит к тому, что в LL два взаимодействующих пакета одинаково сильно взаимодействуют все время нахождения в одномерной области. Подходя на расстояние порядка $1/M$ к примеси, пакеты начинают расплываться, так как в этой области электроны уже не описываются чисто одномерной теорией. Расплываются сначала медленно (начало переходной области), а потом, подходя к трехмерной области глубокого ультрафиолета, быстро. На масштабе $\ll 1/M$ e - e -взаимодействие становится трехмерным, т.е. слабым по сравнению с одномерным. Таким образом, в случае отталкивания по мере «увеличения размерности» канала пропадает причина неустойчивости основного состояния невзаимодействующих электронов при включении e - e -взаимодействия. Как следствие этого, в области глубокого ультрафиолета (на расстоянии $\sim d$ от примеси) пропадает киральный конденсат (по крайней мере в случае точечного e - e -взаимодействия).

Эта картина качественно отличается от LL с притяжением, потому что в последнем случае сфера Ферми неустойчива относительно бесконечно слабого притяжения в любой размерности. Из-за этого упругая примесь в случае притяжения «не разрезает» канал. (На самом деле, последнее утверждение — это одномерная модификация общей теоремы Андерсона для сверхпроводимости [18].) К сожалению, построить аналитическую теорию для короткодействующей примеси, справедливую во всей ультрафиолетовой области, невозможно. Для этого нужно непрерывным по размерности образом описать переход от одномерной области к трехмерной, решая в переходной области и проблемы калибровочно-инвариантного определения расходящегося произведения двух фермионных операторов, взятых в одной точке (аномалия Адлера [9, 10]). Поэтому при обсуждении вопроса о величине ультрафиолетового вклада в кондактанс нам придется обходиться качественными соображениями.

Учитывая то, что мы рассматриваем точечное e - e -взаимодействие, нахождение электронов в области глубокого ультрафиолета (трехмерного движения) означает, что они относительно слабо взаимодействуют друг с другом, т.е. не могут образовать и новую киральную пару. А это означает, что область глубокого ультрафиолета не может давать вклад в аномально сильный канал рассеяния, связанный с существованием конденсата. (То есть все, что может давать эта область, должно сводиться к перенормировке затравочной амплитуды e - i -рассеяния, не зависящей от частоты.) Отсюда следует, что если аналитическое выражение для частотно-зависящего кондактанса, следующее из точного решения в модели КФ, показывает, что небольшое изменение ответа в ультрафиолетовой области не сводится к перенормировке затравочной амплитуды e - i -рассеяния, то вклад этой области в наблюдаемую величину есть артефакт теории, связанный с некорректностью гамильтониана (2) в области глубокого ультрафиолета. Поэтому он должен быть экстрагирован из выражения для наблюдаемой величины, связанной с изменением числа киральных пар конденсата. Это есть дополнительное условие, позволяющее использовать некорректный в области глубокого ультрафиолета гамильтониан КФ в случае сильно взаимодействующих электронов²⁾. Отсюда следует и то,

что весь ультрафиолетовый вклад в кондактанс может сводиться только к вкладу от переходной области. Но она в лучшем случае будет описываться одномерной теорией только по порядку величины, и то только тогда, когда вклад от области $\leq 1/M$, полученный с помощью одномерных формул, будет определяться верхней границей переходной области. Качественно эта картина будет совпадать с той, которая получилась в подходе со сшивкой. Существенное различие будет состоять только в том, что последняя привела к ней «автоматически» (без дополнительных соображений), но для этого потребовалась регуляризация скачка заряда и дальнейшие достаточно трудоемкие (особенно для отталкивания) вычисления. В результате этих вычислений оказалось, что корреляционная функция, получающаяся в подходе со сшивкой и определяющая силу e - e -взаимодействия, не расходится, а стремится в области глубокого ультрафиолета к константе. Это и привело к тому, что в случае сильного e - e -взаимодействия вклад в наблюдаемую величину дала только переходная область, а изменение вида эффективного e - e -взаимодействия в этой области сводилось к перенормировке затравочного e - e -взаимодействия и не изменяло частотной зависимости кондактанса.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНДАКТАНСА

Для вычисления кондактанса одномерного канала удобно воспользоваться ответом, полученным в работе [8] и позволяющим выразить кондактанс через частотно-зависящую $(\Delta S(\omega) = S(\omega) - S(0))$ часть фейнмановского коррелятора:

$$S(t_1 - t_2) = \langle T\{\hat{s}(t_1), \hat{s}(t_2)\} \rangle, \quad (3)$$

где $\{..., ..\}$ — антикоммутатор, а $\hat{s}(t)$ равен

$$\hat{s}(t) = 2i[\hat{\Psi}_L^\dagger(t, x=0)\hat{\Psi}_R(t, x=0) - \hat{\Psi}_R^\dagger(t, x=0)\hat{\Psi}_L(t, x=0)]. \quad (4)$$

