

# КОРРЕЛЯЦИИ ЗАВИХРЕННОСТИ ВНУТРИ КОГЕРЕНТНОГО ВИХРЯ

*И. В. Колоколов<sup>a,b\*</sup>, В. В. Лебедев<sup>a,b</sup>, М. М. Тумакова<sup>c</sup>*

<sup>a</sup> *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

<sup>b</sup> *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
101000, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
190008, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 9 февраля 2023 г.,  
после переработки 9 февраля 2023 г.  
Принята к публикации 16 февраля 2023 г.

Исследуются флуктуации завихренности внутри когерентного вихря, порожденного обратным каскадом энергии в двумерной турбулентности. Временные и пространственные корреляции могут быть охарактеризованы парной корреляционной функцией. Взаимодействие между флуктуациями приводит к ненулевому значению третьего момента завихренности. Исследованы парная корреляционная функция и третий момент завихренности для модели, в которой накачка имеет малое время корреляции. Найдены явные выражения для гауссовой пространственной корреляционной функции силы накачки. Они подтверждают общие предсказания, полученные ранее.

DOI: 10.31857/S0044451023060147  
EDN: DHWGKX

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная турбулентность является предметом многочисленных исследований [1]. Это состояние можно наблюдать в тонких слоях жидкости на масштабах, превышающих толщину слоя. С практической точки зрения, наиболее интересным таким «слоем» является атмосфера. Конечно, атмосфера — очень сложный объект, и ее подробное описание — чрезвычайно сложная задача. Однако некоторые общие особенности двумерной турбулентности могли бы быть полезны для понимания атмосферных явлений. Обратим внимание в этой связи на тенденцию образования крупномасштабных вихрей из мелкомасштабных благодаря нелинейному гидродинамическому взаимодействию в двумерных жидкостях [2–4]. При наличии внешнего воздействия (накачки) эта тенденция приводит к формированию обратного

каскада энергии на масштабах, превышающих длину накачки [5].

В конечной ячейке передача энергии на большие масштабы приводит к образованию больших вихрей диаметром порядка размера ячейки. Такие вихри наблюдались как в лабораторных экспериментах [6, 7], так и в численном моделировании [8, 9]. При некоторых условиях большой вихрь имеет бесконечное время жизни, т. е. он обладает длительными временными корреляциями. Мы называем такие большие вихри когерентными. В работе [10] при численном моделировании наблюдался плоский профиль средней скорости когерентного вихря и представлены некоторые аргументы, объясняющие этот профиль. В работах [11–15] был обоснован квазилинейный режим флуктуаций течения внутри когерентного вихря, получен плоский профиль скорости и обоснованы некоторые корреляционные функции скоростей. В работе [16] установлен критерий формирования когерентного вихря, который был подтвержден при прямом численном моделировании [17].

Мы рассматриваем случай, когда двумерная турбулентность возбуждается постоянной мелкомасштабной накачкой (внешней силой). Если сила ста-

\* E-mail: igor.kokolov@gmail.com

тична или обладает статистическими свойствами, однородными во времени, то, в конечном итоге, достигается статистически однородное во времени турбулентное состояние. Именно в этой ситуации могут появиться когерентные вихри. Лабораторные эксперименты и численное моделирование показывают, что когерентный вихрь в среднем изотропен. Изотропия объясняется быстрым вращением, подавляющим анизотропные возмущения на фоне изотропного вращения. Подчеркнем, что среднее течение когерентного вихря представляет собой нетвердотельное дифференциальное вращение. Такое движение существенно деформирует мелкомасштабные флуктуации, подавляя их нелинейное взаимодействие. Это свойство объясняет применимость квазилинейного приближения для флуктуаций течения внутри когерентного вихря. Деформация делает корреляционные функции флуктуаций потока сильноанизотропными. Структура корреляционных функций имеет решающее значение для таких процессов, как перенос пассивного скаляра (температурного поля или концентрации загрязняющих веществ) внутри когерентного вихря.

Нас интересуют корреляционные функции флуктуирующей завихренности. В квазилинейном приближении корреляционные функции сводятся к парной корреляционной функции. Чтобы найти корреляционную функцию, необходимо изучить эволюцию мелкомасштабных флуктуаций потока, создаваемых накачкой, внутри когерентного вихря. Некоторые универсальные скейлинговые свойства корреляционной функции были сформулированы нами ранее [18]. Однако важно проверить результаты путем явных вычислений с использованием какой-либо конкретной модели. Мы выбрали модель, в которой предполагается, что накачка представляет собой случайный процесс с малой длиной корреляции. Предполагается, что пространственная парная корреляционная функция внешней силы является гауссовой функцией расстояния между точками. Аналитические вычисления в этой модели позволили нам найти явные аналитические выражения для корреляционной функции завихренности, подтверждающие предсказания работы [18].

Хотя нелинейное взаимодействие флуктуаций течения внутри когерентного вихря является слабым, оно играет существенную роль в некоторых процессах. В качестве примера отметим перенос энергии внутри когерентного вихря. Кроме того, сила взаимодействия растет по мере удаления от центра вихря. Таким образом, оценка силы необходима

для установления границы вихря и характера флуктуаций вблизи границы. Сила взаимодействия может быть охарактеризована третьим моментом завихренности, который равен нулю в квазилинейном приближении. В настоящей работе мы вычислили третий момент в рамках приведенной выше модели в первом порядке теории возмущений по взаимодействию флуктуаций и нашли для него явное аналитическое выражение.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 мы приводим некоторые общие соотношения, касающиеся флуктуаций внутри когерентного вихря. В разд. 3 мы развиваем теорию возмущений, необходимую для вычисления корреляционных функций завихренности. В разд. 4 мы исследуем парную корреляционную функцию завихренности. В разд. 5 мы вычисляем третий момент завихренности. В разд. 6 мы подводим итоги нашего исследования.

## 2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Мы рассматриваем двумерную турбулентность, возбуждаемую внешней случайной силой со стационарной статистикой. Мы анализируем статистически стационарное состояние, реализуемое после некоторого переходного процесса. В этом состоянии характеристики когерентных вихрей не зависят от времени. Приведем два условия, необходимых для появления когерентных вихрей в системе. Первым условием является

$$\epsilon \gg L^2 \alpha^3, \quad (1)$$

где  $\epsilon$  — темп выработки энергии на единицу массы (обеспечиваемый внешним воздействием),  $L$  — размер ячейки, а  $\alpha$  — коэффициент трения о дно. Условие (1) означает, что энергия, переносимая обратным каскадом, накапливается на масштабе  $L$ . Вторым условием является

$$\alpha \lesssim \nu k_f^2, \quad (2)$$

где  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости, а  $k_f$  является характерным волновым вектором внешней силы. Условие (2) было выведено в работе [16] и подтверждено прямым численным моделированием, см. [17].

