

# КВАНТОВЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ МЕЖСЛОЙНОЙ ПРОВОДИМОСТИ В МНОГОСЛОЙНОМ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ИЗОЛЯТОРЕ

З.З. Алисултанов <sup>a,b\*</sup>, Г.О. Абдуллаев <sup>b</sup>, П.Д. Григорьев <sup>c,d</sup>, Н.А. Демиров <sup>e</sup>

<sup>a</sup> *Международный центр теоретической физики им. А.А. Абрикосова Московского физико-технического института 141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

<sup>b</sup> *Институт физики им. Х.И. Амирханова Дагестанского федерального исследовательского центра Российской академии наук 367015, Махачкала, Россия*

<sup>c</sup> *Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

<sup>d</sup> *Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС» 119049, Москва, Россия*

<sup>e</sup> *Объединенный институт высоких температур Российской академии наук 125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 июля 2022 г.,  
после переработки 30 августа 2022 г.  
Принята к публикации 6 сентября 2022 г.

Исследованы квантовые и разностные осцилляции межслоевой проводимости в многослойной системе из тонких пленок топологических изоляторов. Из-за линейности спектра носителей в такой системе возникают новые особенности квантовых осцилляций. В частности, частоты осцилляций де Гааза – ван Альфена и Шубникова–де Гааза зависят от химического потенциала квадратично, а не линейно, как в случае систем с параболическим спектром носителей. По этой же причине фактор температурного затухания осцилляций содержит химический потенциал. Это связано с неэквидистантностью уровней Ландау: чем выше химический потенциал, тем меньше расстояние между уровнями Ландау. Однако частоты биений, а также разностных медленных осцилляций не зависят от химического потенциала, и в этом смысле поведение этих систем аналогично поведению обычных недираковских систем. Наконец, в борновском приближении (втором порядке крестовой диаграммной техники) мы рассмотрели общий случай, когда в межслоевой проводимости учитываются как внутризонные, так и межзонные переходы. Мы показали, что вклад межзонных переходов не существен для осцилляций проводимости при отсутствии магнитных примесей. Однако при наличии в спектре точки Дирака от нулевого уровня Ландау возникает линейный по магнитному полю межзонный вклад в проводимость. Этот вклад при низких температурах экспоненциально мал по сравнению с внутризонным вкладом и исчезает при нулевой температуре.

DOI: 10.31857/S0044451023030124  
EDN: QFAGYG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние три десятилетия магнитные квантовые осцилляции в квазидвумерных металлах вызвали большой экспериментальный интерес, по-

скольку позволили определять параметры электронной структуры различных перспективных материалов, таких как органические металлы [1–14] (см. также большое число более свежих результатов авторов процитированных работ), высокотемпературные сверхпроводники, включая различные купраты [15–24] и железосодержащие сверхпроводники [25–27], гетероструктуры и сверхрешетки [28], интеркалированный графит [29], различные вандерваальсовы кристаллы [30] и многие другие слои-

\* E-mail: zaur0102@gmail.com

стые проводники [31]. Параллельно магнитные осцилляции в квазидвумерных металлах привлекли и большое внимание теоретиков [10–14, 32–49], поскольку обнаружился ряд новых качественных эффектов, особенно в проводимости [6, 11, 12], не описываемых в рамках традиционной теории, построенной как для обычных трехмерных металлов [50–52], так и для чисто двумерных электронных систем [53]. В обычных трехмерных металлах осцилляции в магнитном поле вызваны относительно малым числом носителей вблизи экстремальных сечений поверхности Ферми, из за чего они являются достаточно слабыми и описываются теорией Лифшица–Косевича. В отличие от них квазидвумерные системы характеризуются достаточно большим относительным числом электронов, дающих вклад в осцилляции, и условие малой амплитуды и постоянства химического потенциала уже не выполняются [54], что приводит к неприменимости формализма Лифшица–Косевича, в частности, для температурной зависимости гармоник [37, 38]. Ферми-поверхность в квазидвумерных металлах представляет собой гофрированный цилиндр, и наличие двух экстремальных сечений (магнитное поле направлено поперек слоев) приводит к суперпозиции двух разных частот и тем самым возникновению биений:

$$\cos\left(\frac{\pi k \alpha \Delta S}{B} - \frac{\pi}{4}\right),$$

где  $\Delta S$  — разность площадей экстремальных сечений ферми-поверхности. Фазовый множитель  $\pi/4$  определяется из геометрических соображений и является универсальным для всех величин.

Экспериментально было показано наличие сдвига фазы биений осцилляций намагниченности относительно поперечной проводимости [1–6]. Сначала считалось, что этот сдвиг фазы вызван наличием малых карманов поверхности Ферми, однако вычисление зонной структуры показало неверность данного предположения [8]. Кроме того, в таких системах для проводимости наблюдаются так называемые медленные осцилляции. Выяснению физического механизма и объяснению этих эффектов посвящены работы [6, 11, 40, 49].

В работе [6] экспериментально показано и теоретически объяснено наличие зависящей от магнитного поля разности фаз биений между осцилляциями намагниченности и магнитосопротивления в кристалле  $\beta$ -(BEDT-TTF)2IBr2 при температуре  $T \approx 0.6$  К в магнитном поле до 16 Тл. В рамках квазиклассического транспортного уравнения Больцмана показано, что наличие разности фаз связано

с тем, что во втором случае характер осцилляций определяется произведением времени релаксации, среднего квадрата скорости электронов на поверхности Ферми и плотности состояний, которые сами по себе носят осциллирующий характер, в то время как в определение намагниченности входит только плотность состояний. Данное смещение по фазе появляется, когда циклотронная энергия сравнивается с межслоевым интегралом перескока  $t$ , т. е. при достаточно больших значениях магнитного поля или сильной анизотропии.

В работе [11] рассмотрены медленные осцилляции межслоевой проводимости в (BEDT-TTF)2IBr2 и показано, что они связаны с гофрированностью поверхности Ферми. Здесь рассматривались осцилляции намагниченности и продольного магнитосопротивления при различных ориентациях магнитного поля. При этом частота биений и частота медленных осцилляций менялись коррелированным образом:  $F_{slow}(\theta) = 2F_{beat}(\theta)$ , где  $\theta$  — угол наклона магнитного поля. Из этого можно сделать вывод, что физическое происхождение медленных осцилляций связано именно с особой формой поверхности Ферми. В рамках квазиклассического приближения (уравнение Больцмана) показано, что природа медленных осцилляций аналогична межподзонным осцилляциям: они возникают из-за нелинейности и наличия двух близких частот. При этом частота медленных осцилляций равна удвоенной частоте биений, что согласуется с экспериментом. Независимость медленных осцилляций от энергии приводит к отсутствию температурного множителя, т. е. амплитуда медленных осцилляций не зависит от температуры в рамках модели, учитывающей только упругое рассеяние на примесях. Это свойство медленных осцилляций также аналогично межподзонным осцилляциям в полупроводниках [55–57] и является общим для разностных осцилляций. Необходимо отметить, что фактор Дингла для медленных осцилляций отличается от такового для обычных осцилляций, так как макроскопическая пространственная неоднородность по своему действию подобна температуре, оба приводят к размытию поверхности Ферми [11, 12, 40]. Таким образом, фактор Дингла для медленных осцилляций содержит только рассеяние на микроскопических центрах, например, примесях. Учет электрон-электронного и электрон-фононного взаимодействий приведет к некоторой зависимости от температуры, однако температурное затухание медленных осцилляций все равно будет намного слабее по сравнению с затуханием обычных осцилляций Шубникова. Например, в (BEDT-TTF)2IBr2 экспе-