Физический смысл оператора $\hat{s}(t)$ — это киральный заряд, уходящий в конденсат (мы определили киральный заряд как +1 для R-электронов и

²⁾ Это утверждение фактически совпадает с исходным предположением теории ренормгруппы: наблюдаемые величины, вычисленные с помощью неизвестного нам точного гамильтониана, сходятся. Это означает, что в ультрафиолетовой (не в инфракрасной) области есть масштаб (в подходе

Гелл-Манна-Лоу он вводится регуляризацией), начиная с которого область глубокого ультрафиолета не дает вклада в наблюдаемые величины. Все отличие от «обычной», расходящейся на ультрафиолете задачи при $v_c = 1/2$ [8] состоит в том, что при $v_c = 2$ выражение для кондактанса, вычисленное с помощью точного решения гамильтониана КФ, сходится.

-1 для L-электронов). Вычисление этого коррелятора надо проводить при вещественных частотах, а для перехода к кондактансу (запаздывающий отклик) его фурьял надо продолжить по правилу $|\omega| \rightarrow +\sqrt{\omega^2 + i\delta}$ ³⁾. В итоге кондактанс может быть записан в виде

$$\mathcal{G}(\omega) = \frac{e_0^2}{4v_c^2|\omega|} V_{imp}^2 \text{Re} \Delta \mathcal{S}(|\omega|). \quad (5)$$

Отметим, что в правой части (5) нужно учитывать только зависящий от частоты вклад отношения $\Delta \mathcal{S}(\omega)/|\omega|$. Дело в том, что не зависящая от ω часть этого отношения фактически не может быть вычислена в рамках данного подхода, так как окончательный ответ для линейного отклика, полученный в [8], содержал еще и произвольное решение однородного уравнения. Коэффициент, с которым это решение входит в ответ, должен определяться физическим условием. В случае отталкивания условие состоит в полном закрытии канала при $\omega = 0$. Его всегда можно удовлетворить при любой величине постоянной части $\Delta \mathcal{S}(\omega)/|\omega|$ за счет решения однородного уравнения.

Как уже отмечалось, причина, по которой взаимодействие одномерных фермионов с линейным спектром оказывается аномально сильным, состоит в том, что в этом случае пакеты, созданные из таких фермионов, не расплываются. Отсюда следует и то, что любое возбужденное состояние с данной энергией может быть представлено в виде большого числа различных пакетов, состоящих как из четного числа фермионов (бозе-частицы), так и из нечетного числа (фермионы). Математически это выражается в существовании соотношений, дающих возможность представить любой одномерный фермион как пакет бозонов (формулы бозонизации). Это дало возможность написать выражение для операторов нормальных возбуждений LL с точечным $e-i$ -взаимодействием [15]. Учет электрон-примесного рассеяния в гамильтониане (2) при выполнении условия $2/v_c = m^2$, $m = 1, 2, 3, \dots$, добавляет к свободному гамильтониану нормальных возбуждений слагаемое

$$\propto \frac{\Delta^{1-1/v_c}}{\sqrt{L}} V_{imp} \times [\hat{\chi}_2(0) \partial_x \hat{\chi}_2(0) \dots \partial_x^{m-1} \hat{\chi}_2(0) + \text{H.c.}]. \quad (6)$$

Здесь $\hat{\chi}_2$ — квазичастица, рассеивающаяся на примеси, а второе (ортогональное ему) поле χ_1 не вза-

имодействует с точечной примесью [19] и тоже дает вклад в баллистический ток. Константа связи определяется величиной Δ :

$$\ln \Delta = \ln \left(\frac{\mathcal{M}L}{2\pi} \right) + \gamma_E,$$

где \mathcal{M} — ультрафиолетовое обрезание. Формально оно возникает из-за того, что произведение фермионных операторов, взятых в одной точке, в одномерном случае всегда расходится. Эта расходимость отражает тот факт, что на длинах $\sim 1/M$ рассеяние становится трехмерным, а одномерные формулы бозонизации — неприменимыми. Отсюда следует, что гамильтониан (6) (как и исходный гамильтониан КФ) неприменим в ультрафиолетовой области (на расстояниях $\leq 1/M$). При $v_c = 2$ ($m = 1$) он имеет вид

$$\mathcal{H}_\chi = v_c \int dx \hat{\chi}_2^\dagger(x) i \partial_x \hat{\chi}_2(x) + \gamma_2 [\hat{\chi}_2^\dagger(x=0) + \hat{\chi}_2(x=0)], \quad (7)$$