Удобно исследовать когерентный вихрь в системе отсчета, связанной с центром вихря. В этой системе отсчета среднее (когерентное) течение представляет собой дифференциальное вращение, которое может быть описано полярной (тангенциальной)

скоростью  $U$ , зависящей от расстояния  $r$  от точки наблюдения до центра вихря. Локально дифференциальное вращение представляет собой сдвиговое течение с темпом сдвига

$$\Sigma = r\partial_r(U/r), \quad (3)$$

также зависящим от  $r$ . Обратим внимание, что для твердотельного вращения, где  $U \propto r$ , темп сдвига (3) равен нулю. Для плоского профиля скорости, полученного в работах [11, 12, 15],  $U$  не зависит от  $r$ . Тогда темп сдвига ведет себя как  $\Sigma \propto r^{-1}$ , т.е.  $\Sigma$  уменьшается по мере роста  $r$ . Таким образом, подавление взаимодействия флуктуаций потока, связанных с когерентным вихрем, ослабевает по мере увеличения  $r$ .

Основным объектом нашего исследования являются корреляционные функции завихренности  $\varpi$ , которые флуктуируют на фоне средней завихренности  $\Omega$  в когерентном вихре. Мы предполагаем, что эти флуктуации вызваны накачкой, которая имеет относительно небольшую длину корреляции  $k_f^{-1}$ . При изучении флуктуаций вблизи окружности радиусом  $R$ , намного превышающим длину корреляции накачки,  $k_f R \gg 1$ , мы можем ограничиться рассмотрением узкой окрестности этой окружности. Затем, перейдя в систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью  $\Omega(R)$ , мы получаем следующее линейное уравнение для  $\varpi$ :

$$(\partial_t + \hat{\mathcal{L}})\varpi = \phi, \quad \hat{\mathcal{L}} = \Sigma x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha - \nu \nabla^2, \quad (4)$$

где  $\Sigma$  — темп сдвига (3), взятый при  $r = R$ . Тангенциальная переменная  $x_1 = R\varphi$  ( $\varphi$  — полярный угол) и радиальная переменная  $x_2 = r - R$  являются локальными декартовыми координатами в выбранной системе отсчета. В уравнении (4)  $\phi$  — ротор внешней силы  $\mathbf{f}$  на единицу массы,  $\phi = \text{curl} \mathbf{f}$ .

Критерием, оправдывающим квазилинейную аппроксимацию, является

$$\Sigma \gg (\epsilon k_f^2)^{1/3}, \quad (5)$$

где правая часть соотношения представляет собой нелинейный темп Колмогорова на масштабе накачки. В свою очередь, этот темп должен быть намного больше, чем вязкое затухание на этом же масштабе:

$$(\epsilon k_f^2)^{1/3} \gg \nu k_f^2. \quad (6)$$

Критерий (6) — это не что иное, как условие большого числа Рейнольдса на масштабе накачки. Это

условие необходимо для возбуждения турбулентности. Объединяя неравенства (5), (6), находим неравенство

$$\Sigma \gg \nu k_f^2, \quad (7)$$

выполняющееся внутри когерентного вихря.

Уравнение (4) демонстрирует, что задача сводится к гидродинамическому движению на фоне стационарного сдвигового потока. Наличие сдвигового потока нарушает пространственную однородность. Точнее, однородность нарушается вдоль второй оси. Этот факт усложняет исследование решений уравнения (4). Уравнение (4) без накачки  $\phi$  было проанализировано в работе [19]. Нас интересуют корреляционные функции  $\varpi$ . Чтобы найти эти корреляционные функции, следует решить уравнение (4) для произвольного  $\phi$ , а затем усреднить соответствующее произведение по статистике  $\phi$ .

В настоящей работе мы используем модель накачки с малой длиной корреляции. Статистические свойства накачки определяются парной корреляционной функцией

$$\langle \phi(t_1, \mathbf{x}) \phi(t_2, \mathbf{y}) \rangle = -2\epsilon \delta(t_1 - t_2) \nabla^2 \Xi(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8)$$

Угловые скобки в уравнении (8) и ниже обозначают средние значения, полученные путем усреднения по времени в эксперименте. В теории угловые скобки означают усреднение по статистике системы. Лапласиан  $\nabla^2$  в уравнении (8) объясняется соотношением  $\varpi = \text{curl} \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость флуктуирующего течения.

Далее мы используем специальную форму парной корреляционной функции накачки:

$$\Xi(\mathbf{x}) = \exp(-k_f^2 |\mathbf{x}|^2 / 2). \quad (9)$$

Тогда  $\epsilon$  в уравнении (8) — это мощность накачки (температура производства энергии на единицу массы). Корреляционная функция накачки (9) позволяет нам явно найти парную корреляционную функцию  $\langle \varpi \varpi \rangle$  и третий момент  $\langle \varpi^3 \rangle$ . Однако их качественные свойства универсальны и не зависят от конкретной формы парной корреляционной функции накачки.

В работе [18] введено время  $\tau_*$ , определяющее характерное время, за которое формируется второй момент  $\varpi$ . Время определяется как

$$\tau_* = (\Sigma^2 \nu k_f^2)^{-1/3}, \quad \Sigma \gg \tau_*^{-1} \gg \nu k_f^2. \quad (10)$$

Неравенства в уравнении (10) объясняются условием (7). Обратим также внимание на то, что  $\alpha \tau_* \ll 1$ . Неравенство объясняется тем же условием (7) и

условием (2), необходимым для реализации когерентного вихря.

Если интересоваться эффектами, связанными с взаимодействием флуктуаций, то следует ввести нелинейный член в линейное уравнение (4). Он определяется нелинейным членом в уравнении Навье–Стокса, ответственным за взаимодействие флуктуаций. Добавляя нелинейный член к линейному уравнению (4), находим

$$\partial_t \varpi + \hat{\mathcal{L}}\varpi + \nabla(\mathbf{v}\varpi - \langle \mathbf{v}\varpi \rangle) = \phi. \quad (11)$$

Введение среднего значения  $\langle \mathbf{v}\varpi \rangle$  в уравнение (11) связано с тем фактом, что мы полагаем, что  $\langle \varpi \rangle = 0$ ,  $\langle \phi \rangle = 0$ . Первое условие связано с определением флуктуирующего потока. Второе условие означает, что внешнее воздействие в среднем не приводит к завихренности. Среднее  $\langle \mathbf{v}\varpi \rangle$  зависит от координат внутри когерентного вихря, и, следовательно, его дивергенция отлична от нуля. Это является причиной, по которой следует включить этот член в уравнение (11).

Вследствие условия несжимаемости  $\nabla \mathbf{v} = 0$  можно ввести функцию тока  $\psi$ , связанную с компонентами скорости и завихренностью как

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \varpi = -\nabla^2 \psi. \quad (12)$$

Чтобы восстановить скорость флуктуирующего течения  $\mathbf{v}$  из поля завихренности  $\varpi$ , необходимо решить уравнение Лапласа  $\nabla^2 \psi = -\varpi$ , а затем вычислить компоненты скорости в соответствии с уравнением (12). Подчеркнем, что функция тока  $\psi$ , введенная уравнением (12), относится к флуктуирующей компоненте течения.