римент показывает, что повышение температуры от 0.56 до 1.4 К практически полностью подавляет быстрые осцилляции Шубникова, в то время как амплитуда медленных осцилляций практически не меняется [11]. Наблюдение медленных осцилляций позволяет оценить величину интеграла перескока, т. е. величину гофрировки поверхности Ферми [11]. Аналогично, в бислойных структурах медленные осцилляции позволяют определить величину межслоевого перескока электронов и помочь объяснению наблюдаемого гармонического состава магнитных квантовых осцилляций, например, как в купратах [48] или трителлуридах редкоземельных металлов [31]. С другой стороны, зависимость от температуры и магнитного поля позволяет получить информацию об основных процессах рассеяния электронов [11, 12]. Более строгие вычисления медленных осцилляций методами диаграммной техники были проведены как для межслоевой [40], так и для внутрислоевой [49] проводимости.

В настоящей работе мы исследуем медленные осцилляции межслоевой проводимости в многослойной системе из тонких пленок топологических изоляторов. Из-за линейности спектра носителей в такой системе возникают новые особенности квантовых и медленных осцилляций. В частности, по аналогии с графеном, частоты осцилляций де Гааза – ван Альфена и Шубникова – де Гааза зависят от химического потенциала квадратично, а не линейно, как в случае систем с параболическим спектром носителей. По этой же причине фактор температурного затухания осцилляций  $R_T^k$  содержит химический потенциал. Это связано с неэквидистантностью уровней Ландау: чем выше химический потенциал, тем меньше расстояние между уровнями Ландау при этом химическом потенциале. Похожая зависимость наблюдалась также в органических металлах с квазидвумерным дираковским спектром [13, 14]. Но как мы покажем ниже, частоты биений, а также медленных осцилляций не зависят от химического потенциала, и в этом смысле характер этих явлений схож с аналогичным в обычных недираковских системах.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 мы приводим всю необходимую информацию о гамильтониане и уровнях Ландау для многослойного топологического изолятора. В разд. 3 приведены расчеты термодинамических величин для плотности состояний, термодинамического потенциала и намагниченности. В разд. 4 мы приводим расчеты межслоевой проводимости в тау-приближении. В этом же разделе мы исследуем медленные осцилля-

ции проводимости и указываем на новизну результатов по сравнению со другими случаями многослойных металлов. В разд. 5 мы приводим расчет межслоевой проводимости с учетом межзонных переходов. При этом все подробности расчетов всех упомянутых величин даются в Приложениях. В Заключение мы приводим основные результаты работы и обсуждаем некоторые возможности экспериментальной проверки предсказанных эффектов.

## 2. ГАМИЛЬТониАН И УРОВНИ ЛАНДАУ

Для исследования указанных выше эффектов в многослойном топологическом изоляторе (МТИ) мы воспользуемся моделью, предложенной в работе [58] (см. рис. 1). Было показано, что такая система при наличии магнитных примесей может рассматриваться как простейшая реализация трехмерного вейлевского полуметалла. Однако в настоящей работе нас не интересует режим вейлевского полуметалла. Мы не включаем в модель магнитные примеси.



Рис. 1. Схематическое изображение многослойной структуры. Незакрашенные участки обозначают слои топологических изоляторов (π), а закрашенные — обычные зонные изоляторы

Гамильтониан гетероструктуры из топологических изоляторов и пленок из обычных диэлектриков может быть записан в виде

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}_\perp, i, j} c_{\mathbf{k}_\perp, i}^\dagger \left[ v_F \tau^z (\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{k}_\perp \delta_{i, j} + \Delta_S \tau^x \delta_{i, j} + \frac{1}{2} \Delta_D \tau^+ \delta_{j, i+1} + \frac{1}{2} \Delta_D \tau^- \delta_{j, i-1} \right] c_{\mathbf{k}_\perp, j}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$  — импульс квазичастиц в двумерной зоне Бриллюэна поверхности ТИ,  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$  — матрицы Паули, действующие на псевдоспиновую степень свободы (принадлежность верхней или нижней поверхностям ТИ),  $\Delta_S$  и

$\Delta_D$  описывают туннелирование между верхней и нижней поверхностями слоев ТИ ( $\Delta_S$ ) и между верхней и нижней поверхностями диэлектрического слоя ( $\Delta_D$ ). Индексы  $i, j$  нумеруют слои топологического изолятора. Более детальную информацию о происхождении и свойствах этого гамильтониана можно найти в Приложении А. Этот гамильтониан приводит к спектру (см. Приложение А)

$$\varepsilon_k = \pm \sqrt{v_F^2 (k_x^2 + k_y^2) + \Delta^2(k_z)}, \quad (2)$$

где

$$\Delta^2(k_z) = \Delta_S^2 + \Delta_D^2 - 2\Delta_S\Delta_D \cos k_z d$$

при  $-\pi/d < k_z < \pi/d$ . Если  $|\Delta_S| = |\Delta_D|$  и  $\text{sign}(\Delta_S\Delta_D) > 0$ , то в спектре имеется точка, в которой запрещенная зона исчезает. Это точка  $k_z d = 0$ . Если  $\text{sign}(\Delta_S\Delta_D) < 0$ , то этой точкой является  $k_z d = \pi$  (точки  $k_z d = \pm\pi$  совпадают из-за периодичности зоны Бриллюэна). Если  $|\Delta_S| \neq |\Delta_D|$ , то спектр содержит запрещенную зону шириной  $||\Delta_S| - |\Delta_D||$ .

Для решения задачи квантования Ландау мы упростим гамильтониан (1). Легко показать (см. [59] и Приложение А), что низкоэнергетический гамильтониан в импульсном пространстве может быть записан в блочно-диагональной форме

$$\mathcal{H} = v_F (-\sigma_y k_x + \sigma_x k_y) + \sigma_z \Delta(k_z), \quad (3)$$

где

$$\hat{\Delta}(k_z) = \Delta_S \tau^x + \frac{1}{2} \Delta_D (\tau^+ e^{ik_z d} + \text{H.c.}).$$

В магнитном поле необходимо перейти к ковариантному оператору импульса

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}.$$

Здесь мы воспользуемся калибровкой Ландау  $\mathbf{A} = (-Hy, 0, 0)$ . Тогда собственные значения гамильтониана (3) легко вычисляются:

$$\varepsilon_n = \alpha \sqrt{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 n + \Delta^2(k_z)}, \quad n \neq 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon_0 = \pm \Delta(k_z), \quad n = 0,$$

где  $\alpha = \pm 1$  — зонный индекс,  $l_H^{-2} = eH/\hbar c$ . Отметим, что кратность вырождения ненулевых уровней Ландау в два раза больше, чем у нулевого.