где

$$\gamma_2 = V_{imp} \sqrt{\exp(\gamma_E) \mathcal{M}/2\pi}.$$

Получившаяся вершина рассеяния нормальных квазичастиц на примеси показывает, что электрический заряд в подсистеме нормальных возбуждений не сохраняется. Это означает, что в переходе принимает участие конденсат. Поэтому нам потребуется еще одна динамическая переменная. Ее удобно ввести, используя представление Гинье. Для этого введем пространственно-однородное майорановское поле $\hat{\zeta}$, такое что

$$\hat{\zeta}^\dagger = \hat{\zeta}, \quad \hat{\zeta}^2 = 1, \quad \partial_x \hat{\zeta} = 0,$$

которое антикоммутирует со всеми фермионными операторами. С его помощью мы можем представить поле $\hat{\chi}_2$ в виде

$$\hat{\chi}_2(x=0) = \int_0^\infty (dp) [\hat{\zeta} \hat{a}(p) + \hat{b}^\dagger(p) \hat{\zeta}], \quad (8)$$

так как это не противоречит фермионным коммутационным свойствам. Такое введение квазиэлектронов и квазидырок предпочтительно, когда вершины гамильтониана не сохраняют заряд. Если заряд сохраняется, то независимая переменная $\hat{\zeta}$ в конце концов «вылетит» из теории. В случае несохранения заряда в подсистеме квазичастичных возбуждений она позволит нам учесть процессы, протекающие в конденсате, но существенные для отражения нормальных квазичастиц от примеси.

³⁾ Вопрос, связанный с аналитическим продолжением, подробно обсужден в [8].

Подставляя (8) в (7), мы убедимся, что с примесью взаимодействует только поле

$$\alpha(p) = [a(p) + b(p)]/\sqrt{2},$$

а ортогогальная ему комбинация

$$\beta = [a(p) - b(p)]/\sqrt{2}$$

не войдет в примесную часть гамильтониана, возникшую из (2). Она будет описывать квазиэлектроны или квазидырки, возникновение которых требуется законом сохранения электрического заряда во всей системе (нормальные возбуждения и конденсат). Далее нам будет удобно перейти в майорановское представление

$$\hat{\chi}_2(x) = \frac{\hat{\zeta}}{\sqrt{2}}[\hat{b}(x) + i\hat{\Phi}(x)] \quad (9)$$

и выразить майораны $\hat{b}(x)$ и $\hat{\Phi}(x)$ через операторы рождения и уничтожения квазиэлектронов и квазидырок. Сравнивая определения (9) и (8), имеем

$$\begin{aligned} \hat{b}(p) &= \hat{\beta}(p)\theta(p) + \hat{\beta}^\dagger(-p)\theta(-p), \\ \hat{\Phi}(p) &= -i\hat{\alpha}(p)\theta(p) + i\hat{\alpha}^\dagger(-p)\theta(-p). \end{aligned} \quad (10)$$

В результате весь вклад от примесного рассеяния в (7) определяется только полем $\hat{\Phi}$ и гамильтониан равен

$$\mathcal{H}_{imp} = i\gamma_2\sqrt{2}\hat{\zeta}\frac{1}{L}\sum_{n\neq 0}\hat{\Phi}(p_n). \quad (11)$$

В него не входит майоран \hat{b} . Эта волна возникает как следствие закона сохранения полного электрического заряда всей системы, и только \hat{b} входит в выражение для \hat{s} . (То есть только коррелятор полей \hat{b} входит в выражение для перенормированного взаимодействием коэффициента отражения электронов от примеси и определяет кондактанс). Заметим, что (4) отличается от гамильтониана (2) общим коэффициентом и относительным знаком слагаемых. Повторяя предыдущие вычисления, имеем

$$\hat{s}(x=0) = -2i\gamma_2^s [\hat{\chi}_2^\dagger(x=0) - \hat{\chi}_2(x=0)], \quad (12)$$

где $\gamma_2^s = \gamma_2/V_{imp}$. После подстановки в эту формулу выражения (9) получаем

$$\hat{s}(x=0) = 2i\sqrt{2}\gamma_2^s\hat{\zeta}\int(dp)\hat{b}(p). \quad (13)$$

В отличие от бозонного гамильтониана, линейный по полю член в фермионном гамильтониане (11) не

