

ПОЛЕВОЙ СДВИГ РЕЗОНАНСА КОГЕРЕНТНОГО ПЛЕНЕНИЯ НАСЕЛЕННОСТЕЙ С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ СВЕТОВОГО ПУЧКА

Д. В. Коваленко^{a,b}, *В. И. Юдин*^{a,b,c*}, *М. Ю. Басалаев*^{a,b,c}, *Н. В. Строкова*^a,
А. В. Тайченачев^{a,b}, *О. Н. Прудников*^{a,b}

^a Новосибирский государственный университет,
630090, Новосибирск, Россия

^b Институт лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук,
630090, Новосибирск, Россия

^c Новосибирский государственный технический университет
630073, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 23 марта 2023 г.,
после переработки 23 марта 2023 г.
Принята к публикации 28 марта 2023 г.

Исследуется полевой сдвиг резонанса когерентного пленения населенностей (КПН), возбуждаемого бихроматическим полем в открытой Λ -системе, с учетом гауссового профиля интенсивности лазерного излучения. При этом рассматриваются два метода формирования сигнала ошибки: частотная гармоническая модуляция и фазовая ступенчатая модуляция (фазовые прыжки). Показано, что пространственная неоднородность светового пучка приводит к существенно нелинейной зависимости сдвига сигнала ошибки от интенсивности лазерного излучения. Предложен метод, позволяющий линеаризовать данную зависимость, что имеет важное значение для развития методов подавления полевого сдвига в атомных часах на основе резонансов КПН.

Статья представлена в рамках публикации материалов конференции «Физика ультрахолодных атомов» (ФУХА-2022), Новосибирск, декабрь 2022 г.

DOI: 10.31857/S0044451023080126
EDN:IBLBDF

1. ВВЕДЕНИЕ

Атомные часы имеют широкое применение в различных областях науки и техники: глобальные навигационные спутниковые системы, высокоскоростные телекоммуникации, защищенные линии связи, релятивистская геодезия, прецизионные спектроскопические измерения, проверка фундаментальных физических теорий и т. д. [1–8]. В настоящее время одним из ключевых направлений является разработка компактных атомных часов СВЧ-диапазона на основе резонансов когерентного пленения населенностей (КПН) [10–13, 60]. Благодаря полностью оптической схеме возбуждения радиочастотного перехода между энергетическими уровнями сверхтон-

кой структуры основного состояния в атомах щелочных металлов, размеры и энергопотребление таких устройств могут быть существенно уменьшены по сравнению с атомными часами, в которых используется микроволновый резонатор [14–16].

Одним из основных факторов, ограничивающих долговременную стабильность КПН-часов, является полевой (штарковский) сдвиг частоты реперного перехода, который возникает при взаимодействии атомов с возбуждающим резонанс лазерным полем [17–23]. Величина этого сдвига случайным образом меняется во времени из-за неконтролируемых вариаций параметров лазерного излучения и окружающей среды. Поэтому для достижения высоких метрологических характеристик необходимым условием является подавление полевого сдвига и его флуктуаций. Для решения этой важной проблемы были предложены различные методы как в схемах с импульсной накачкой и детектированием КПН-ре-

* E-mail: viyudin@mail.ru

зонанса [24–32], так и в спектроскопии непрерывного типа [33–42]. В частности, метод автокомпенсации полевого сдвига [39] основан на спектроскопии реперного резонанса при двух различных значениях интенсивности лазерного излучения. При этом к частоте локального осциллятора добавляется и стабилизируется искусственный антисдвиг, пропорциональный интенсивности пробного поля. Метод автокомпенсации позволяет подавить линейный вклад в зависимости полевого сдвига от мощности излучения. Однако в случае нелинейного закона этой зависимости имеет место остаточный сдвиг частоты, который ухудшает долговременную стабильность. Поэтому важной задачей является детальное исследование причин, приводящих к нелинейному характеру зависимости полевого сдвига от интенсивности излучения, и определение условий для минимизации этих нелинейных вкладов. Также на форму и сдвиг резонанса могут оказывать влияние движение атомов и столкновения со стенками газовой ячейки [43–46].