### 3. КВАНТОВЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ НАМАГНИЧЕННОСТИ

В этом разделе мы рассмотрим квантовые осцилляции плотности состояний и намагниченности

для МТИ. Это так называемые осцилляции де Гааза–ван Альфена. Медленные осцилляции возникают для проводимости и представляют собой модуляцию осцилляций Шубникова–де Гааза, вызванную межслоевым взаимодействием. Следуя предыдущему разделу, все подробности вычислений мы также представили в Приложении В. Учитывая спектр МТИ, полученный в разд. 2, запишем плотность состояний в виде

$$\rho(\varepsilon) = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{\pi l_H^2} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} dk_z \sum_{\alpha=\pm} \{ \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta(\varepsilon - \varepsilon_n) \}, \quad (5)$$

где мы учли, что кратность вырождения ненулевых уровней Ландау в два раза больше, чем нулевого. Проводя суммирование с использованием стандартных приемов (см. Приложение В), получим

$$\rho(\varepsilon) = \rho_0(\varepsilon) + \rho_{osc}(\varepsilon), \quad (6)$$

где

$$\rho_0(\varepsilon) = 2N N_{LL} \frac{|\varepsilon| \Theta(\varepsilon^2 - \Delta^2)}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}, \quad (7)$$

$$\rho_{osc}(\varepsilon) = \frac{L}{d} \frac{4|\varepsilon|}{\pi^2 l_H^2} \times \times \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[ 2\pi i k \frac{\varepsilon^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2}{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right] \mathcal{J}(k, \varepsilon), \quad (8)$$

$$\mathcal{J}(k, \varepsilon) = \int_0^{\pi} dk_z \exp \left[ 2\pi i k \frac{\Delta_S \Delta_D \cos k_z d}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right] \times \times \Theta(\varepsilon^2 - \Delta^2(k_z)). \quad (9)$$

Рассмотрим теперь большой термодинамический потенциал, который в общем виде дается выражением

$$\Omega = -T \int_0^{\infty} \rho(\varepsilon) \ln(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon}{T}}) d\varepsilon. \quad (10)$$

Сразу отметим, что мы рассматриваем только положительные энергии. При низких температурах вклад от валентной зоны пренебрежимо мал. Учет отрицательных энергий не приводит к каким-либо заметным изменениям полученных ниже результатов. Нас будет интересовать только осциллирующая часть термодинамического потенциала, которая вычислена в Приложении В:

$$\Omega_{osc} \approx 2NN_{LL}T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(2\pi k \frac{\Delta_S \Delta_D}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} (\mu^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2)\right)}{k \operatorname{sh}\left(2\pi^2 \frac{kT\mu}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right)}. \quad (11)$$

Отсюда для намагниченности  $M = -\partial\Omega_{osc}/\partial B$  получаем выражение

$$M = -2N \frac{eT}{\pi \hbar c} \sum_k \frac{\left[ J_0(ky_H) \left( \frac{1}{k} \cos(kx_H(\mu)) + x_H(\mu) \sin(kx_H(\mu)) \right) + y_H J_1(ky_H) \cos(kx_H(\mu)) \right]}{\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi^2 kT\mu}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right)}, \quad (12)$$

где мы пренебрегаем членом, пропорциональным  $T/v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2$ , и

$$y_H = 2\pi \frac{\Delta_S \Delta_D}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}, \quad x_H(\varepsilon) = \pi \frac{\varepsilon^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}.$$

В случае слабых магнитных полей  $x_H(\mu) \gg y_H \gg 1$  (мы полагаем, что  $\mu^2 > \Delta_S^2 + \Delta_D^2$ ). При  $\mu$ , отличном от  $\sqrt{\Delta_S^2 + \Delta_D^2}$ , пренебрегаем первым и третьим членом:

$$M = -\frac{Ne(\mu^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2)}{\pi^2 \hbar c} \times \sum_k \sqrt{\frac{2}{\pi y_H}} \cos(ky_H - \frac{\pi}{4}) \sin(kx_H(\mu)) R_T^k, \quad (13)$$

где

$$R_T^k = \frac{2\pi^2 \mu}{\hbar^2 l_H^{-2} v_F^2} \frac{T}{\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi^2 kT\mu}{\hbar^2 l_H^{-2} v_F^2}\right)}.$$

В отличие от двумерной системы, наличие межслойного перескока приводит к дополнительной модуляции квантовых осцилляций намагниченности. Кроме того, линейность спектра носителей заряда приводит к тому, что период осцилляций определяется квадратом химического потенциала:  $x_H(\mu) \sim \mu^2$ . По этой же причине фактор температурного затухания осцилляций  $R_T^k$  содержит химический потенциал. Это связано с неэквидистантностью уровней Ландау: чем выше химический потенциал, тем меньше расстояние между уровнями Ландау при этом химическом потенциале. Соответственно, рост химического потенциала приводит к уменьшению амплитуды осцилляций при неизменной и отличной от нуля температуре.

#### 4. МЕЖСЛОЙНЫЙ ТРАНСПОРТ

Теперь исследуем межслойный транспорт. Мы рассмотрим межслойную проводимость в рамках

простейшей тау-модели. Проводимость в этой модели дается формулой

$$\sigma_{zz} = e^2 \int_0^{\infty} d\varepsilon (-n'_F(\varepsilon)) I(\varepsilon) \tau(\varepsilon), \quad (14)$$

с временами релаксации

$$\tau(\varepsilon)^{-1} = \frac{\pi n_{imp} u_0^2}{\hbar} \rho(\varepsilon), \quad (15)$$

где  $n_{imp}$  — концентрация примесей,  $u_0$  — амплитуда примесного потенциала, а кинетический коэффициент  $I(\varepsilon)$  определяется как

$$I(\varepsilon) = \sum_{\alpha=\pm 1} \sum_{n, k_z} |v_z|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_{n, k_z}). \quad (16)$$

Подробный расчет этой функции приведен в Приложении С. Мы здесь воспользуемся готовым выражением

$$I(\varepsilon) = NN_{LL} \frac{d^2}{2\pi \hbar^2} \frac{\Delta_S \Delta_D}{\varepsilon} \left[ \frac{\pi \Delta_S \Delta_D}{2\hbar^2 l_H^{-2} v_F^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left(2\pi k \frac{\varepsilon^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2}{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right) \times J_1\left(2\pi k \frac{\Delta_S \Delta_D}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right) \right]. \quad (17)$$