В квазилинейном приближении момент третьего порядка  $\langle \varpi^3 \rangle$  равен нулю. Чтобы найти ненулевой вклад в момент  $\langle \varpi^3 \rangle$ , необходимо учитывать взаимодействие между флуктуациями течения, связанными с нелинейным членом в уравнении Навье–Стокса. В нашей постановке необходимо использовать нелинейное уравнение (11), где взаимодействие описывается членом второго порядка  $\mathbf{v}\nabla\varpi$ .

Все наши вычисления выполняются при условии  $\Sigma > 0$ . Однако результаты могут быть легко распространены на отрицательные  $\Sigma$ . Скажем, простые рассуждения о симметрии показывают, что третий момент  $\langle \varpi^3 \rangle$  меняет свой знак при  $\Sigma \rightarrow -\Sigma$ . Что касается парной корреляционной функции  $\langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y}) \rangle$ , преобразование  $\Sigma \rightarrow -\Sigma$  означает, что следует изменить знак второй компоненты,  $x_2 \rightarrow -x_2$ ,  $y_2 \rightarrow -y_2$ , не касаясь  $x_1, y_1$ .

### 3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Взаимодействие флуктуаций течения может быть последовательно изучено в рамках диаграммной техники Уайлда [20], основанной на динамическом уравнении (11). Метод построения диаграмм может быть получен из представления корреляционных функций завихренности  $\varpi$  в виде функциональных интегралов по  $\varpi$  и вспомогательному полю  $\mu$  с весом  $\exp(-\mathcal{I})$  [21], где

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_{int}, \quad (13)$$

$$\mathcal{I}_2 = \int dt d^2x \mu (\partial_t + \hat{\mathcal{L}})\varpi + \epsilon \int dt d^2x d^2r \nabla^2 \Xi(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \mu(t, \mathbf{x}) \mu(t, \mathbf{r}), \quad (14)$$

$$\mathcal{I}_{int} = \int dt d^2x \mu \mathbf{v} \nabla \varpi. \quad (15)$$

Здесь подразумевается, что скорость  $\mathbf{v}$  выражается через завихренность  $\varpi$ . Особенности используемой техники изложены в обзоре [22].

Парная корреляционная функция завихренности записывается в виде следующего функционального интеграла:

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y}) \rangle = \int \mathcal{D}\varpi \mathcal{D}\mu e^{-\mathcal{I}} \varpi(t, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{y}). \quad (16)$$

Мы вводим также следующее парное среднее:

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(0, \mathbf{y}) \rangle = \int \mathcal{D}\varpi \mathcal{D}\mu e^{-\mathcal{I}} \varpi(t, \mathbf{x}) \mu(0, \mathbf{y}). \quad (17)$$

Коррелятор (17) является функцией Грина, поскольку он определяет реакцию системы на дополнительную внешнюю силу. Обратим внимание на то, что среднее  $\langle \mu \mu \rangle$  равно нулю.

Можно развить теорию возмущений для любой корреляционной функции, разложив вес  $\exp(-\mathcal{I})$  по члену третьего порядка  $\mathcal{I}_{int}$  (15) и вычисляя результирующие гауссовы функциональные интегралы. Интегралы выражаются в терминах «голых» корреляционных функций, определяемых квадратичным членом (14):

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = \int \mathcal{D}\varpi \mathcal{D}\mu e^{-\mathcal{I}_2} \varpi(t, \mathbf{x}) \mu(0, \mathbf{y}), \quad (18)$$

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = \int \mathcal{D}\varpi \mathcal{D}\mu e^{-\mathcal{I}_2} \varpi(t, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{y}). \quad (19)$$

Среднее вида  $\langle \varpi \dots \mu \dots \rangle_0$  определяется теоремой Вика [23] и равно сумме произведений средних значений (18), (19), где спаривание производится всеми

возможными способами. Каждый член ряда возмущений соответствует некоторой диаграмме Фейнмана.

Выражения (14), (18) приводят к следующему уравнению для «голой» функции Грина:

$$(\partial_t + \hat{\mathcal{L}})\langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = \delta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (20)$$

Напомним, что любая функция Грина равна нулю на отрицательных временах в силу принципа причинности. Следовательно,  $\langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(0, \mathbf{y}) \rangle = 0$  при  $t < 0$ . Выражение для «голой» парной корреляционной функции может быть получено с помощью уравнения (19):

$$\begin{aligned} \langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y}) \rangle_0 &= \\ &= -2\epsilon \int d\tau \int d^2r d^2z \nabla^2 \Xi(\mathbf{r} - \mathbf{z}) \times \\ &\times \langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(\tau, \mathbf{r}) \rangle_0 \langle \varpi(0, \mathbf{y})\mu(\tau, \mathbf{z}) \rangle_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Корреляционная функция пропорциональна темпу накачки энергии  $\epsilon$ , как и должно быть.

Из-за наличия сдвигового потока однородность пространства нарушается. Следовательно, парные корреляционные функции зависят от обеих координат. В этом случае преобразование Фурье должно быть выполнено по обеим координатам. Мы определяем преобразование Фурье для функции Грина и функции парной корреляции следующим образом:

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\mu(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = \int \frac{d^2k d^2q}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}), \quad (22)$$

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = \int \frac{d^2k d^2q}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \mathcal{F}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}). \quad (23)$$

Это определение приводит к удобным для нас правилам.

Для преобразования Фурье  $\mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q})$  (22) мы получаем из уравнения (20) следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \left( \partial_t - \Sigma k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} + \alpha + \nu k_1^2 + \nu k_2^2 \right) \mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) \times \\ \times (2\pi)^2 \delta(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку уравнение (24) первого порядка по производным, оно может быть легко решено методом характеристик, что дает

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) &= (2\pi)^2 \theta(t) \delta(k_1 - q_1) \delta(k_2 - q_2 + \Sigma k_1 t) \times \\ &\times \exp \left( -\alpha t - \nu q_1^2 t - \nu q_2^2 t + \nu \Sigma q_2 q_1 t^2 - \frac{1}{3} \nu \Sigma^2 q_1^2 t^3 \right), \end{aligned} \quad (25)$$

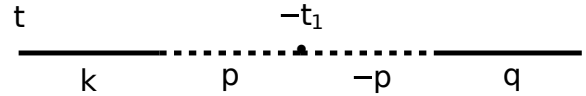


Рис. 1. Диаграмма Фейнмана, представляющая парную корреляционную функцию (27)

где  $\theta(t)$  — ступенчатая функция Хэвисайда.

Из уравнения (9) находим

$$\int d^2x \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \Xi(\mathbf{x}) = \frac{2\pi}{k_f^2} \exp \left( -\frac{\mathbf{k}^2}{2k_f^2} \right). \quad (26)$$

Следовательно, для парной корреляционной функции (21) мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) &= 2\epsilon \int dt_1 \int \frac{d^2p}{2\pi k_f^2} p^2 \exp \left( -\frac{p^2}{2k_f^2} \right) \times \\ &\times \mathcal{G}(t + t_1, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \mathcal{G}(t_1, \mathbf{q}, -\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (27)$$

Выражение (27) может быть представлено в виде диаграммы Фейнмана, изображенной на рис. 1. Здесь комбинация сплошной и штриховой линий представляет функцию Грина (22), маркер представляет накачку и подразумевается интегрирование по волновому вектору  $\mathbf{p}$ .