В настоящей работе мы теоретически исследуем влияние пространственной неоднородности светового пучка на сдвиг положения нуля сигнала ошибки. Рассматриваются два способа генерации сигнала ошибки, используемого для стабилизации частоты в атомных часах. В первом методе применяется гармоническая модуляция двухфотонной отстройки (разности оптических частот). Во втором методе осуществляется периодическая модуляция разности фаз компонент бихроматического поля ступенчатым образом (фазовые прыжки). Показано, что пространственная неоднородность светового пучка (гауссов поперечный профиль) в обоих случаях приводит к нелинейной зависимости сдвига сигнала ошибки от интенсивности лазерного излучения. При этом степень нелинейности зависит от частоты модуляции двухфотонной отстройки или разности фаз, а также от параметра открытости Λ -системы. Однако использование апертуры, которая выделяет центральную часть светового пучка, позволяет существенно уменьшить нелинейность полевого сдвига.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим взаимодействие бихроматического поля E :

$$E = E_1 e^{-i(\omega_1 t + \varphi_1)} + E_2 e^{-i(\omega_2 t + \varphi_2)} + \text{c.c.}, \quad (1)$$

с трехуровневой Λ -системой с «ловушечным» (т.е. невзаимодействующим с полем) состоянием, которая схематически показана на рис. 1. Резонанс КПН

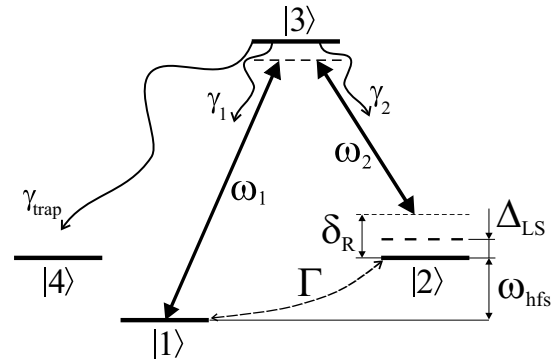


Рис. 1. Схема открытой Λ -системы. Здесь ω_1 и ω_2 — частоты резонансных оптических полей; Δ_{LS} — полевой (штарковский) сдвиг частоты часового перехода; γ_1 , γ_2 и γ_{trap} — скорости спонтанного распада населенности из возбужденного состояния $|3\rangle$ в состояния $|1\rangle$, $|2\rangle$ и $|4\rangle$ соответственно; константа Γ определяет скорость релаксации к изотропно-распределению по нижним состояниям; $|4\rangle$ представляет собой «ловушечное» состояние

возбуждается при условии, что разность частот $\omega_1 - \omega_2$ сканируется вблизи частоты ω_{hfs} расщепления между нижними состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ (часовой переход). Эволюцию Λ -системы будем описывать с помощью формализма атомной матрицы плотности в базисе состояний $\{|j\rangle\}$ ($j = 1, 2, 3, 4$):

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m,n} |m\rangle \rho_{mn}(t) \langle n|. \quad (2)$$

В приближении вращающейся волны уравнения для матрицы плотности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{11} &= -\Gamma(\rho_{11} - p_1) + \gamma_1 \rho_{33} - i\Omega_1 \rho_{13} + i\Omega_1^* \rho_{31}, \\ \partial_t \rho_{12} &= [-\Gamma - i(\delta_R - \Delta_{LS})] \rho_{12} + i\Omega_1^* \rho_{32} - i\Omega_2 \rho_{13}, \\ \partial_t \rho_{21} &= [-\Gamma + i(\delta_R - \Delta_{LS})] \rho_{21} - i\Omega_1 \rho_{23} + i\Omega_2^* \rho_{31}, \\ \partial_t \rho_{22} &= -\Gamma(\rho_{22} - p_2) + \gamma_2 \rho_{33} - i\Omega_2 \rho_{23} + i\Omega_2^* \rho_{32}, \\ \partial_t \rho_{13} &= (-\gamma_{opt} - i\delta_1) \rho_{13} - i\Omega_1^* (\rho_{11} - \rho_{33}) - i\Omega_2^* \rho_{12}, \\ \partial_t \rho_{31} &= (-\gamma_{opt} + i\delta_1) \rho_{31} + i\Omega_1 (\rho_{11} - \rho_{33}) + i\Omega_2 \rho_{21}, \\ \partial_t \rho_{23} &= (-\gamma_{opt} - i\delta_2) \rho_{23} - i\Omega_2^* (\rho_{22} - \rho_{33}) - i\Omega_1^* \rho_{21}, \\ \partial_t \rho_{32} &= (-\gamma_{opt} + i\delta_2) \rho_{32} + i\Omega_2 (\rho_{22} - \rho_{33}) + i\Omega_1 \rho_{12}, \\ \partial_t \rho_{33} &= -(\gamma_{sp} + \Gamma) \rho_{33} + i\Omega_1 \rho_{13} - i\Omega_1^* \rho_{31} + \\ &\quad + i\Omega_2 \rho_{23} - i\Omega_2^* \rho_{32}, \\ \partial_t \rho_{44} &= -\Gamma(\rho_{44} - p_4) + \gamma_{trap} \rho_{33}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\Omega_1 = d_{31} E_1 e^{-i\varphi_1} / \hbar$ и $\Omega_2 = d_{32} E_2 e^{-i\varphi_2} / \hbar$ — частоты Раби для переходов $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ и $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ соответственно (d_{31} и d_{32} — матричные элементы оператора электрического дипольного момента); $\delta_1 = \omega_1 - \omega_{31}$ и $\delta_2 = \omega_2 - \omega_{32}$ есть однофотонные отстройки для первой и второй спектральных компонент соответственно; $\delta_R = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{hfs}$ есть двух-