может быть приведен к квадратичной форме простым сдвигом поля $\hat{\Phi}_n$ на постоянную величину, так как это будет противоречить правилу антикоммутиации. Однако гамильтониан (11) может быть представлен как квадратичный, если считать переменную $\hat{\zeta}$ нулевой компонентой поля $\hat{\Phi}$:

$$\hat{\Phi}_0 = \hat{\zeta}/\sqrt{2},$$

см. [20]. В результате (11) уже приводится к квадратичной форме с сохранением правил антикоммутиации для полей $\hat{\Phi}_n$. Вычисление кондактанса облегчается тем, что коррелятор $\mathcal{S}(t)$ (уравнение (3)) определяется функцией Грина $\langle\hat{s}(t,0)\hat{s}(0,0)\rangle$. Таким образом, вся нетривиальная часть вычислений связана только с полем $\hat{\zeta}(t)$ в гайзенберговском представлении. После диагонализации (перехода к не взаимодействующим полям $\hat{\lambda}_n$) все сведется к замене

$$\hat{\lambda}_n \rightarrow \hat{\lambda}_n \exp(-i\epsilon_n t).$$

В Приложении В показано, что функция Грина $\langle\hat{\zeta}(t)\hat{\zeta}(0)\rangle$ выразится через функцию Грина свободных полей $\hat{\lambda}_n(t)$:

$$\begin{aligned} \langle\hat{\zeta}(t)\hat{\zeta}(0)\rangle &= -\frac{16\gamma_2^2}{L}\sum_{n\neq 0}\frac{\exp(-i\epsilon_n t)}{\mu^2 + \epsilon_n^2} \times \\ &\times (\theta(t)\theta(n) - \theta(-t)\theta(-n)). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\mu = \gamma_2^2/v_c \sim \mathcal{M}V_{imp}^2$ — параметр ультрафиолетового обрезания этого коррелятора. Дальнейшее вычисление $\mathcal{S}(t)$ сводится к вычислению произведения $\langle\hat{\zeta}(t,0)\hat{\zeta}(0,0)\rangle\langle\hat{b}(t,0)\hat{b}(0,0)\rangle$ (здесь \hat{b} — свободные майораны, «отраженные от примеси», а t имеет смысл времени, отсчитанного от момента «отражения» квазичастицы от примеси). В Приложении А показано, что в термодинамическом пределе (главный член по параметру $1/ML \ll 1$) спектр квазичастиц $\lambda(k)$ тоже равен $\epsilon(k) = v_c k$. В итоге получаем

$$\mathcal{S}(t) = 32i\frac{(\gamma_2^s\gamma_2)^2}{\pi^2 v_c}\int_0^\infty \frac{d\epsilon \exp(-i\epsilon|t|)}{(\mu^2 + \epsilon^2)|t|}. \quad (15)$$

Это выражение четно по t , поэтому $\text{Re}\Delta\mathcal{S}(\omega)$ определяется функцией Раабе

$$\mathcal{R}_a(\mu t) = \int_0^\infty d\epsilon \frac{\sin(\epsilon\mu t)}{1 + \epsilon^2},$$

медленно убывающей на асимптотике $\mu t \rightarrow 0$ (как $\mu t \ln(\mu t)$ [21]). В итоге весь коррелятор оказывается растущим в области глубокого ультрафиолета.

В таком случае нам надо убедиться, что изменение выражения (15) в области глубокого ультрафиолета (где гамильтониан КФ неправильно описывает $e-i$ -рассеяние) не изменяет частотной зависимости кондактанса. Это можно сделать, просто обрезав вклад от (15) в кондактанс на масштабе $t \sim 1/M$. Если вклад от области $\leq 1/M$ мал, то такая процедура вообще не изменит окончательный ответ. Он совпадет с точным (в математическом смысле) ответом гамильтониана КФ. В этом случае его некорректность на малых длинах будет несущественна. (Точно так же, как в случае слабого $e-e$ -взаимодействия, когда ответы от инфракрасной области параметрически велики по сравнению с вкладом от ультрафиолета.) Далее мы убедимся в том, что такое изменение коррелятора $\mathcal{S}(t)$ качественно изменит частотную зависимость кондактанса, т.е. роль ультрафиолетовой области не сводится к перенормировке затравочной амплитуды рассеяния электронов на примеси. В таком случае мы должны вспомнить, что исходный гамильтониан неправилен в области глубокого ультрафиолета, а выражение (15) справедливо лишь на асимптотике $t \gg 1/\mu$, когда родившееся возбуждение \mathcal{B} находится далеко от примеси. Заметим, что в этой области асимптотический ряд теории возмущений