Чтобы найти ненулевой вклад в момент  $\langle \varpi^3 \rangle$ , необходимо учитывать взаимодействие между флуктуациями потока, описываемое членом третьего порядка  $\mathcal{I}_{int}$  (15). Главный вклад в третий момент дает член первого порядка:

$$\langle \varpi^3 \rangle = - \int \mathcal{D}\varpi \mathcal{D}\mu \exp(-\mathcal{I}_2) \varpi^3 \mathcal{I}_{int}. \quad (28)$$

Используя теорему Вика, находим

$$\begin{aligned} \langle \varpi^3 \rangle &= -6 \int dt d^2x \langle \varpi(0, \mathbf{0})\mu(t, \mathbf{x}) \rangle_0 \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \varpi(0, \mathbf{0})\varpi(t, \mathbf{x}) \rangle_0 \langle \varpi(0, \mathbf{0})\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \rangle_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражение (29) можно переписать через функцию тока, определенную соотношениями (12). Тогда

$$\begin{aligned} \langle \varpi^3 \rangle &= 6 \int_0^\infty dt \int dx_1 dx_2 \langle \varpi(t, \mathbf{0})\mu(0, \mathbf{x}) \rangle_0 \times \\ &\times \left[ -\frac{\partial}{\partial x_1} \langle \varpi(t, \mathbf{0})\varpi(0, \mathbf{x}) \rangle_0 \frac{\partial}{\partial x_2} \langle \varpi(t, \mathbf{0})\psi(0, \mathbf{x}) \rangle_0 + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \langle \varpi(t, \mathbf{0})\varpi(0, \mathbf{x}) \rangle_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \langle \varpi(t, \mathbf{0})\psi(0, \mathbf{x}) \rangle_0 \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь мы приняли во внимание, что корреляционные функции зависят от разности времен и что функция Грина равна нулю в отрицательные моменты времени  $t$  из-за причинности.

**4. ПАРНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ**

Парная корреляционная функция (23) может быть исследована с использованием полученных выражений. Подставляя выражение (27) в уравнение (23), находим

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = 2\epsilon \int_0^\infty dt_1 \int \frac{d^2 p p^2}{2\pi k_f^2} \times \exp\left(-\frac{p^2}{2k_f^2} + W\right),$$

$$W = -\alpha(t_1 + t_3) - \nu p_1^2(t_1 + t_3) - \nu p_2^2(t_1 + t_3) + \nu \Sigma p_2 p_1 (t_1^2 + t_3^2) - \frac{1}{3} \nu \Sigma^2 p_1^2 (t_1^3 + t_3^3) + i p_1 x_1 + i(p_2 - \Sigma p_1 t_3) x_2 - i p_1 y_1 - i(p_2 - \Sigma p_1 t_1) y_2,$$

где  $t > 0, t_3 = t + t_1$ . Это выражение переписывается как

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = 2\epsilon k_f \frac{\partial}{\partial k_f} \int \frac{dp_1 dp_2}{2\pi} \times \int_0^\infty dt_1 \exp\left(-\frac{p_1^2 + p_2^2}{2k_f^2} + W\right).$$

Экспонента здесь представляется в виде

$$\exp\left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \hat{L} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right],$$

где  $\hat{L}$  — матрица с компонентами

$$\begin{aligned} L_{11} &= k_f^{-2} + 2\nu(t_1 + t_3) + \frac{2}{3}\nu\Sigma^2(t_1^3 + t_3^3), \\ L_{12} &= L_{21} = -\nu\Sigma(t_1^2 + t_3^2), \\ L_{22} &= k_f^{-2} + 2\nu(t_1 + t_3). \end{aligned}$$

Определитель  $\hat{L}$  равен

$$\begin{aligned} \det \hat{L} &= k_f^{-4} + k_f^{-2} 4\nu(t_1 + t_3) + \\ &+ k_f^{-2} \frac{2}{3} \nu \Sigma^2 (t_1^3 + t_3^3) + 4\nu^2 (t_1 + t_3)^2 + \\ &+ \frac{1}{3} \nu^2 \Sigma^2 t_1^4 + \frac{4}{3} \nu^2 \Sigma^2 t_1^3 t_3 - \\ &- 2\nu^2 \Sigma^2 t_1^2 t_3^2 + \frac{4}{3} \nu^2 \Sigma^2 t_1 t_3^3 + \frac{1}{3} \nu^2 \Sigma^2 t_3^4. \end{aligned} \quad (31)$$

Интегрируя по  $p_1, p_2$ , находим

$$\langle \varpi(t, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{y}) \rangle_0 = 2\epsilon k_f \frac{\partial}{\partial k_f} \times \int_0^\infty dt_1 \exp[-\alpha(t_1 + t_3)] (\det \hat{L})^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1 - \Sigma t_3 x_2 - y_1 + \Sigma t_1 y_2)^2 [p_1^2] - \frac{1}{2}(x_2 - y_2)^2 [p_2^2] - (x_1 - \Sigma t_3 x_2 - y_1 + \Sigma t_1 y_2)(x_2 - y_2) [p_1 p_2]\right], \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} [p_1^2] &= (\det \hat{L})^{-1} [k_f^{-2} + 2\nu(t_1 + t_3)], \\ [p_2^2] &= \frac{1}{\det \hat{L}} \left[ k_f^{-2} + 2\nu(t_1 + t_3) + \frac{2}{3} \nu \Sigma^2 (t_1^3 + t_3^3) \right], \\ [p_1 p_2] &= (\det \hat{L})^{-1} \nu \Sigma (t_1^2 + t_3^2). \end{aligned}$$

Как и должно быть, корреляционная функция (32) зависит исключительно от  $x_1 - y_1$ .

Прежде всего мы вычисляем второй момент  $\langle \varpi^2 \rangle$ . Полагая  $t = 0, \mathbf{x} = 0, \mathbf{y} = 0$ , из выражения (32) находим

$$\langle \varpi^2 \rangle = 2\epsilon k_f \frac{\partial}{\partial k_f} \int_0^\infty dt_1 \exp(-2\alpha t_1) (\det \hat{L})^{-1/2}, \quad (33)$$

где  $t_3 = t_1$ . Как мы увидим,  $t_1 \sim \tau_*$ . Пренебрегая членами порядка  $\nu k_f^2 t_1 \ll 1$ , находим в главном приближении из выражения (31)

$$\det \hat{L} \approx k_f^{-4} + \frac{4}{3} k_f^{-2} \nu \Sigma^2 t_1^3.$$

Подставляя это выражение в уравнение (33), после интегрирования по  $t_1$  находим

$$\langle \varpi^2 \rangle = 2\epsilon k_f^2 \tau_* \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right). \quad (34)$$

При этих вычислениях мы заменили  $\exp(-2\alpha t_1)$  на единицу, поскольку  $\alpha \tau_* \ll 1$ .