фотонная отстройка для невозмущенного перехода $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$; Δ_{LS} — полевой (штарковский) сдвиг частоты часового перехода; γ_{opt} — скорость затухания оптических когерентностей (из-за процессов спонтанного распада, столкновений с буферным газом и т.д.); γ_1, γ_2 и γ_{trap} есть скорости спонтанного распада населенности из состояния $|3\rangle$ в состояния $|1\rangle, |2\rangle$ и $|4\rangle$ соответственно; $\gamma_{sp} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{trap}$ есть скорость спонтанного распада возбужденного состояния $|3\rangle$; константа Γ моделирует скорость релаксации атомов (например, за счет пролетных эффектов) к распределению по нижним состояниям $|1\rangle, |2\rangle$ и $|4\rangle$ с равновесными населенностями p_1, p_2 и p_4 в отсутствие светового поля. Учет сохранения полной населенности накладывает следующее условие нормировки:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}\} = \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = 1, \tag{4}$$

$$p_1 + p_2 + p_4 = 1.$$

Будем полагать, что состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$ имеют одинаковую равновесную населенность и скорость спонтанного прихода:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 = p, \\ \gamma_1 &= \gamma_2 = \gamma, \\ \gamma_{trap} &= \gamma_{sp} - 2\gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

В качестве спектроскопического сигнала мы исследуем поглощение светового поля, которое в приближении оптически тонкой среды пропорционально следующей величине:

$$\begin{aligned} A(t) &= 2 \text{Im}\{\Omega_1^* \rho_{31} + \Omega_2^* \rho_{32}\} = \\ &= \partial_t \rho_{33} + (\gamma_{sp} + \Gamma) \rho_{33}. \end{aligned} \tag{6}$$

Выделим в частотах Раби и полевом сдвиге пространственную зависимость поперечного профиля интенсивности излучения $f(r)$:

$$\begin{aligned} \Omega_1(r) &= \Omega_{10} \sqrt{f(r)}, \\ \Omega_2(r) &= \Omega_{20} \sqrt{f(r)}, \\ \Delta_{LS}(r) &= \Delta_0 f(r), \end{aligned} \tag{7}$$

где Ω_{10}, Ω_{20} и Δ_0 — частоты Раби и полевой сдвиг на оси светового пучка (т.е. при $r = 0$). В случае гауссова профиля функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = e^{-r^2/r_0^2}, \tag{8}$$

где радиус r_0 определяет поперечный размер пучка по уровню $1/e$ для интенсивности. Тогда интеграль-

ное значение спектроскопического сигнала (т.е. полученное от атомов в разных точках пространства) можно записать как

$$\langle A(t) \rangle = 2\pi \int_0^R A(t, r) r dr, \tag{9}$$

где R — радиус части светового пучка, участвующей в формировании спектроскопического сигнала.

Стабилизация частоты в атомных часах осуществляется на нуль сигнала ошибки, который может быть сформирован с помощью частотной или фазовой модуляции бихроматического поля. В случае частотной гармонической модуляции для двухфотонной отстройки имеем следующее выражение:

$$\delta_R(t) = \delta_R^{(0)} + F \cos(f_m t), \tag{10}$$

где $\delta_R^{(0)}$ — постоянная составляющая двухфотонной отстройки, f_m и F — частота и глубина модуляции соответственно. Для формирования сигнала ошибки $S_{err}^{(harm)}$ применяется техника синхронного детектирования с опорным сигналом:

$$S_{err}^{(harm)}(\delta_R^{(0)}) = \frac{1}{T} \int_0^T \langle A(t) \rangle \cos(f_m t + \phi) dt, \tag{11}$$

где $T = 2\pi/f_m$ — период модуляции, ϕ — фаза опорного сигнала относительно сигнала модуляции. При этом $\phi = 0$ соответствует синфазному сигналу ошибки, а $\phi = \pm\pi/2$ — квадратурному. Альтернативный метод генерации сигнала ошибки основан на технике фазовых прыжков [47], когда относительная фаза $\varphi_R = \varphi_1 - \varphi_2$ изменяется ступенчатым образом, как показано на рис. 2. В этом случае $\delta_R \equiv \delta_R^{(0)}$, а сигнал ошибки $S_{err}^{(PJ)}$ формируется на основе интегрирова-