Из-за квантования Ландау величины  $I(\varepsilon)$  и  $\tau(\varepsilon)$  дают отдельные вклады в проводимость. В этом одна из причин, что осцилляции кинетических коэффициентов (эффект Шубникова–де Гааза) отличаются от квантовых осцилляций термодинамических величин (эффект де Гааза–ван Альфена). В частности, в слоистых системах это приводит к новому эффекту — необычной модуляции проводимости, которая получила название медленных осцилляций в пионерской работе [11]

При низких температурах вклад в проводимость вносят энергии вблизи химического потенциала. Учитывая, что  $\mu \gg \Delta_S + \Delta_D$ , мы можем опустить тета-функцию в (9). Тогда (детали расчета плотности состояний приведены в Приложении В)

$$\begin{aligned} \text{Im}(k, \varepsilon) &= \int_0^\pi dk_z \exp \left[ 2\pi i k \frac{\Delta_S \Delta_D \cos k_z d}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right] = \\ &= \pi J_0 \left( 2\pi k \frac{\Delta_S \Delta_D}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Используя выражения (23) и (48) для терма  $k = 1$ , мы получим

$$I(\varepsilon)\tau(\varepsilon) = \frac{\Delta_S^2 \Delta_D^2 d^2}{4n_{imp} u_0^2 \hbar \varepsilon^2} \times$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{e^2 \Delta_S^2 \Delta_D^2 d^2}{4n_{imp} u_0^2 \hbar \mu^2} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}{\Delta_S \Delta_D}} \sqrt{1 + a^2} \cos(x_H(\mu)) \cos\left(y_H + \phi - \frac{\pi}{4}\right) R_T + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \frac{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}{\Delta_S \Delta_D} \left( 1 + \sqrt{1 + a^2} \cos\left(2\left(y_H + \frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$R_T = \frac{2\pi^2 \mu}{\hbar^2 l_H^{-2} v_F^2} \frac{T}{\text{sh}\left(\frac{2\pi^2 \mu T}{\hbar^2 l_H^{-2} v_F^2}\right)}.$$

Как следует из полученного выражения, осцилляции межслойной проводимости смещены по фазе на значение  $\phi$  от осцилляций намагниченности (см. рис. 2). Это смещение является функцией межслойных параметров перескока. При отсутствии межслойного взаимодействия это смещение обращается в нуль. Кроме того, в проводимости имеется осцилляционный член, не содержащий температуры.

В этой работе мы преимущественно используем тау-приближение теории электронного транспорта. Конечно, необходимо отметить, что строгий расчет квантовых осцилляций межслойной проводимости должен быть проведен в рамках диаграммной техники (частично мы это сделаем в следующем разделе). Это особенно важно при больших амплитудах осцилляций. В частности, проведенный одним из соавторов статьи расчет межслоевого магнитосопротивления и его медленных осцилляций с помощью тау-приближения и диаграммной техники (соответственно, формула (4) из статьи [9] и формулы (19), (21) из статьи [10]) показал, что имеется некоторое небольшое различие в амплитуде медленных осцилляций, вычисленной этими двумя методами. Это

$$\begin{aligned} &\times \left[ 1 - \frac{2\sqrt{1+a^2}}{\pi} \sqrt{\frac{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}{\Delta_S \Delta_D}} \cos x_H \cos\left(y_H + \phi - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \frac{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}{\Delta_S \Delta_D} \left( 1 + \sqrt{1+a^2} \cos\left(2\left(y_H + \frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где

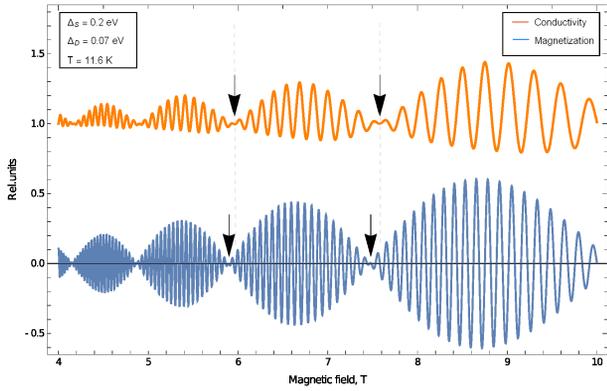
$$a = \tan \phi = \frac{\hbar^2 l_H^{-2} v_F^2}{\pi \Delta_S \Delta_D}.$$

Здесь мы оставили только члены до второго порядка включительно по функциям Бесселя. Поскольку наиболее значимой является область энергии вблизи уровня Ферми, при интегрировании по энергии полагаем  $\varepsilon^2 \approx \mu^2 + 2\mu(\varepsilon - \mu)$  в аргументе для косинуса, а в знаменателе заменяем  $\varepsilon^2 \approx \mu^2$ . Для проводимости получаем

различие возникает от членов вида  $G^R G^R + G^A G^A$  в петле восприимчивости, которые исчезают, если пренебречь осциллирующей зависимостью собственной энергии электронов от энергии или от магнитного поля. Тем не менее остальные характеристики, такие как частота, остаются без изменений, и даже полевая зависимость амплитуды почти не меняется. Различие результатов этих двух методов расчета мало, потому что в этих работах, как и в нашей статье, осцилляции все-таки предполагаются слабыми и по их амплитуде идет разложение, т.е. медленные осцилляции вычисляются в низшем неисчезающем порядке теории возмущений по малой амплитуде квантовых осцилляций. Безусловно, для строгого количественного их описания нужен расчет методами диаграммной техники, но для качественного описания основных свойств медленных осцилляций достаточно и используемого в статье тау-приближения, конечно, с учётом того, что частота рассеяния  $1/\tau$  в борновском приближении пропорциональна осциллирующей плотности состояний.

## 5. УЧЕТ МЕЖЗОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

Рассмотрим теперь межслойную проводимость при учете межзонных переходов. В общем случае недиагонального матричного элемента операто-



**Рис. 2.** Осцилляции межслойной проводимости (вверху) и намагниченности (внизу) при изменении величины магнитного поля в многослойном топологическом изоляторе со спектром, описываемым уравнениями (1) и (2)

ра скорости для межслойной проводимости имеем следующее выражение:

$$\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \Sigma_z(\varepsilon). \quad (21)$$

Здесь

$$\Sigma_z(\varepsilon) = \frac{2\pi\hbar e^2}{3V} \sum_{k_1 k_2} V_{k_1 k_2}^z V_{k_2 k_1}^z A_{k_1}(\varepsilon) A_{k_2}(\varepsilon), \quad (22)$$

где  $V_{k_1 k_2}^z = \langle k_1 | \hat{V}_z | k_2 \rangle$  – матричный элемент оператора скорости вдоль оси  $Z$  (поперек слоям)

$$\hat{V}_z = \frac{\Delta_D d}{\hbar} \sigma^z \otimes [\tau^x \sin(k_z d) + \tau^y \cos(k_z d)], \quad (23)$$

$A_k(\varepsilon)$  – спектральная функция, а через  $k$  обозначены квантовые числа: волновые векторы, номер уровня Ландау, индексы зон и подзон.