$$\sum_{m=0}^M \frac{(2m+1)!}{(\mu|t|)^{2m+1}}$$

сходится к $\mathcal{R}_a(\mu t)$. Поэтому можно воспользоваться тем, что в этой области нам известна аналитическая функция, к которой сходится весь ряд, а модель КФ в данном случае приводит к сходящемуся в ультрафиолетовой области выражению для частотно-зависящего вклада в кондактанс. Тогда мы можем получить ответы с точностью до коэффициента порядка единицы. Это удастся потому, что правильное, но неизвестное нам в ультрафиолетовой области, выражение для интересующего нас коррелятора $\mathcal{S}_{ac}(t)$ при $t \sim 1/\mu$ должно еще совпадать по порядку величины с (15), а вклад в частотно-зависящий кондактанс от области глубокого ультрафиолета, вычисленный с помощью $\mathcal{S}_{ac}(t)$, может сводиться лишь к перенормировке затравочной амплитуды $e-i$ -рассеяния и не имеет права менять частотную зависимость кондактанса. В таком случае можно для получения порядковой оценки кондактанса просто обрезать выражение для коррелятора на $t \sim 1/\mu$. (Конечно только тогда, когда вычисления показывают, что наблюдаемая величина определяется верхней границей переходной области, где

$\mathcal{S}_{ac}(t) \sim \mathcal{S}(t)$.) Таким образом,

$$\text{Re}\Delta\mathcal{S}(\omega) = -(8\gamma_2^s\gamma_2)^2 \frac{1}{\pi^2\mu v_c} \times \int_{1/\mu}^{\infty} dt \frac{1 - \cos(\omega t)}{t} \mathcal{R}_a(\mu t). \quad (16)$$

Вычитая и добавляя к полученному ответу вклад от области $(0, 1/\mu)$, получаем два выражения. Первое слагаемое ($\Delta_1\mathcal{S}(\omega)$ от области $(0, \infty)$) — «пороговое» (под интегралом по ϵ из-за существования закона сохранения энергии при упругом рассеянии носителей на примеси возникает множитель $\theta(|\omega| - \epsilon)$). Оно равно

$$\text{Re}\Delta_1\mathcal{S}(\omega) = -2(4\gamma_2^s\gamma_2)^2 \frac{1}{\pi\mu v_c} \text{arctg} \frac{|\omega|}{\mu} \quad (17)$$

и приводит к ответу, полученному в работах [1–6], представляя из себя точное (в математическом смысле слова) решение гамильтониана КФ⁴⁾.

Однако в результате вычитания у нас появилось еще одно слагаемое

$$\propto \int_0^1 d\tau \sin^2(\omega\tau/\mu) \mathcal{R}_a(\tau)/\tau,$$

в котором интеграл по времени определяется верхним пределом интегрирования, где $\mathcal{R}_a(\tau) \sim 1$. Это слагаемое мало по сравнению с первым членом разложения $\text{arctg}(|\omega|/\mu)$, но последнее сокращает баллистический вклад в линейном отклике. В кондактанс входят лишь следующие члены разложения арктангенса. Вычитание же дает линейный по частоте член, который в области малых частот и определяет асимптотику кондактанса. Физическая причина смены асимптотики с ω^2 на $|\omega|$ состоит в том, что на временах $t \leq 1/\mu$ энергия плохо определена. Поэтому вероятность рождения новой киральной пары, определяющая поток квазиэлектронов, двигающихся от примеси, не содержит δ -функционального множителя, выражающего закон сохранения энергии. В результате это слагаемое не имеет порога в подынтегральном выражении по энергии. Это приводит к тому, что вклад в кондактанс дает и область больших энергий. В итоге

$$\mathcal{G}(\omega) = e_0^2 V_{imp}^2 c \frac{|\omega|}{\mu}, \quad (18)$$

⁴⁾ В работе [5] получена полная частотная зависимость кондактанса (уравнение (5.6)), следующая из точного решения для гамильтониана КФ и совпадающая с (17).