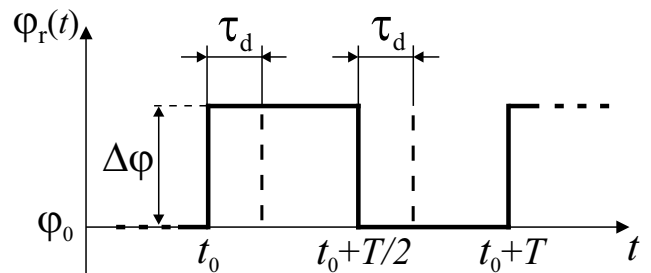


Рис. 2. Схема периодической ступенчатой модуляции относительной фазы $\varphi_R = \varphi_1 - \varphi_2$ бихроматического поля (1); φ_0 — начальная фаза, τ_d — время интегрирования, $\Delta\varphi$ — величина фазового прыжка, T — период модуляции

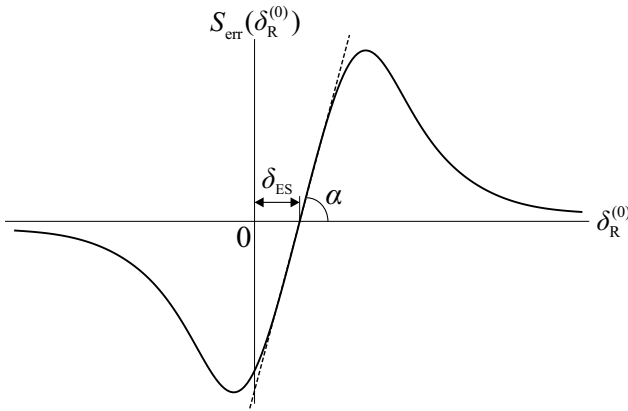


Рис. 3. Схематический вид сигнала ошибки $S_{err}(\delta_R^{(0)})$ при наличии полевого сдвига Δ_{LS}

ния динамического отклика в сигнале поглощения после фазового прыжка:

$$S_{err}^{(PJ)}(\delta_R) = \frac{1}{T} \left[\int_{t_0}^{t_0+\tau_d} \langle A(t, \varphi_0 + \Delta\varphi) \rangle dt - \int_{t_0+T/2}^{t_0+T/2+\tau_d} \langle A(t, \varphi_0) \rangle dt \right], \quad (12)$$

где φ_0 — начальная фаза, τ_d — время интегрирования, $\Delta\varphi$ — величина фазового прыжка (см. рис. 2). Сигнал ошибки, сформированный одним из описанных выше методов, имеет дисперсионную форму и схематически показан на рис. 3, где сдвиг точки нуля δ_{ES} обусловлен наличием полевого сдвига Δ_{LS} .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ДИСКУССИЯ

Далее мы будем исследовать зависимости сдвига δ_{ES} сигналов ошибки (11) и (12) от интенсивности лазерного излучения на оси светового пучка, которая в рамках рассматриваемой Λ -системы пропорциональна следующей величине:

$$W_0 = \frac{|\Omega_{10}|^2 + |\Omega_{20}|^2}{\Gamma\gamma_{opt}}. \quad (13)$$

Отметим, что кратковременная стабильность атомных часов определяется наклоном линейного участка сигнала ошибки в центре линии (см. рис. 3):

$$K = \text{tg}(\alpha) = \left. \frac{\partial S_{err}}{\partial \delta_R^{(0)}} \right|_{\delta_R^{(0)} = \delta_{ES}}, \quad (14)$$

который зависит от параметров используемой частотной или фазовой модуляции. Поэтому в расчетах параметры модуляции выбирались таким образом, чтобы наклон (14) был максимальным для заданных Ω_{10} и Ω_{20} .

Исследуемые зависимости были рассчитаны для обоих методов формирования сигнала ошибки в двух различных режимах: медленной и быстрой модуляции [47, 48]. Медленная модуляция определяется следующими условиями:

$$\frac{Ff_m}{\gamma_{CPT}^2} \ll 1 \quad (\text{частотная гармоническая}), \quad (15)$$

$$T/2 \gg \gamma_{CPT}^{-1} \quad (\text{фазовая ступенчатая}), \quad (16)$$

где γ_{CPT} — полуширина на полувысоте для стационарной формы линии резонанса КРН. Быстрая модуляция соответствует условиям

$$\frac{Ff_m}{\gamma_{CPT}^2} \geq 1 \quad (\text{частотная гармоническая}), \quad (17)$$

$$T/2 \leq \gamma_{CPT}^{-1} \quad (\text{фазовая ступенчатая}). \quad (18)$$

Зависимости параметра γ_{CPT} от интенсивности поля на оси пучка для разной степени открытости Λ -системы представлены на рис. 4.