Вывод этой формулы приведен в Приложении D. Собственные векторы гамильтониана, которые входят в матричные элементы, получены в работе [59]

$$|ns\alpha\rangle = |u_\alpha\rangle \otimes |v_n^{s\alpha}\rangle, \quad (24)$$

$$|u_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1, \alpha \frac{\Delta_S + \Delta_D e^{-ik_z d}}{\Delta(k_z)} \right)^T, \quad (25)$$

$$|v_n^{s\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1 + \frac{\alpha\Delta(k_z)}{\epsilon_{ns\alpha}}}, i s \sqrt{1 - \frac{\alpha\Delta(k_z)}{\epsilon_{ns\alpha}}} \right)^T, \quad (26)$$

где  $s = \pm 1$  – индекс, различающий электронные и дырочные состояния, а  $\alpha = \pm 1$  – индекс, различающий две ветви спектра с различными киральностями. Для дираковского полуметалла, с которым мы

здесь имеем дело, эти ветви совпадают, давая лишь двукратное вырождение энергии. При наличии магнитных примесей происходит зеемановское расщепление уровней и эти ветви смещаются друг относительно друга, пересекаясь в двух точках Вейля, характеризующихся противоположными киральностями. В нашем случае спектр не зависит от индекса  $\alpha$ , а в плотность состояний он войдет как коэффициент 2, учитывающий дополнительное вырождение. По этой причине вместо двух собственных состояний  $|ns\pm\rangle$  необходимо рассмотреть их линейную комбинацию  $\beta_1 |ns+\rangle + \beta_2 |ns-\rangle$ . Мы же несколько упростим ситуацию, взяв собственные состояния с одним значением этого индекса, например, с  $\alpha = 1$ . Такой выбор никак не скажется на наших результатах, пока система не содержит магнитных примесей. В этом случае

$$\sigma_z = \frac{2\pi\hbar e^2}{3V} \sum_{n, k_z, \alpha, \beta} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \times \langle \alpha | \hat{V}_z^n | \beta \rangle \langle \beta | \hat{V}_z^n | \alpha \rangle A_{n\alpha}(k_z, \varepsilon) A_{n\beta}(k_z, \varepsilon), \quad (27)$$

где  $\langle \pm | \hat{V}_z^n | \pm \rangle = \langle n\pm | \hat{V}_z | n\pm \rangle$ . Вычислим матричные элементы

$$\langle u | \tau^x | u \rangle = \frac{\Delta_S + \Delta_D \cos(k_z d)}{\Delta(k_z)}, \quad (28)$$

$$\langle u | \tau^y | u \rangle = -\frac{\Delta_D \sin(k_z d)}{\Delta(k_z)}, \quad (29)$$

$$\langle v_n^+ | \sigma^z | v_n^- \rangle = \langle v_n^- | \sigma^z | v_n^+ \rangle = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2(k_z)}{\epsilon_n^2}} = \mathcal{W}, \quad (30)$$

$$\langle v_n^+ | \sigma^z | v_n^+ \rangle = \frac{\Delta(k_z)}{\epsilon_n} = \mathcal{V} = -\langle v_n^- | \sigma^z | v_n^- \rangle. \quad (31)$$

Тогда

$$\sigma = \frac{2\pi\hbar e^2}{3V} \sum_{n, k_z} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \times [\mathcal{V}^2 (A_{n+}^2(k_z, \varepsilon) + A_{n-}^2(k_z, \varepsilon)) + 2\mathcal{W}^2 A_{n+}(k_z, \varepsilon) A_{n-}(k_z, \varepsilon)]. \quad (32)$$

В тау-приближении, когда число примесей мало, имеем

$$A_{n\pm}^2(k_z, \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{2\pi\hbar} \delta(\varepsilon \mp \epsilon_{nk_z}) \tau(\varepsilon). \quad (33)$$

В этом приближении первое слагаемое полученного выражения есть не что иное, как вычисленная

нами в предыдущем разделе межслойная проводимость, в которой учтены только внутризонные переходы (в зоне проводимости и в валентной зоне). Второе слагаемое представляет собой поправку из-за межзонных переходов:

$$\delta\sigma_z = \frac{4\pi\hbar e^2}{3V} \sum_{n, k_z} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \times \\ \times W_{n, k_z}^2 A_{n+}(k_z, \varepsilon) A_{n-}(k_z, \varepsilon). \quad (34)$$

Понятно, что при наличии зеемановского расщепления уровней возникнут дополнительные межзонные переходы и поправка к проводимости будет иметь более сложный вид.

Исследуем полученную поправку к межслойной проводимости. При низкой концентрации примесей ( $n_i \rightarrow 0$ ) межзонный вклад отличен от нуля только для нулевого уровня Ландау и только если  $|\Delta_S| = |\Delta_D| = \Delta$ , т.е. когда в спектре имеется точка Дирака. Действительно, в этом случае  $A_{n\pm}(k_z, \varepsilon) \rightarrow \delta(\varepsilon \mp \epsilon_{nk_z})$ , а нулевой уровень Ландау  $\varepsilon_0 = \pm\Delta(k_z) \approx \pm\Delta dk_z$  содержит точку Дирака при  $k_z = 0$ , которая и дает ненулевой вклад в интеграл. В этой точке Дирака

$$W_{0, k_z=0}^2 = \frac{d^2\Delta^2}{2\hbar^2}.$$

Тогда

$$\delta\sigma = \frac{e^3}{\hbar^3} \frac{d\Delta H}{\mu\pi c} \frac{\beta\mu}{4\text{ch}^2 \frac{\beta\mu}{2}}. \quad (35)$$

Как видно из этого выражения, при нулевой температуре межзонный вклад исчезает. При низких температурах ( $\beta\mu \gg 1$ ) этот вклад экспоненциально мал. Однако при выводе этого выражения мы не использовали приближение низких температур. При  $\beta\mu > 1$  имеем  $\delta\sigma \sim \beta\mu e^{-\beta\mu}$ , а при  $\beta\mu < 1$  экспоненциальный фактор исчезает  $\delta\sigma \sim \beta\mu$ . Эффект исчезновения межслойного вклада при отсутствии точек Дирака связан с тем, что мы выбрали спектральные функции в виде дельта-функций, что справедливо в пределе  $n_i \rightarrow 0$  (на самом деле имеется в виду предел большого значения времени рассеяния, что часто означает малое число примесей). Физически это означает, что усредненное рассеяние электронов на примесях слабое и соответствующим уширением уровней Ландау можно пренебречь. Наличие точки Дирака дает бесщелевой нулевой уровень Ландау, через который и возникает межзонный вклад в проводимость. В общем случае исходный дельта-пик спектральной функции уширяется и, строго говоря,

межзонный вклад будут давать и ненулевые уровни Ландау. Однако основной вклад по-прежнему будет давать нулевой уровень.