Рассмотрим случай, когда  $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$  и  $t \gg \tau_*$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle \varpi(t, \mathbf{0}) \varpi(0, \mathbf{0}) \rangle_0 &= \\ &= 2\epsilon k_f \frac{\partial}{\partial k_f} \int_0^\infty dt_1 \frac{\exp[-\alpha(t_1 + t_3)]}{(\det \hat{L})^{1/2}}, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $t_3 = t + t_1$ . Таким образом  $t_1 \sim t$  и

$$\det \hat{L} \approx k_f^{-2} \frac{2}{3} \nu \Sigma^2 [t_1^3 + (t + t_1)^3]. \quad (36)$$

Приближение корректно при условии  $t \ll (\nu k_f^2)^{-1}$ . Так как  $\alpha \lesssim \nu k_f^2$ , мы снова можем заменить  $\exp(-2\alpha t_1)$  на единицу в уравнении (35). Тогда находим

$$\langle \varpi(t, \mathbf{0}) \varpi(0, \mathbf{0}) \rangle = \sqrt{6} c_1 \frac{\epsilon k_f^2 \tau_*^{3/2}}{t^{1/2}}, \quad (37)$$

где  $c_1$  — численный фактор,

$$c_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s)^3 + s^3}} \approx 1.6969. \quad (38)$$

Выражение (37) справедливо, если

$$\tau_* \ll t \ll (\nu k_f^2)^{-1}.$$

При  $t \sim \tau_*$  оно переходит в выражение (34).

Если  $t = 0$ , то парная корреляционная функция зависит от разности  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ . Поэтому можно положить  $\mathbf{y} = 0$ , что дает

$$\langle \varpi(0, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{0}) \rangle_0 = 2\epsilon k_f \frac{\partial}{\partial k_f} \int_0^\infty dt_1 \frac{\exp(-B)}{(\det \hat{L})^{1/2}}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \det \hat{L} &= k_f^{-4} + 8k_f^{-2} \nu t_1 + \frac{4}{3} k_f^{-2} \nu \Sigma^2 t_1^3 + \\ &+ 8\nu^2 t_1^2 + \frac{4}{3} \nu^2 \Sigma^2 t_1^4, \\ B &= \frac{1}{2} (x_1 - \Sigma t_1 x_2)^2 [p_1^2] + \frac{1}{2} x_2^2 [p_2^2] + \\ &+ (x_1 - \Sigma t_1 x_2) x_2 [p_1 p_2], \end{aligned} \quad (40)$$

т. е.

$$\begin{aligned} B &= (2 \det \hat{L})^{-1} \left\{ [k_f^{-2} + 4\nu t_1] x_1^2 - \right. \\ &- 2\Sigma t_1 [k_f^{-2} + 2\nu t_1] x_1 x_2 + [k_f^{-2} + 4\nu t_1 + \\ &\left. + \Sigma^2 t_1^2 k_f^{-2} + \frac{4}{3} \nu \Sigma^2 t_1^3] x_2^2 \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Мы рассмотрим различные области, соответствующие различным характерным значениям  $t_1$ . В любом случае мы полагаем  $\alpha t_1 \ll 1$  и потому опускаем в выражении (39) множитель  $\exp(-2\alpha t_1)$ .

Рассмотрим случай  $x_1 = 0$ . Если  $k_f |x_2| \gg 1$ , то выражение (39) экспоненциально мало. Поэтому мы анализируем противоположный случай. Если  $k_f |x_2| \ll (\Sigma \tau_*)^{-1}$ , то зависимостью  $\langle \varpi(0, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{0}) \rangle$  от  $x_2$  можно пренебречь, и мы возвращаемся к выражению для парного момента (34). Поэтому мы рассматриваем область

$$1 \gg k_f |x_2| \gg (\Sigma \tau_*)^{-1}, \quad (42)$$

где реализуется степенное поведение. Существуют две различные области интегрирования по  $t_1$  в выражении (39): малые  $t_1$  и большие  $t_1$ , где набираются главные вклады в  $\langle \varpi(0, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{0}) \rangle$ .

В первой области (малые  $t_1$ ) главным членом в фигурных скобках в выражении (41) является  $\Sigma^2 t_1^2 k_f^{-2} x_2^2$ . Из выражений (40), (41) в главном приближении находим

$$\det \hat{L} = k_f^{-4}, \quad B = \frac{1}{2} \Sigma^2 t_1^2 k_f^2 x_2^2. \quad (43)$$

Следовательно, характерное значение времен  $t_1$  есть

$$t_1 \sim (\Sigma k_f x_2)^{-1}.$$

Далее из уравнения (42) находим

$$\Sigma^{-1} \ll t_1 \ll \tau_*. \quad (44)$$

Неравенства (44) оправдывают выражения (43). Подставляя выражения (43) в уравнение (39), находим вклад малых  $t_1$ :

$$\langle \varpi(0, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{0}) \rangle_s = \sqrt{2\pi} \frac{2\epsilon k_f}{\Sigma |x_2|}. \quad (45)$$

Второй вклад происходит от области больших  $t_1$ , где главные вклады в определитель (40) и в величину (41) даются выражениями

$$\det \hat{L} = \frac{4}{3k_f^2} \nu \Sigma^2 t_1^3, \quad B = \frac{3}{8} (\nu t_1)^{-1} x_2^2. \quad (46)$$

Поэтому характерное  $t_1$  оценивается как  $t_1 \sim \nu^{-1} x_2^2$ , и мы находим из уравнения (42)

$$(\nu k_f^2)^{-1} \gg t_1 \gg \tau_*. \quad (47)$$

Неравенства (47) оправдывают выражения (46). Подставляя выражения (46) в уравнение (39), находим то же самое выражение (48). Итак, при  $x_1 = 0$  ответ (48) должен быть удвоен:

$$\langle \varpi(0, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{0}) \rangle = \sqrt{2\pi} \frac{4\epsilon k_f}{\Sigma |x_2|}, \quad (48)$$

На границе  $k_f |x_2| \sim (\Sigma \tau_*)^{-1}$  выражение (48) сшивается с выражением для второго момента (34).