Кроме того, как было показано в [48], для гармонической модуляции двухфотонной отстройки максимальный наклон $|K_{max}^{(harm)}|$ достигается при следующем выборе оптимальной фазы ϕ_{opt} :

$$|K_{max}^{(harm)}| = \sqrt{K_{in-ph}^2 + K_{quad}^2}, \quad (19)$$

$$\phi_{opt} = -\arctg(K_{quad}/K_{in-ph}), \quad (20)$$

где K_{in-ph} и K_{quad} — наклоны синфазного ($\phi = 0$) и квадратурного ($\phi = -\pi/2$) сигналов ошибки соответственно. Для быстрой гармонической модуляции

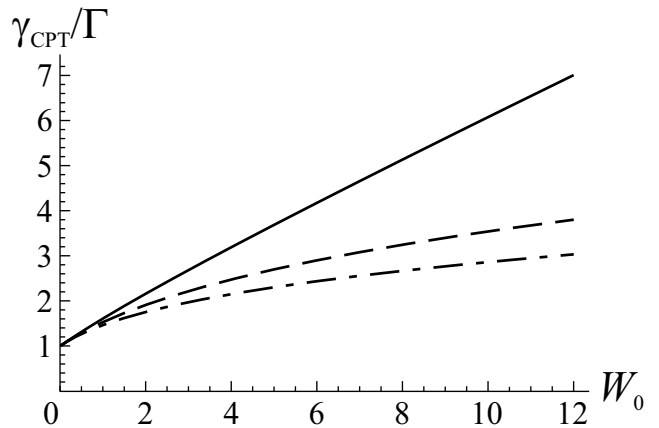


Рис. 4. Зависимости полуширины на полувысоте стационарного КРН-резонанса γ_{CPT} от параметра W_0 при различных степенях открытости Λ -системы: $p = 1/2$, $\gamma = \gamma_{sp}/2$, $\gamma_{trap} = 0$ (сплошная линия); $p = 1/3$, $\gamma = \gamma_{sp}/3$, $\gamma_{trap} = \gamma_{sp}/3$ (штриховая линия); $p = 1/8$, $\gamma = \gamma_{sp}/8$, $\gamma_{trap} = 3\gamma_{sp}/4$ (штрихпунктирная линия). Другие параметры модели: $\Omega_{10} = \Omega_{20}$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-5} \gamma_{sp}$, $\gamma_{opt} = 50\gamma_{sp}$, $\Delta_0/\Gamma = 0.1W_0$

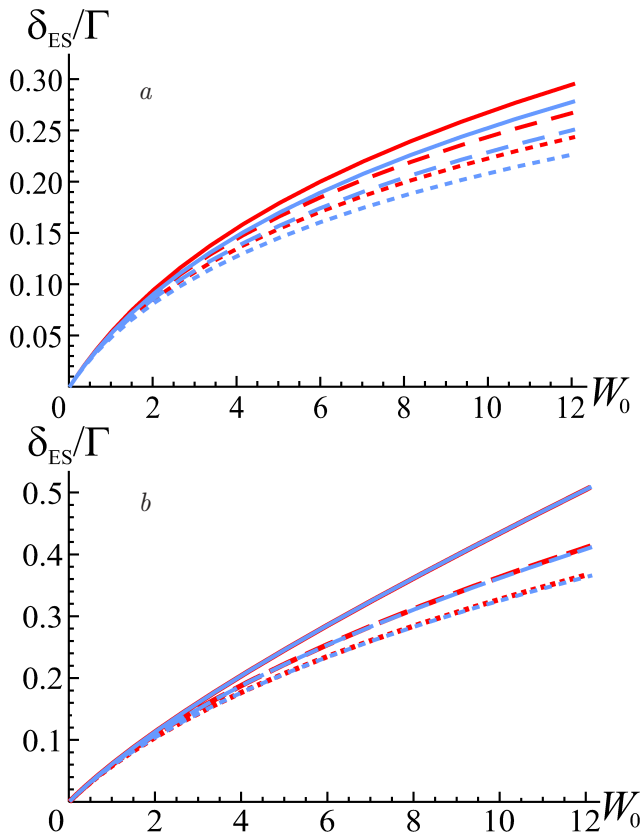


Рис. 5. Зависимости сдвига нуля сигнала ошибки δ_{ES} от параметра W_0 : *a*) режим медленных гармонической частотной модуляции (красные линии) при $f_m = 0.5\Gamma$ и фазовой ступенчатой модуляции при $T = 12\Gamma^{-1}$ (синие линии); *b*) режим быстрых гармонической частотной модуляции (красные линии) при $f_m = 40\Gamma$ и фазовой ступенчатой модуляции при $T = 0.15\Gamma^{-1}$ (синие линии). Графики построены при различных степенях открытости Λ -системы: $p = 1/2$, $\gamma = \gamma_{sp}/2$, $\gamma_{trap} = 0$ (сплошные линии); $p = 1/3$, $\gamma = \gamma_{sp}/3$, $\gamma_{trap} = \gamma_{sp}/3$ (штриховые линии); $p = 1/8$, $\gamma = \gamma_{sp}/8$, $\gamma_{trap} = 3\gamma_{sp}/4$ (пунктирные линии). Другие параметры модели: $\Omega_{10} = \Omega_{20}$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-5}\gamma_{sp}$, $\gamma_{opt} = 50\gamma_{sp}$, $\Delta_0/\Gamma = 0.1W_0$, $F/f_m = 1.1$, $\tau_d = T/2$, $\Delta\varphi = \pi/2$