Еще раз отметим, что межзонный вклад  $\delta\sigma_z$  исчезает, если в спектре нет точек Дирака. Таким образом, наличие такого вклада в межслоевой проводимости может быть предложено как метод идентификации точек Дирака в спектре. Исследование межзонного вклада в бесщелевом случае заслуживает отдельного внимания. Особенно это важно, если многослойный ТИ содержит магнитные примеси, которые за счет нарушения Т-симметрии расщепляют дираковский спектр на два вейлевских. В этом случае многослойный ТИ становится вейлевским полуметаллом с устойчивыми точками Вейля и соответствующими бесщелевыми нулевыми уровнями Ландау.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в данной работе эффекты могут быть экспериментально исследованы, например, в гетероструктуре, состоящей из тонких пленок  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$ , разделенных тонкими слоями обычных диэлектриков. В работах [60–62] была продемонстрирована возможность выращивать ультратонкие высококачественные пленки  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$ . В качестве других материалов, гетероструктуры из которых могут выступать кандидатами для надежной проверки исследованных эффектов, можно назвать  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  и  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ , топологические свойства которых хорошо известны [63–67].

Как одно из интересных направлений обобщения полученных здесь результатов можно отметить исследование межслойного транспорта в многослойных структурах, состоящих из тонких пленок топологических изоляторов и сверхпроводников. Например, можно предложить структуру на основе  $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{NbSe}_2$  [68], в которой возникают так называемые майорановские моды, что, по-видимому, существенно скажется на квантовых осцилляциях межслойного транспорта.

В заключении отметим, что представляет большой интерес исследовать влияние магнитных примесей на медленные осцилляции в МТИ, т.е. рассмотреть режим вейлевского полуметалла с нарушенной Т-симметрией (см., например, [58, 69–71]). Предварительные расчеты показывают, что возникает новая характерная частота модуляции основной моды квантовых осцилляций. Эта частота связана со сдвигом конусов Дирака из-за нарушения Т-

симметрии и определяется расстоянием между точками Вейля. Кроме того, при наличии магнитных примесей более существенными будут поправки к проводимости от межзонных и межподзонных переходов. Эти эффекты — предмет отдельного рассмотрения.

**Финансирование.** Работа одного из соавторов (А.З.З.) выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 22-72-00110), другого (П.Д.Г.) — при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 21-52-12043 и 21-52-12027) и в рамках программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (грант НИТУ «МИСиС» № К2-2022-025).

### Приложение А. Гамильтониан и спектр

Гамильтониан гетероструктуры из топологических изоляторов и пленок из обычных диэлектриков может быть записан в виде (см. [58])

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}_\perp, i, j} c_{\mathbf{k}_\perp i}^\dagger \left[ v_F \tau^z (\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{k}_\perp \delta_{i, j} + \Delta_S \tau^x \delta_{i, j} + \frac{1}{2} \Delta_D \tau^+ \delta_{j, i+1} + \frac{1}{2} \Delta_D \tau^- \delta_{j, i-1} \right] c_{\mathbf{k}_\perp j}. \quad (36)$$

Здесь  $\hat{z}$  — единичный вектор в направлении  $Z$ . Тогда

$$[\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{k}_\perp = -\sigma_y k_x + \sigma_x k_y,$$

что есть гамильтониан киральных дираковских электронов на одной из поверхностей топологического изолятора. Запись  $[\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{k}_\perp$  соответствует киральности, которую можно легко понять с помощью правила левой руки: положите левую руку на поверхность стола ладонью вниз. Тогда четыре вытянутых пальца покажут направление импульса, а отогнутый на 90 град большой палец покажет направление спина. Такая ориентация соответствует одной киральности. Состояние с противоположной киральностью можно представить аналогично, только вместо левой руки следует взять правую. Две поверхности ТИ учитываются матрицей Паули  $\tau^z$ , которая содержит два значения киральности. Индексы  $i, j$  нумеруют слои топологического изолятора. Член с  $\Delta_S$  соответствует перескокам между верхней и нижней поверхностями одного и того же слоя. Гамильтониан записан в базисе состояний  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ , которые обозначают принадлежность к верхней и нижней поверхностям данного слоя топологического изолятора. В этом

базисе смешивание поверхностей (перескоки между ними) дается матрицей Паули  $\tau^x$ :

$$\tau^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дельта-функция  $\delta_{i, j}$  в этом слагаемом обозначает, что эти перескоки происходят внутри одного слоя. Оставшиеся члены описывают перескоки между соседними слоями ТИ через обычный диэлектрик. Слагаемое с  $\tau^+$  обозначает перескоки с нижней поверхности данного слоя на верхнюю поверхность нижнего соседнего слоя: дельта символ  $\delta_{j, i+1}$  отличен от нуля для переходов  $j \rightarrow i = j - 1$ . Это видно из явного вида матрицы

$$\frac{1}{2} \tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая переводит состояние  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$  (соответствующее нижней поверхности) в  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$  (соответствующее верхней поверхности), но не наоборот. А слагаемое с  $\tau^-$  обозначает перескоки с верхней поверхности данного слоя на нижнюю поверхность верхнего соседнего слоя: дельта символ  $\delta_{j, i-1}$  отличен от нуля для переходов  $j \rightarrow i = j + 1$ . Матрица

$$\frac{1}{2} \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит состояние  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$  в  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ , но не наоборот.

Найдем спектр, соответствующий такому гамильтониану. Для этого представим все дельта-символы через фурье-образы

$$\mathcal{H} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_\perp, i, j, k_z} e^{ik_z(r_i - r_j)} c_{\mathbf{k}_\perp i}^\dagger \left[ v_F \tau^z (\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{k}_\perp + \Delta_S \tau^x + \frac{1}{2} \Delta_D \tau^+ e^{ik_z d} + \frac{1}{2} \Delta_D \tau^- e^{-ik_z d} \right] c_{\mathbf{k}_\perp j}, \quad (37)$$

где мы воспользовались представлением

$$\delta_{i, j} = \frac{1}{N} \sum_{k_z} e^{ik_z(r_i - r_j)}.$$

Здесь  $r_{i \pm 1} = r_i \pm d$ , а  $N$  — число слоев. Соответственно, в импульсном пространстве имеем

$$\mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} v_F (\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{k}_\perp & \Delta_S + \Delta_D e^{ik_z d} \\ \Delta_S + \Delta_D e^{-ik_z d} & -v_F (\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{k}_\perp \end{pmatrix}.$$

Спектр такого гамильтониана легко найти:

$$\varepsilon_k = \pm \sqrt{v_F^2 (k_x^2 + k_y^2) + \Delta^2(k_z)}, \quad (38)$$

где

$$\Delta^2(k_z) = \Delta_S^2 + \Delta_D^2 - 2\Delta_S\Delta_D \cos k_z d.$$

Гамильтониан обладает  $SO(3)$  симметрией:

$$e^{i\tau \cdot \phi} \mathcal{H}_k e^{-i\tau \cdot \phi} = \mathcal{H}_k.$$

Поэтому его можно представить в блочно-диагональной форме  $\mathcal{H}_k = \tau^z \tilde{\mathcal{H}}_k$ , где

$$\tilde{\mathcal{H}}_k = v_F (\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{k}_\perp + \sigma_z \Delta(k_z).$$

Это означает, что достаточно работать с одним из блоков такой формы.