Теперь мы приступаем к рассмотрению случая  $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ . Если  $k_f |x_1| \ll 1$ , то мы возвращаемся к выражению для второго момента (34) для корреляционной функции (39). Поэтому мы анализируем область

$$1 \ll k_f |x_1| \ll \Sigma (\nu k_f^2)^{-1}, \quad (49)$$

где корреляционная функция (39) обладает степенным поведением. По аналогии с приведенным выше анализом, можно рассмотреть вклады малых и больших  $t_1$ . Так как  $k_f |x_1| \gg 1$ , подынтегральное

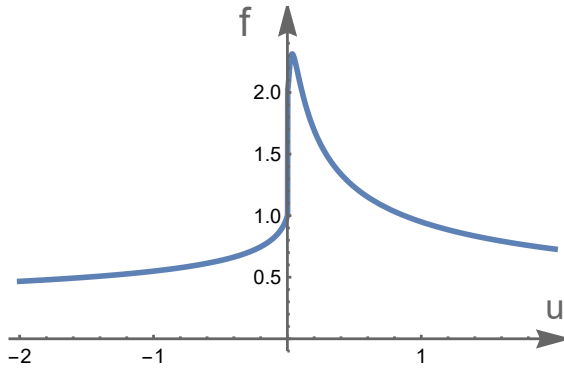


Рис. 2. График функции  $f(u)$  (54)

выражение в (39) становится экспоненциально малым при малых  $t_1$ . Следовательно, этим вкладом можно пренебречь.

Теперь мы переходим к вкладу больших  $t_1$ , тогда главные вклады в определитель (40) и величину (41) записываются как

$$\det \hat{L} = \frac{4}{3k_f^2} \nu \Sigma^2 t_1^3, \quad B = \frac{3}{8} \frac{x_1^2}{\nu \Sigma^2 t_1^3}. \quad (50)$$

Мы заключаем, что характерное значение  $t_1$  определяется как  $t_1 \sim x_1^{2/3} (\nu \Sigma^2)^{-1/3}$ . В этом случае неравенства (49) диктуют ту же область (47) для  $t_1$ . Неравенства (47) оправдывают выражение (50). Подставляя выражение (50) в уравнение (39) и беря интеграл по  $t_1$ , находим

$$\langle \varpi(0, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{0}) \rangle = \Gamma \left( \frac{7}{6} \right) \frac{2^{3/2} 3^{1/3} \epsilon k_f}{\Sigma^{2/3} \nu^{1/3} |x_1|^{1/3}}. \quad (51)$$

При граничном значении  $x_1 \sim k_f^{-1}$  выражение (51) сшивается с выражением для второго момента (34).

Теперь мы обобщаем наш анализ, считая, что обе координаты,  $x_1$  и  $x_2$ , не равны нулю и удовлетворяют неравенствам (42), (49). Тогда вклад в  $\langle \varpi(0, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{0}) \rangle$  от малых  $t_1$  отсутствует (является экспоненциально малым), поэтому мы концентрируемся на вкладе от больших  $t_1$ , определяемых тем же условием (47). Тогда главные вклады в детерминант (40) и в величину (41) записываются как

$$\det \hat{L} = \frac{4}{3k_f^2} \nu \Sigma^2 t_1^3, \quad B = \frac{3}{8} \frac{(x_1 - \Sigma t_1 x_2)^2}{\nu \Sigma^2 t_1^3}. \quad (52)$$

Отметим, что выражение (52) является обобщением выражений (46), (50).

Подставляя выражения (52) в уравнение (39) и переходя к безразмерной переменной  $\vartheta$ ,  $\vartheta = \nu t_1 / x_2^2$ , получаем

$$\langle \varpi(0, \mathbf{x}) \varpi(0, \mathbf{0}) \rangle = \sqrt{2\pi} \frac{2\epsilon k_f}{\Sigma |x_2|} f \left( \frac{\nu x_1}{\Sigma x_2^3} \right), \quad (53)$$

$$f(u) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d\vartheta}{\vartheta^{3/2}} \exp \left[ -\frac{3}{8\vartheta} \left( 1 - \frac{u}{\vartheta} \right)^2 \right]. \quad (54)$$

Здесь  $f(-0) = 1$ , и мы воспроизводим выражение (45). Если  $|u| \gg 1$ , то

$$f \approx \frac{3^{1/3} \Gamma(7/6)}{\sqrt{\pi} |u|^{1/3}}, \quad (55)$$

что воспроизводит выражение (51). Функция  $f(u)$  изображена на рис. 2. Надо быть аккуратным при малых  $u$ : функция  $f(u)$  испытывает скачок при  $u = 0$ , который виден на рис. 2. Скачок объясняется конечным вкладом в интеграл в выражении (54) при малых положительных  $u$ , который происходит из области интегрирования  $\vartheta \sim u$ , при отрицательных  $u$  такой вклад отсутствует. Подчеркнем, что в соответствии с (42), (49)  $|u|$  не может быть меньше, чем  $\nu k_f^2 / \Sigma$ . Поэтому область  $|u| \lesssim \nu k_f^2 / \Sigma$  покрывается выражениями (53), (54).

### 5. ТРЕТИЙ МОМЕНТ ЗАВИХРЕННОСТИ

Главный вклад в третий момент завихренности определяется выражением (30). Удобно ввести преобразование Фурье для функций, которые входят в это выражение:

$$F(t, \mathbf{q}) = \int d^2x \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \langle \varpi(t, \mathbf{0}) \varpi(0, \mathbf{x}) \rangle_0, \quad (56)$$

$$\Phi(t, \mathbf{k}) = \int d^2x \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \langle \varpi(t, \mathbf{0}) \psi(0, \mathbf{x}) \rangle_0, \quad (57)$$

$$G(t, \mathbf{p}) = \int d^2x \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}) \langle \varpi(t, \mathbf{0}) \mu(0, \mathbf{x}) \rangle_0. \quad (58)$$

В терминах величин (56)–(58) выражение (30) может быть переписано как

$$\langle \varpi^3 \rangle = 6 \int_0^\infty dt \int \frac{d^2q d^2k}{(2\pi)^4} (q_1 k_2 - q_2 k_1) \times \\ \times F(t, \mathbf{q}) \Phi(t, \mathbf{k}) G(t, \mathbf{q} + \mathbf{k}). \quad (59)$$

Отметим закон сохранения волнового вектора.

Можно выразить величины (56)–(58) через функцию Грина и парную корреляционную функцию  $\varpi$ :

$$G(t, \mathbf{p}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} G(t, \mathbf{k}, \mathbf{p}) =$$



$$= \theta(t) \exp \left( -\alpha t - \nu \mathbf{p}^2 t + \nu \Sigma p_2 p_1 t^2 - \frac{1}{3} \nu \Sigma^2 p_1^2 t^3 \right). \quad (60)$$

Отметим, что уравнение (25) переписывается следующим образом:

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = (2\pi)^2 \delta(k_1 - q_1) \times \delta(k_2 - q_2 + \Sigma k_1 t) G(t, \mathbf{q}). \quad (61)$$

Для величины (57) находим

$$F(t, \mathbf{q}) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \mathcal{F}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = 2\pi \frac{2\epsilon}{k_f^2} \int_0^\infty dt_1 (q_1^2 + q_3^2) \exp \left( -\frac{q_1^2 + q_3^2}{2k_f^2} \right) \times G(t + t_1, q_1, q_3) G(t_1, -q_1, -q_3),$$