в так называемом режиме Паунда – Дривера – Холла ($f_m \gg 2\Gamma$) наибольшее значение $|K_{max}^{(harm)}|$ определяется только квадратурным сигналом ошибки (так как $\phi_{opt} \approx -\pi/2$) и достигается при $F/f_m \approx 1.1$. Для фазовой ступенчатой модуляции максимальный наклон сигнала ошибки $|K_{max}^{(PJ)}|$ достигается при $\tau_d = T/2$ и $\Delta\varphi = \pi/2$ (см. [47]).

На рис. 5*a* представлены графики зависимости сдвига нуля сигнала ошибки от параметра W_0 для режима медленной модуляции при различной степени открытости Λ -системы. Как видно, данные зависимости являются сильно нелинейными. Причем нелинейность возрастает с увеличением скорости

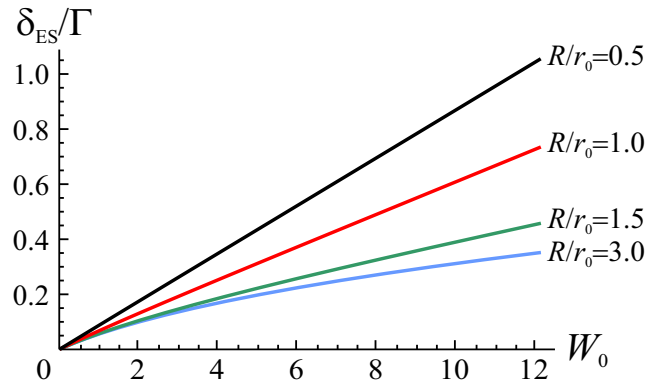


Рис. 6. Зависимости сдвига нуля сигнала ошибки δ_{ES} от параметра W_0 в случае быстрых гармонической частотной модуляции при $f_m = 40\Gamma$ и фазовой ступенчатой модуляции при $T = 0.15\Gamma^{-1}$. Графики построены при различных значениях радиуса интегрирования: $R = 3r_0$ (синяя линия), $R = 1.5r_0$ (зеленая линия), $R = r_0$ (красная линия), $R = 0.5r_0$ (черная линия). Другие параметры модели: $\Omega_{10} = \Omega_{20}$, $p = 1/8$, $\gamma = \gamma_{sp}/8$, $\gamma_{trap} = 3\gamma_{sp}/4$, $\Gamma = 5 \cdot 10^{-5}\gamma_{sp}$, $\gamma_{opt} = 50\gamma_{sp}$, $\Delta_0/\Gamma = 0.1W_0$, $F/F_m = 1.1$, $\tau_d = T/2$, $\Delta\varphi = \pi/2$

распада возбужденного уровня $|3\rangle$ в ловушечное состояние $|4\rangle$. В свою очередь, для быстрой модуляции (см. рис. 5*b*) степень нелинейности аналогичных зависимостей уменьшается по сравнению с режимом медленной модуляции. Этот эффект особенно выражен для закрытой Λ -системы ($\gamma_{trap} = 0$). Кроме того, как видно из рис. 5*b*, в режиме быстрой модуляции данные зависимости практически совпадают для обоих методов формирования сигнала ошибки.

Также была проанализирована зависимость сдвига нуля сигнала ошибки δ_{ES} от интенсивности при различных значениях радиуса диафрагмы R , вырезающей центральную часть светового пучка (см. рис. 6). Видно, что с уменьшением данного радиуса зависимость стремится к линейному закону. Отметим также, что полученные зависимости визуально практически неразличимы для двух типов модуляции (частотной гармонической и фазовой ступенчатой).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовано влияние пространственно-неоднородного распределения интенсивности лазерного излучения на полевой сдвиг сигнала ошибки. В качестве теоретической модели рассматривалась открытая Λ -система, в которой КРН-резонанс возбуждается бихроматическим полем с гауссовым поперечным профилем интенсивности. Анализ проводился для двух методов формирования сигнала ошибки: с использованием

гармонической модуляции двухфотонной отстройки и с помощью ступенчатой модуляции относительной фазы компонент бихроматического поля. Установлено, что зависимость сдвига нуля сигнала ошибки от интенсивности в случае медленной модуляции имеет большую степень нелинейности по сравнению со случаем быстрой модуляции. При этом в режиме быстрой модуляции данная зависимость практически совпадает для обоих методов формирования сигнала ошибки. Также отметим, что увеличение параметра открытости Λ -системы приводит к усилению нелинейности. На основе численных расчетов было показано, что использование апертуры для выделения центральной части светового пучка приводит к существенному уменьшению нелинейности полевого сдвига в сигнале ошибки. Такой подход позволит существенно улучшить долговременную стабильность атомных часов при использовании метода автокомпенсации полевого сдвига [39], эффективность которого повышается при уменьшении нелинейного вклада в зависимость полевого сдвига от интенсивности лазерного излучения.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-72-10096). В. И. Юдин был поддержан Министерством науки и высшего образования РФ (грант № FSUS-2020-0036).