где c — численный коэффициент порядка 1, перенормирующий амплитуду затравочного электрон-примесного рассеяния из-за e - e -взаимодействия в переходной области. Отметим, что такая «регуляризация» ультрафиолетового вклада приводит к дуальным ответам для жидкостей Латтинжера с отталкивающимися и притягивающимися фермионами. Как отмечалось выше, это свойство точное, оно должно выполняться для любого e - e -взаимодействия. Кроме того, эти ответы совпадают с результатами, полученными из подхода со сшивкой. Это позволяет надеяться на то, что более легкий с вычислительной точки зрения гамильтониан КФ, дополненный этим правилом, можно использовать и в случае сильного e - e -взаимодействия.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, можно сказать, что в случае сильного e - i -взаимодействия самая медленная (линейная по частоте) асимптотика кондактанса определяется поведением e - e -взаимодействия в области перехода от одномерного движения носителей заряда к трехмерному, реализующемуся на масштабах порядка толщины канала. Все отличие дуальных теорий с $v_c = 2$ и $v_c = 1/2$ (притяжение и отталкивание) возникает из-за того, что в случае притяжения вклад в кондактанс от ультрафиолетовой области расходится [8]. Однако в обеих задачах линейный по частоте вклад возникает из-за отсутствия закона сохранения энергии в области малых времен. Несмотря на это, точной дуальности в подходе с гамильтонианом КФ нет: в ответах совпадают только частотные зависимости самой медленной асимптотики. Исходя из того, что эти две теории имеют принципиально разное поведение в ультрафиолетовой области, определяющей кондактанс в случае сильного e - e -взаимодействия, следует ожидать и разной зависимости от силы e - e -взаимодействия ответов подхода КФ для притяжения и отталкивания при произвольном v_c . Получившееся выражение для кондактанса и качественная картина явления находится в соответствии и с результатами работы [7].

Благодарности. Автор благодарит Я.М. Бельтюкова и Ю.М. Гальперина за обсуждение работы и чтение рукописи.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРИВЕДЕНИЕ ГАМИЛЬТониАНА К ДИАГОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ

А. «Уравнение Шредингера» для матрицы поворота

Для того чтобы вычислить коррелятор $S(\omega)$, нам необходимо перейти от шредингеровского представления к гайзенберговскому. Это легко делается в случае свободных фермионов, в котором отличие одного представления от другого сводится к появлению множителя $\exp(-i\epsilon_n t)$. Для этого нужно привести (11) к диагональной форме. Отметим, что переменная ζ (теперь $\Phi_{n=0}$), входящая в гамильтониан, описывает изменение (а не полное число) киральных пар в основном состоянии. Отсюда следует, что матрица поворота определяется только процессами рассеяния, т.е. переходами между состояниями $\Phi_n \leftrightarrow \Phi_{n'}$; $n, n' \neq 0$ и $\Phi_n \leftrightarrow \Phi_0$. Поэтому матрица, приводящая (11) к диагональной форме, имеет вид

$$\lambda(\epsilon_n) = \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) \Phi(p_m) + Z(\epsilon_n) \Phi_0, \tag{19}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} T(p_m) \Phi(p_m).$$

(Аргументы элементов этой матрицы записываются как ϵ_n, p_m , чтобы не путать индексы повернутых и неповернутых полей; в этих обозначениях ϵ_n — энергия «повернутых» полей, а $v_c p_m$ — «неповернутых».)

Обратная матрица перехода может быть записана в виде

$$\Phi(p_{m_1}) = \frac{1}{L} \sum_{n_1 \neq 0} S^{-1}(\epsilon_{n_1}, p_{m_1}) \lambda(\epsilon_{n_1}) + Z^{-1}(p_{m_1}) \lambda_0, \tag{20}$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{L} \sum_{n_1 \neq 0} T^{-1}(\epsilon_{n_1}) \lambda(\epsilon_{n_1}).$$

Для того чтобы получить выражения для элементов обратной матрицы, подставляем уравнения (20) в (19):

$$\lambda(\epsilon_n) = \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) \left[\frac{1}{L} \sum_{n_1 \neq 0} S^{-1}(\epsilon_{n_1}, p_m) \lambda(\epsilon_{n_1}) + Z^{-1}(\epsilon_n) \lambda_0 \right] + Z(\epsilon_n) \frac{1}{L} \sum_{n_1 \neq 0} T^{-1}(\epsilon_{n_1}) \lambda(\epsilon_{n_1}).$$

Варьируя это выражение по λ_n , имеем

$$L = \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) S^{-1}(\epsilon_n, p_m) + Z(\epsilon_n) T^{-1}(\epsilon_n).$$

С другой стороны,

$$\{\lambda(\epsilon_n), \lambda(\epsilon_m)\} = L\delta_{n,-m}.$$

Подставляя сюда уравнение (19), получаем

$$L = \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) S(\epsilon_{-n}, p_{-m}) + Z(\epsilon_{-n}) Z(\epsilon_n). \quad (21)$$