где

$$q_3 = q_2 + \Sigma q_1 t_1.$$

Считая  $t > 0$ , находим

$$F(t, \mathbf{q}) = 2\pi \frac{2\epsilon}{k_f^2} \int_0^\infty dt_1 (q_1^2 + q_3^2) \exp \left( -\frac{q_1^2 + q_3^2}{2k_f^2} \right) \times \exp \left[ -(\alpha + \nu q_1^2 + \nu q_3^2)(t_1 + t_3) + \nu \Sigma q_1 q_3 (t_1^2 + t_3^2) - \frac{1}{3} \nu \Sigma^2 q_1^2 (t_1^3 + t_3^3) \right], \quad (62)$$

где

$$t_3 = t + t_1, \quad q_3 = q_2 + \Sigma q_1 t_1.$$

Аналогично для  $t > 0$ :

$$\Phi(t, \mathbf{k}) = 2\pi \frac{2\epsilon}{k_f^2} \int_0^\infty dt_2 \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_1^2 + k_2^2} \exp \left( -\frac{k_1^2 + k_3^2}{2k_f^2} \right) \times \exp \left[ -(\alpha + \nu k_1^2 + \nu k_3^2)(t_2 + t_4) + \nu \Sigma k_3 k_1 (t_2^2 + t_4^2) - \frac{1}{3} \nu \Sigma^2 k_1^2 (t_2^3 + t_4^3) \right], \quad (63)$$

где

$$t_4 = t + t_2, \quad k_3 = k_2 + \Sigma k_1 t_2.$$

Чтобы найти главный вклад в третий момент, следует подставить выражения (60), (62), (63) в выражение (59) и вычислить получившиеся интегралы. Этот вклад представлен фейнмановской диаграммой, изображенной на рис. 3. Обозначения здесь те же, что и на рис. 1: сплошная линия в комбинации со штриховой обозначает функцию Грина

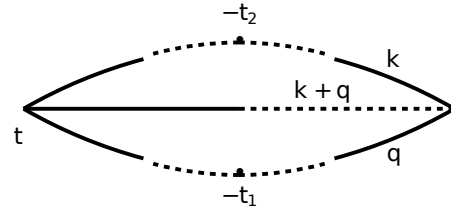


Рис. 3. Диаграмма Фейнмана, представляющая первый вклад в третий момент завихренности

(22), маркер представляет накачку. Далее в уравнении (59) мы переходим к интегрированию по компонентам  $k_1, k_3, q_1, q_3$ . Тогда следует подставить

$$q_2 = q_3 - \Sigma q_1 t_1, \quad k_2 = k_3 - \Sigma k_1 t_2 \quad (64)$$

в выражения (62), (63) для  $F$  и  $\Phi$ . Компоненты  $k_1, k_3, q_1, q_3$  ограничены накачкой и поэтому не могут быть много больше  $k_f$ .

Далее мы изучаем главный вклад в интеграл (59). Как мы увидим, этот вклад происходит из области интегрирования, где  $t, t_1 \gg \tau_*, t_2, k_1, q_1 \ll k_f$ , в то время как  $k_3, q_3 \sim k_f$ . Поэтому мы можем пренебречь  $k_1, q_1$  по сравнению с  $k_3, q_3$ . Затем мы пренебрегаем  $t_2$  по сравнению с  $t, t_1$  и сохраняем только члены третьего порядка по  $t, t_1$  в экспонентах в выражениях (60), (62), (63). Мы также пренебрегаем членами с  $\alpha$ . Тогда

$$G(t, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \rightarrow \theta(t) \exp \left[ -\nu \Sigma^2 t_1^2 t q_1^2 - \nu \Sigma^2 t_1 t^2 q_1 (q_1 + k_1) - \frac{1}{3} \nu \Sigma^2 (q_1 + k_1)^2 t^3 \right], \quad (65)$$

$$F(t, \mathbf{q}) \rightarrow 2\pi \frac{2\epsilon}{k_f^2} \int_0^\infty dt_1 q_3^2 \exp \left( -\frac{q_3^2}{2k_f^2} \right) \times \exp \left[ -\frac{1}{3} \nu \Sigma^2 q_1^2 (t_1^3 + t_3^3) \right], \quad (66)$$

$$\Phi(t, \mathbf{k}) = 2\pi \frac{2\epsilon}{k_f^2} \int_0^\infty dt_2 \frac{k_3^2}{k_1^2 + k_2^2} \times \exp \left( -\frac{k_3^2}{2k_f^2} \right) \exp \left[ -\frac{1}{3} \nu \Sigma^2 k_1^2 t^3 \right]. \quad (67)$$

Терерь мы можем явно проинтегрировать по  $t_2$  в выражении (67), что дает

$$\int_0^\infty dt_2 \frac{1}{k_1^2 + (\Sigma t_2 k_1 - k_3)^2} \rightarrow \pi \Sigma^{-1} k_1^{-2} \theta(k_1 k_3). \quad (68)$$

Функция Хэвисайда в выражении (68) означает, что интеграл по  $t_2$  для одинаковых знаков  $k_1, k_3$  много больше, чем для разных знаков  $k_1, k_3$ . Таким образом, из уравнения (67) находим

$$\Phi(t, \mathbf{k}) \rightarrow \frac{(2\pi)^2 \epsilon}{\Sigma k_f^2} \theta(k_1 k_3) \frac{k_3^2}{k_1^2} \exp\left(-\frac{k_3^2}{2k_f^2}\right) \times \exp\left(-\frac{1}{3} \nu \Sigma^2 k_1^2 t^3\right). \quad (69)$$

Подставляя выражения (65), (66), (69) в соотношение (59) и интегрируя по  $k_3, q_3$ , находим

$$\langle \varpi^3 \rangle = 6\epsilon^2 k_f^2 \int_0^\infty dt dt_1 t_1 \int dk_1 dq_1 \frac{q_1}{k_1} \times \exp\left\{-\nu \Sigma^2 \left[\frac{2}{3}(t_1 + t)^2 q_1^2 + \left(t_1 t^2 + \frac{2}{3} t^3\right) q_1 k_1 + \frac{2}{3} t^3 k_1^2\right]\right\}. \quad (70)$$

Выполняя затем интегрирование по  $q_1$ , находим

$$\langle \varpi^3 \rangle = -\frac{6\epsilon^2 k_f^2}{\Sigma \nu^{1/2}} \int_0^\infty dt dt_1 t_1 \int dk_1 \sqrt{2\pi} \frac{b}{a^{3/2}} \times \exp\left\{\nu \Sigma^2 \left[\frac{b^2}{2a} - \frac{2}{3} t^3\right] k_1^2\right\}, \quad (71)$$

где

$$a = \frac{4}{3}(t_1 + t)^3, \quad b = t_1 t^2 + \frac{2}{3} t^3.$$

Интегрируя затем по  $k_1$ , получим

$$\langle \varpi^3 \rangle = -\frac{12\pi \epsilon^2 k_f^2}{\Sigma^2 \nu} \int_0^\infty dt dt_1 t_1 \frac{b/a}{\sqrt{\frac{4}{3} t^3 a - b^2}}. \quad (72)$$

Переходя к переменной  $\eta = t_1/t$ , мы получаем логарифмический интеграл,

$$\langle \varpi^3 \rangle = -\frac{9\pi \epsilon^2 k_f^2}{\Sigma^2 \nu} c_2 \int \frac{d\eta}{\eta}, \quad (73)$$

где  $c_2$  — численный множитель,

$$c_2 = \int_0^\infty d\eta \frac{\eta(3\eta + 2)}{(1 + \eta)^3} (12 + 36\eta + 39\eta^2 + 16\eta^3)^{-1/2},$$

$$c_2 \approx 0.187.$$

Так как  $\eta \sim 1$ , то  $t_1 \sim t$ . Отметим также, что

$$k_1, q_1 \sim (\nu \Sigma^2 t^3)^{-1/2}, \quad (74)$$

это следует из соответствующих интегралов.