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Riehle, *Frequency Standards: Basics and Applications*, Wiley-VCH, New York (2005).
2. L. Maleki and J. Prestage, *Metrologia* **42**, S145 (2005).
3. A. Derevianko and M. Pospelov, *Nat. Phys.* **10**, 933 (2014).
4. J. Vanier and C. Tomescu, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*, CRC Press, Boca Raton (2015).
5. C. Lisdat, G. Grosche, N. Quintin et al., *Nature Commun.* **7**, 12443 (2016).
6. N. Poli, C. W. Oates, P. Gill, and G. M. Tino, *Rivista del Nuovo Cimento* **36**, 555 (2013).
7. T. E. Mehlstäubler, G. Grosche, Chr. Lisdat, P. O. Schmidt, and H. Denker, *Rep. Prog. Phys.* **81**, 064401 (2018).
8. M. S. Safronova, *Ann. Phys.* **531**, 1800364 (2019).
9. G. Alzetta, A. Gozzini, M. Moi, and G. Orriols, *Il Nuovo Cimento B* **36**, 5 (1976).
10. Б. Д. Агапьев, М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, *УФН* **163**, 1 (1993) [B. D. Agap'ev, M. B. Gornyi, B. G. Matisov, and Yu. V. Rozhdestvenskii, *Phys. Usp.* **36**, 763 (1993)].
11. E. Arimondo, *Prog. Opt.* **35**, 257 (1996).
12. J. Vanier, *Appl. Phys. B* **81**, 421 (2005).
13. V. Shah and J. Kitching, *Adv. Atom. Mol. Opt. Phys.* **59**, 21 (2010).
14. S. Knappe, P. D. D. Schwindt, V. Shah, L. Hollberg, J. Kitching, L. Liew, and J. Moreland, *Opt. Express* **13**, 1249 (2005).
15. Z. Wang, *Chin. Phys. B* **23**, 030601 (2014).
16. J. Kitching, *Appl. Phys. Rev.* **5**, 031302 (2018).
17. M. Zhu and L. S. Cutler, in *Proceedings of 32th Annual Precise Time and Time Interval Systems and Applications Meeting*, Institute of Navigation, Inc., Reston, Virginia (2000), p. 311.
18. S. A. Zibrov, I. Novikova, D. F. Phillips, R. L. Walsworth, A. S. Zibrov, V. L. Velichansky, A. V. Taichenachev, and V. I. Yudin, *Phys. Rev. A* **81**, 013833 (2010).
19. D. Miletic, C. Affolderbach, M. Hasegawa, R. Boudot, C. Gorecki, and G. Mileti, *Appl. Phys. B* **109**, 89 (2012).
20. Y. Yano, W. Gao, S. Goka, and M. Kajita, *Phys. Rev. A* **90**, 013826 (2014).
21. J. W. Pollock, V. I. Yudin, M. Shuker, M. Yu. Basalaev, A. V. Taichenachev, X. Liu, J. Kitching, and E. A. Donley, *Phys. Rev. A* **98**, 053424 (2018).
22. D. S. Chuchelov, V. V. Vassiliev, M. I. Vaskovskaya, V. L. Velichansky, E. A. Tsygankov, S. A. Zibrov, S. V. Petropavlovsky, and V. P. Yakovlev, *Physica Scripta* **93**, 114002 (2018).
23. C. Carlé, M. Petersen, N. Passilly, M. Abdel Hafiz, E. de Clercq, and R. Boudot, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control* **68**, 3249 (2021).
24. V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, M. Yu. Basalaev, T. Zanon-Willette, J. W. Pollock, M. Shuker, E. A. Donley, and J. Kitching, *Phys. Rev. Appl.* **9**, 054034 (2018).
25. V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, M. Yu. Basalaev, T. E. Mehlstäubler, R. Boudot, T. Zanon-Willette, J. W. Pollock, M. Shuker, E. A. Donley, and J. Kitching, *New J. Phys.* **20**, 123016 (2018).