Сравнивая эти два выражения, видим, что

$$S^{-1}(\epsilon_n, p_m) = S(\epsilon_{-n}, p_{-m}), \quad T^{-1}(\epsilon_n) = Z(\epsilon_{-n}). \quad (22)$$

Для того чтобы получить уравнения для матрицы поворота, нам надо сравнить коммутатор

$$[\lambda(\epsilon_n), \mathcal{H}_\lambda]_- = \epsilon_n \lambda(\epsilon_n)$$

с этим же коммутатором, записанным в терминах «неповернутых» полей $\hat{\Phi}$. Таким образом, нам надо вычислить коммутатор

$$\frac{v_c}{2L} \left[\sum_{n \neq 0} p_n \hat{\Phi}_{-n} \hat{\Phi}_n + 2i\gamma_2 \Phi_0 \frac{1}{L} \sum_{n \neq 0} \hat{\Phi}_n, \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} S(\epsilon_n, p_m) \Phi(p_m) + Z(\epsilon_n) \Phi_0 \right]_-.$$

Слагаемое с кинетической энергией дает

$$-\frac{v_c}{L} \sum_{m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}) p_{m_1} \Phi(p_{m_1}).$$

Осталось рассмотреть коммутатор

$$\left[2i\gamma_2 \Phi_0 \frac{1}{L} \sum_{n \neq 0} \hat{\Phi}_n, Z(\epsilon_n) \Phi_0 + \frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}) \Phi(p_{m_1}) \right]_-.$$

Первое слагаемое дает

$$-i\gamma_2 Z(\epsilon_n) \frac{1}{L} \sum_{n \neq 0} \hat{\Phi}_n,$$

а второе —

$$2i\gamma_2 \Phi_0 \frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}).$$

В итоге получаем равенство

$$-\frac{v_c}{L} \sum_{m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}) p_{m_1} \Phi(p_{m_1}) +$$

$$+ 2i\gamma_2 \Phi_0 \frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}) - i\gamma_2 Z(\epsilon_n) \frac{1}{L} \sum_{n \neq 0} \hat{\Phi}_n = -\epsilon_n \left(\frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}) \Phi(p_{m_1}) + Z(\epsilon_n) \Phi_0 \right).$$

Это соотношение должно выполняться на любых полях Φ , поэтому

$$(\epsilon_n - v_c p_m) S(\epsilon_n, p_m) = i\gamma_2 Z(\epsilon_n), \quad (23)$$

$$\epsilon_n Z(\epsilon_n) = -2i\gamma_2 \frac{1}{L} \sum_{m_1 \neq 0} S(\epsilon_n, p_{m_1}).$$

В итоге мы получили уравнение, определяющее спектр:

$$\epsilon_n = 2\gamma_2^2 \frac{1}{L} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{\epsilon_n - v_c p_m}. \quad (24)$$

Переходя к безразмерной энергии $y_n = L\epsilon_n/2\pi v_c$, получаем

$$y_n = d^2 \left[\pi \operatorname{ctg}(\pi y_n) - \frac{1}{y_n} \right], \quad d^2 = 2L \left(\frac{\gamma_2}{2\pi v_c} \right)^2 \gg 1, \quad (25)$$

или

$$\operatorname{tg}(\pi y_n) = \frac{\pi d^2 y_n}{d^2 + y_n^2}.$$

Заметим, что $[\gamma_2] \sim \sqrt{M}$, поэтому термодинамический переход в нашем случае означает пренебрежение поправками по $1/ML$ при $ML \gg 1$, но не требует предела $L \rightarrow \infty$. В нулевом приближении по этому параметру ищем решение в виде

$$y_n = n + \delta y_n, \quad n \gg \delta y_n.$$

Тогда сдвиг вокруг каждой точки $y_n = n$ удовлетворяет соотношению

$$\delta y_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi n}{1 + (n/d)^2} \right),$$

где arctg определен в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$.

В итоге спектр есть

$$\epsilon_n = \frac{2\pi v_c}{L} \left(n + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi n}{1 + (n/d)^2} \right) \right) \quad (26)$$

при условии $n \gg \delta y_n$. Но при $n \gg 1$ это условие всегда выполнено, так как arctg определен в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, т.е. ~ 1 . Отсюда следует, что сдвиг уровней мал и им можно пренебречь. И мы имеем спектр, удовлетворяющий периодическим граничным условиям: $y_n = n$. Переход в термодинамический предел совершается обычным образом, $ML \gg 1$, а $2\pi n/L = k$ не зависит от L . В итоге спектр не рассеивающихся на примеси полей тоже равен $\epsilon(k) = v_c k$.