Интегрирование по  $t$  в (73) ограничено сверху «вязким» временем  $(\nu k_f^2)^{-1}$ , поскольку при больших временах отброшенные в экспонентах в выражениях (60), (62), (63) члены типа  $\nu k_3^2 t$  становятся существенными. Мы пренебрегли  $k_1, q_1$  по сравнению с  $k_f$ , поэтому  $t \gg \tau_*$ , как следует из соотношения (74). Итак, мы заключаем, что время  $t$  лежит в интервале

$$(\nu k_f^2)^{-1} \gtrsim t \gtrsim \tau_*. \quad (75)$$

В терминах  $q_1, k_1$  интервал (75) принимает вид

$$k_f \gtrsim q_1, k_1 \gtrsim \frac{\nu k_f^2}{\Sigma} k_f, \quad (76)$$

как это вытекает из формулы (74). Отметим, что интеграл (68) набирается вблизи

$$t_2 \approx k_3 (\Sigma k_1)^{-1} \sim k_f (\Sigma k_1)^{-1}. \quad (77)$$

Как следует из соотношений (74), (77), отношение

$$t_2/t \sim (\nu k_f^2 t)^{1/2} \quad (78)$$

мало в интервале (75). Как было продемонстрировано в работе [16], когерентный вихрь формируется при условии  $\alpha \lesssim \nu k_f^2$ . Поскольку членами типа  $\nu k_f^2 t$  можно пренебречь, членами с  $\alpha$  также можно пренебречь. Таким образом, мы обосновали приближения, сделанные при вычислении интеграла (75).

Логарифмический интеграл (73) набирается в широком интервале  $t$ , который определяется условием (75). Чтобы найти этот интеграл, достаточно подставить нижнее и верхнее значения  $t$  из условий (75) как пределы в интеграл (73). В результате мы находим

$$\langle \varpi^3 \rangle = -\frac{6\pi \epsilon^2 k_f^2}{\Sigma^2 \nu} c_2 \ln \frac{\Sigma}{\nu k_f^2} \quad (79)$$

с логарифмической точностью. Напомним, что мы полагали  $\Sigma > 0$  в наших вычислениях. Поэтому знак минус в выражении (79) означает, что третий момент имеет знак, противоположный знаку темпа сдвига  $\Sigma$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы аналитически исследовали парную корреляционную функцию флуктуирующей завихренности и ее третий момент внутри когерентного вихря, возникающий как следствие обратного каскада в двумерной турбулентности. Конкретный выбор накачки (внешнего воздействия) позволил нам получить

явные аналитические выражения для объекта. Выражения (34), (37), (48), (51), (53) находятся в соответствии с общим анализом, данным в работе [18].

Одним из новых ингредиентов является логарифм в выражении (79), полученном с логарифмической точностью. Это связано с тем фактом, что третий момент набирается в широкой области времен  $\tau_* < t < (\nu k_f^2)^{-1}$ , в то время как второй момент определяется областью  $t \sim \tau_*$ . Существование широкой области времен, очевидно, универсально, т. е. не зависит от конкретной формы накачки. Роль этой особенности для высоких моментов  $\varpi$  требует дальнейшего исследования.

Стоит отметить, что также существуют флуктуации течения масштаба порядка размера системы  $L$ . Как было показано в работе [24], эти флуктуации вносят существенный вклад в статистику скорости. Однако при условии  $k_f L \gg 1$  их вклад в моменты завихренности мал.

**Финансирование.** Работа одного из авторов (И. В. К.) выполнялась в рамках научной программы Национального центра физики и математики (проект «Физика высоких плотностей энергии. Этап 2023-2025»). Авторы В. В. Л. и М. М. Т. благодарят за поддержку Министерство высшего образования и науки РФ (проект № 075-15-2022-1099) и Фонд Базис.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Boffetta and R. E. Ecke, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **44**, 427 (2012).
2. R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
3. C. E. Leith, *Phys. Fluids* **11**, 671 (1968).
4. G. K. Batchelor, *Phys. Fluids* **12**, 233 (1969).
5. R. H. Kraichnan and D. Montgomery, *Rep. Prog. Phys.* **43**, 547 (1980).
6. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, *Phys. Fluids* **21**, 125101 (2009).
7. А. В. Орлов, М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, Письма в ЖЭТФ **107**, 166 (2018) [A. V. Orlov, M. Yu. Brazhnikov, and A. A. Levchenko, *JETP Lett.* **107**, 157 (2018)].
8. D. Molenaar, H. J. H. Clercx, and G. J. F. van Heijst, *Physica D* **196**, 329 (2004).
9. M. Chertkov, C. Connaughton, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 084501 (2007).
10. J. Laurie, G. Boffetta, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 254503 (2014).
11. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, Письма в ЖЭТФ **101**, 181 (2015) [I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *JETP Lett.* **101**, 164 (2015)].
12. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Phys. Rev. E* **93**, 033104 (2016).
13. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *J. Fluid Mech.* **809**, R2 (2016).
14. A. Frishman, J. Laurie, and G. Falkovich, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 032602 (2017).
15. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, Письма в ЖЭТФ **106**, 633 (2017) [I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *JETP Lett.* **106**, 659 (2017)].
16. I. Kolokolov and V. Lebedev, *Phys. Rev. E* **102**, 023108 (2020).
17. A. N. Doludenko, S. V. Fortova, I. V. Kolokolov, and V. V. Lebedev, *Ann. Phys.* **447**, 169072 (2022).
18. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, М. М. Тумакова, Письма в ЖЭТФ **117**, 127 (2023).
19. M. Souzy, I. Zaier, H. Lhuissier, T. Le Borgne, and B. Metzger, *J. Fluid Mech.* **838**, R3 (2018).
20. H. W. Wyld, *Ann. Phys.* **14**, 134 (1961).
21. P. C. Martin, E. D. Siggia, and H. A. Rose, *Phys. Rev. A* **8**, 423 (1973).
22. J. Hertz, Y. Roudi, and P. Sollich, *J. Phys. A* **50**, 033001 (2017).
23. G. C. Wick, *Phys. Rev.* **80**, 268 (1950).
24. A. Frishman, *Phys. Fluids* **29**, 125102 (2017).