26. M. Abdel Hafiz, G. Coget, M. Petersen, C. Rocher, S. Guérandel, T. Zanon-Willette, E. de Clercq, and R. Boudot, *Phys. Rev. Appl.* **9**, 064002 (2018).
27. M. Abdel Hafiz, G. Coget, M. Petersen, C. E. Calosso, S. Guérandel, E. de Clercq, and R. Boudot, *Appl. Phys. Lett.* **112**, 244102 (2018).
28. M. Shuker, J. W. Pollock, R. Boudot, V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, J. Kitching, and E. A. Donley, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 113601 (2019).
29. M. Shuker, J. W. Pollock, R. Boudot, V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, J. Kitching, and E. A. Donley, *Appl. Phys. Lett.* **114**, 141106 (2019).
30. M. Yu. Basalaev, V. I. Yudin, D. V. Kovalenko, T. Zanon-Willette, and A. V. Taichenachev, *Phys. Rev. A* **102**, 013511 (2020).
31. Д. В. Коваленко, М. Ю. Басалаев, В. И. Юдин, Т. Занон-Виллет, А. В. Тайченачев, *КЭ* **51**, 495 (2021) [D. V. Kovalenko, M. Yu. Basalaev, V. I. Yudin, T. Zanon-Willette, and A. V. Taichenachev, *Quantum Electron.* **51**, 495 (2021)].
32. C. Carlé, M. Abdel Hafiz, S. Keshavarzi, R. Vicarini, N. Passilly, and R. Boudot, *Opt. Express* **31**, 8160 (2023).
33. V. Shah, V. Gerginov, P. D. D. Schwindt, S. Knappe, L. Hollberg, and J. Kitching, *Appl. Phys. Lett.* **89**, 151124 (2006).
34. B. H. McGuyer, Y.-Y. Jau, and W. Happer, *Appl. Phys. Lett.* **94**, 251110 (2009).
35. R. Boudot, P. Dziuban, M. Hasegawa, R. K. Chutani, S. Galliou, V. Giordano, and C. Gorecki, *J. Appl. Phys.* **109**, 014912 (2011).
36. Y. Zhang, W. Yang, S. Zhang, and J. Zhao, *J. Opt. Soc. Amer. B* **33**, 1756 (2016).
37. M. I. Vaskovskaya, E. A. Tsygankov, D. S. Chuchelov, S. A. Zibrov, V. V. Vassiliev, and V. L. Velichansky, *Opt. Express* **27**, 35856 (2019).
38. S. Yanagimachi, K. Harasaka, R. Suzuki, M. Suzuki, and S. Goka, *Appl. Phys. Lett.* **116**, 104102 (2020).
39. V. I. Yudin, M. Yu. Basalaev, A. V. Taichenachev, J. W. Pollock, Z. L. Newman, M. Shuker, A. Hansen, M. T. Hummon, R. Boudot, E. A. Donley, and J. Kitching, *Phys. Rev. Appl.* **14**, 024001 (2020).
40. M. Abdel Hafiz, R. Vicarini, N. Passilly, C. E. Calosso, V. Maurice, J. W. Pollock, A. V. Taichenachev, V. I. Yudin, J. Kitching, and R. Boudot, *Phys. Rev. Appl.* **14**, 034015 (2020).
41. V. I. Yudin, M. Yu. Basalaev, A. V. Taichenachev, D. A. Radnatarov, V. A. Andryushkov, and S. M. Kobtsev, *J. Phys. Conf. Ser.* **2067**, 012003 (2021).
42. Д. А. Раднатаров, С. М. Кобцев, В. А. Андриюшков, М. Ю. Басалаев, А. В. Тайченачев, М. Д. Радченко, В. И. Юдин, *Письма в ЖЭТФ* **117**, 504 (2023).
43. А. Н. Литвинов, И. М. Соколов, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 791 (2021) [A. N. Litvinov and I. M. Sokolov, *JETP Lett.* **113**, 763 (2021)].
44. К. А. Баранцев, А. С. Курапцев, А. Н. Литвинов, *ЖЭТФ* **160**, 611 (2021) [K. A. Barantsev, A. S. Kuraptsev, and A. N. Litvinov, *JETP* **133**, 525 (2021)].
45. Я. А. Фофанов, И. М. Соколов, *ЖЭТФ* **162**, 297 (2022) [Ya. A. Fofanov and I. M. Sokolov, *JETP* **135**, 255 (2022)].
46. К. А. Баранцев, Г. В. Волошин, А. С. Курапцев, А. Н. Литвинов, И. М. Соколов, *ЖЭТФ* **163**, 162 (2023).
47. M. Yu. Basalaev, V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, M. I. Vaskovskaya, D. S. Chuchelov, S. A. Zibrov, V. V. Vassiliev, and V. L. Velichansky, *Phys. Rev. Appl.* **13**, 034060 (2020).
48. V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, M. Yu. Basalaev, and D. V. Kovalenko, *Opt. Express* **25**, 2742 (2017).