### Приложение В.

#### Плотность состояний, термодинамический потенциал и намагниченность

Для плотности состояний имеем формулу (5). Воспользуемся формулой Пуассона

$$\begin{aligned} f(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \\ &= 2 \int_0^{\infty} f(x) dx + 4 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x) e^{2\pi i k x} dx. \end{aligned} \quad (39)$$

Рассмотрим осциллирующую и неосциллирующую части по отдельности. Для неосциллирующей части имеем

$$\rho_0(\varepsilon) = \frac{L}{\pi} N_{LL} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} dk_z \sum_{\alpha=\pm} \int_0^{\infty} \delta(\varepsilon - \varepsilon_x) dx, \quad (40)$$

где  $N_{LL} = 1/\pi l_H^2$  — степень вырождения уровней Ландау. Проводя суммирование по зонному индексу, получаем

$$\begin{aligned} \rho_0(\varepsilon) &= \frac{2LN_{LL}}{\pi} |\varepsilon| \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} dk_z \times \\ &\times \int_0^{\infty} \delta(\varepsilon^2 - 2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 x - \Delta^2(k_z)) dx. \end{aligned} \quad (41)$$

Проводя сначала интегрирование по  $k_z$ , получим

$$\begin{aligned} \rho_0(\varepsilon) &= 2NN_{LL} \frac{|\varepsilon| \Theta(\varepsilon^2 - \Delta^2)}{\pi \Delta_S \Delta_D} \times \\ &\times \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{(2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 x + \Delta_S^2 + \Delta_D^2 - \varepsilon^2)^2}{(2\Delta_S \Delta_D)^2}}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x_{min} &= \frac{\varepsilon^2 - (\Delta_S + \Delta_D)^2}{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}, \\ x_{max} &= \frac{\varepsilon^2 - (\Delta_S - \Delta_D)^2}{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}, \end{aligned}$$

$\Delta = |\Delta_S - \Delta_D|$ , и  $N = L/d$  — число слоев. Плотность состояний содержит сингулярные точки, которые соответствуют минимуму и максимуму косинусоидального профиля уровней Ландау. Например, для нулевого уровня это точки  $\varepsilon_{\pm}^2 = (\Delta_S \pm \Delta_D)^2$ . Это есть не что иное, как сингулярности ван Хофа. Действительно, вблизи своих экстремумов спектр становится плоским, что приводит к сингулярности плотности состояний из-за вырожденности уровней Ландау. Чтобы проинтегрировать по  $x$ , перейдем к новой переменной:

$$\begin{aligned} \frac{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 x + \Delta_S^2 + \Delta_D^2 - \varepsilon^2}{2\Delta_S \Delta_D} &= \cos y, \\ dx &= \frac{-\Delta_S \Delta_D \sin y dy}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}. \end{aligned}$$

После элементарного интегрирования получаем формулу (7).

Рассмотрим теперь осциллирующую часть

$$\begin{aligned} \rho_{osc}(\varepsilon) &= 2NN_{LL} \frac{|\varepsilon|}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} dk_z \times \\ &\times \int_0^{\infty} \delta(\varepsilon^2 - 2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 x - \Delta^2(k_z)) e^{2\pi i k x} dx. \end{aligned} \quad (42)$$

Проинтегрируем сначала по  $x$ :

$$\begin{aligned} \rho_{osc}(\varepsilon) &= 2NN_{LL} \frac{|\varepsilon|}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} dk_z \times \\ &\times \exp \left[ 2\pi i k \frac{\varepsilon^2 - \Delta^2(k_z)}{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right] \Theta(\varepsilon^2 - \Delta^2(k_z)). \end{aligned} \quad (43)$$

Интегрирование по  $k_z$  окончательно дает выражение (8).

Получим теперь выражение для осциллирующей части термодинамического потенциала. Подставляя в формулу (10) выражение для плотности состояний, получим

$$\Omega_{osc} = -2NN_{LL} \frac{T}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \varepsilon d\varepsilon \times$$

$$\times \exp \left[ \pi i k \frac{\varepsilon^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right] \mathcal{J}(k, \varepsilon) \ln \left( 1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon}{T}} \right). \quad (44)$$

Введем промежуточные обозначения

$$\alpha = \frac{\pi k}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}, \quad \beta = \pi k \frac{\Delta_S^2 + \Delta_D^2}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}.$$

При интегрировании по энергиям возникает интеграл

$$I = \int_0^\infty \varepsilon \exp [i(\alpha \varepsilon^2 - \beta)] \times \Theta(\varepsilon^2 - \Delta^2(k_z)) \ln \left( 1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon}{T}} \right) d\varepsilon. \quad (45)$$

Представим интеграл в виде

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Delta(k_z)}^\infty \exp [i(\alpha \varepsilon^2 - \beta)] \ln \left( 1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon}{T}} \right) d\varepsilon^2 \quad (46)$$

и проинтегрируем сначала по частям:

$$I = -\frac{e^{-i\beta}}{2i\alpha} \left[ \frac{\mu - \Delta(k_z)}{T} e^{i\alpha \Delta^2(k_z)} - \frac{1}{T} \int_{\Delta(k_z)}^\infty \frac{e^{i\alpha \varepsilon^2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} + 1} \right] = \\ = -\frac{e^{-i\beta}}{2i\alpha} \left[ \frac{\mu - \Delta(k_z)}{T} e^{i\alpha \Delta^2(k_z)} - \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\alpha(yT + \mu)^2} dy}{e^y + 1} \right], \quad (47)$$

где мы заменили нижний интеграл на  $-\infty$ , поскольку используется приближение  $\frac{\mu - \Delta}{T} \gg 1$ .

Прежде всего, разберемся с первым слагаемым. Проводя интегрирование по  $k_z$  в термодинамическом потенциале, находим

$$e^{-i\beta} \int_0^\pi dk_z \exp \left[ 2\pi i k \frac{\Delta_S \Delta_D \cos k_z d}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right] e^{i\alpha \Delta^2(k_z)} \times \\ \times (\mu - \Delta(k_z)) = e^{-i\beta} \int_0^\pi dk_z (\mu - \Delta(k_z)) e^{i\beta} = \\ = \int_0^\pi dk_z (\mu - \Delta(k_z)).$$

Этот интеграл действителен. Следовательно, вклад от первого слагаемого (47) в термодинамический потенциал равен нулю.