В. Вычисление матрицы поворота

Соотношения (20) и (22) позволяют выразить поле Гинье через поля, диагонализующие гамильтониан (λ_n), а условие нормировки, записанное в виде (21) с учетом первого уравнения системы (23), дает возможность вычислить нужный нам элемент матрицы поворота $Z(\epsilon_n)$:

$$\left(\frac{\gamma_2}{2\pi v_c}\right)^2 L \sum_{m_1 \neq 0} \frac{Z(\epsilon_n)Z(-\epsilon_n)}{(y_n - m_1)^2} + Z(y_n)Z(-y_m) = L. \quad (27)$$

Для вычисления суммы, стоящей в этом выражении, заметим, что

$$\begin{aligned} -\partial_y \sum_{m_1 \neq 0} \frac{1}{y_n - m_1} &= -\partial_y \left(\pi \operatorname{ctg}(\pi y) - \frac{1}{y} \right) = \\ &= \pi^2 \left(1 + \frac{1 - \sin^2(\pi y)}{\sin^2(\pi y)} \right) - \frac{1}{y^2} = \\ &= \pi^2 + \pi^2 \operatorname{ctg}^2(\pi y) - \frac{1}{y^2} = \pi^2 + \frac{2}{d^2} + \frac{y_k^2}{d^4}. \end{aligned}$$

В итоге, пренебрегая поправками по $1/L$, получаем окончательное выражение для элементов матрицы перехода к диагональному виду:

$$Z(\epsilon_n) = \frac{2\sqrt{2}i\gamma_2 \operatorname{sign}(\epsilon_n)}{\sqrt{\mu^2 + \epsilon_n^2}}, \quad (28)$$

$$S(\epsilon_n, p_m) = -\frac{2\sqrt{2}\gamma_2^2 \operatorname{sign}(\epsilon_n)}{\sqrt{\mu^2 + \epsilon_n^2}(\epsilon_n - v_c p_m)}, \quad (29)$$

где $\mu = \gamma_2^2/v_c \sim \mathcal{M}$. Это позволяет выразить поле Гинье в гайзенберговском представлении через поля свободных квазичастиц $\lambda(\epsilon_n)$:

$$\zeta(t) = -\frac{4i\gamma_2}{L} \sum_{n \neq 0} \frac{\operatorname{sign}(\epsilon_n)}{\sqrt{\mu^2 + \epsilon_n^2}} \lambda(\epsilon_n) \exp(-i\epsilon_n t). \quad (30)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **46**, 15233 (1992).
2. A. Furusaki and N. Nagaosa, Phys. Rev. B **47**, 4631 (1993).
3. A. Furusaki, Phys. Rev. B **56**, 9352 (1997).
4. L. I. Glazman, K. A. Matveev, and Yue D, Phys. Rev. B **49**, 1966 (1994).
5. P. Fendley, A. W. W. Ludwig, and H. Saleur, Phys. Rev. B **52**, 8934 (1995).
6. P. Fendley, A. W. W. Ludwig, and H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **74**, 3005 (1995).
7. В. В. Афонин, В. Ю. Петров, Письма в ЖЭТФ **97**, 587 (2013).
8. В. В. Афонин, ЖЭТФ **163**, 238 (2023).
9. M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1996).
10. S. L. Adler and R. F. Dashen, *Current Algebras and Applications to Particle Physics*, W. A. Benjamin Inc, New York–Amsterdam (1968).
11. V. J. Emery, in *Highly Conducting One-Dimensional Solids*, Plenum Press, New York (1979), p. 327.
12. L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **7**, 19 (1937).
13. В. В. Афонин, В. Ю. Петров, ЖЭТФ **101**, 637 (2008).
14. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
15. V. V. Afonin and V. Yu. Petrov, Found. Phys. **40**, 190 (2010).
16. K.-V. Pham, M. Gabay, and P. Lederer, *Fractional Excitations in the Luttinger Liquid*, Phys. Rev. B **61**, 1637 (2000).
17. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ **46**, 1823 (1964).
18. P. G. d’Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, W. A. Benjamin Inc., New York–Amsterdam (1966).
19. В. В. Афонин, В. Ю. Петров, Письма в ЖЭТФ **109**, 797 (2019).
20. J. von Delft and H. Schoeller, cond-mat/9805275 v3 (1998).
21. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, New York, Mc. Graw-Hill Book Company (1953), Vol. 2, p. 148.