Далее, рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(i\alpha(yT + \mu)^2) dy}{e^y + 1} = \\ = -2\pi i \sum_{n=0}^\infty e^{-2\pi(2n+1)\alpha T \mu} \times \\ \times \exp \left( i\alpha \left( \mu^2 + (2n+1)^2 \pi^2 T^2 \right) \right), \quad (48)$$

где мы воспользовались методом вычетов. Отсюда

$$I = -\frac{\pi}{\alpha} \sum_{n=0}^\infty e^{-2\pi(2n+1)\alpha T \mu} \times \\ \times \exp \left( i\alpha \left( \mu^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2 + (2n+1)^2 \pi^2 T^2 \right) \right).$$

Подставляя это выражение в термодинамический потенциал, интегрируя по  $k_z$  и учитывая, что

$$\int_0^\pi dk_z \exp \left[ 2\pi i k \frac{\Delta_S \Delta_D \cos k_z d}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right] = J_0 \left( 2\pi k \frac{\Delta_S \Delta_D}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right),$$

окончательно получим

$$\Omega_{osc} = 4NN_{LL}T \sum_{k=1}^\infty \frac{J_0 \left( 2\pi k \frac{\Delta_S \Delta_D}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right)}{k} \times \\ \times \sum_{n=0}^\infty \exp \left( -2\pi^2 \frac{(2n+1)kT\mu}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \right) \times \\ \times \cos \left( \frac{\pi k}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2} \left( \mu^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2 + (2n+1)^2 \pi^2 T^2 \right) \right). \quad (49)$$

В силу быстрой сходимости ряда по  $n$  мы пренебрегаем зависимостью осциллирующей части от  $n$ . Тогда ряд легко суммируется, и мы получаем выражение (19).

## Приложение С. Межслойный транспорт

Исследуем поведение функции  $I(\varepsilon)$ . Для скорости  $v_z$  из спектра получим

$$v_z = \frac{\partial \varepsilon_{n,k_z}}{\hbar \partial k_z} = -\frac{d\Delta_S \Delta_D}{\hbar} \frac{\sin k_z d}{\sqrt{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 n + \Delta^2(k_z)}}. \quad (50)$$

Используя (2), получим

$$v_z = \frac{\partial \varepsilon_{n,k_z}}{\hbar \partial k_z} = \\ = -\frac{d}{2\hbar} \frac{\sqrt{4\Delta_S^2 \Delta_D^2 - (\varepsilon^2 - 2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 n - \Delta_S^2 - \Delta_D^2)^2}}{\varepsilon}. \quad (51)$$

Используя формулу Пуассона и суммируя по  $\alpha$ , получим

$$I_0(\epsilon) = NN_{LL} \frac{L}{2\pi d} \frac{d^2}{4\hbar^2} \int_{-\pi}^{\pi} dz \int_0^{\infty} dx \times \\ \times \frac{4\Delta_S^2 \Delta_D^2 - (\epsilon^2 - 2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 x - \Delta_S^2 - \Delta_D^2)^2}{\epsilon} \times \\ \times 2\delta(\epsilon^2 - 2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 x - \Delta^2(k_z)). \quad (52)$$

Интегрируя по  $z$ , находим

$$I_0(\epsilon) = NN_{LL} \frac{d^2 \Delta_S \Delta_D}{2\pi \hbar^2} \times \\ \times \int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \sqrt{1 - \frac{(2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 x + \Delta_S^2 + \Delta_D^2 - \epsilon^2)^2}{4\Delta_S^2 \Delta_D^2}}. \quad (53)$$

Переходя к новой переменной

$$\frac{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 x + \Delta_S^2 + \Delta_D^2 - \epsilon^2}{2\Delta_S \Delta_D} = \cos y, \quad (54)$$

получаем

$$I_0(\epsilon) = NN_{LL} \frac{d^2 \Delta_S \Delta_D}{4v_F^2 l_H^{-2} \hbar^4 \epsilon}. \quad (55)$$

Рассмотрим теперь осциллирующую часть

$$I_{osc}(\epsilon) = NN_{LL} \frac{d^2 \Delta_S \Delta_D}{\pi \hbar^2 \epsilon} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \times$$

$$\times e^{2\pi i k x} \sqrt{1 - \frac{(2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 x + \Delta_S^2 + \Delta_D^2 - \epsilon^2)^2}{4\Delta_S^2 \Delta_D^2}}. \quad (56)$$

Переходя к новой переменной

$$\frac{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2 x + \Delta_S^2 + \Delta_D^2 - \epsilon^2}{2\Delta_S \Delta_D} = \cos y, \quad (57)$$

получаем

$$I_{osc}(\epsilon) = \\ = NN_{LL} \frac{d^2 \Delta_S \Delta_D}{\pi \epsilon v_F^2 l_H^{-2} \hbar^4} \times \\ \times \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(2\pi i k \left(\frac{\epsilon^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2}{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right)\right) \times \\ \times \int_0^{\pi} \exp\left(2\pi i k \left(\frac{\Delta_S \Delta_D \cos y}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right)\right) \sin^2 y dy. \quad (58)$$

Используя формулу

$$\int_0^{\pi} \exp\left(2\pi i k \left(\frac{\Delta_S \Delta_D \cos y}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right)\right) \sin^2 y dy = \\ = \pi \left[ J_0(a) + \frac{d^2 J_0(a)}{da^2} \right] = \frac{\pi}{a} J_1(a), \quad (59)$$

$$a = 2\pi k \frac{\Delta_S \Delta_D}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2},$$

получаем

$$I_{osc}(\epsilon) = NN_{LL} \frac{d^2}{2\pi \hbar^2} \frac{\Delta_S \Delta_D}{\epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left(2\pi k \frac{\epsilon^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2}{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right) J_1\left(2\pi k \frac{\Delta_S \Delta_D}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right). \quad (60)$$

Итак,

$$I(\epsilon) = NN_{LL} \frac{d^2}{2\pi \hbar^2} \frac{\Delta_S \Delta_D}{\epsilon} \left[ \frac{\pi \Delta_S \Delta_D}{2\hbar^2 l_H^{-2} v_F^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left(2\pi k \frac{\epsilon^2 - \Delta_S^2 - \Delta_D^2}{2v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right) J_1\left(2\pi k \frac{\Delta_S \Delta_D}{v_F^2 l_H^{-2} \hbar^2}\right) \right]. \quad (61)$$

### Приложение D.

#### Межслойная проводимость с недиагональным матричным элементом оператора скорости

Получим выражение для статической проводимости с помощью формулы Кубо

$$\sigma = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} P^R(\omega) \right). \quad (62)$$

Здесь

$$P^R(\omega) = P(q=0, \omega_n)|_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0} \quad (63)$$

— фурье-компонента запаздывающей двухвременной функции Грина, которая в представлении мнимых времен записывается в виде

$$P(q=0, \omega_n) = -\frac{1}{V} \int_0^{\beta} d\tau e^{i\hbar\omega_n \tau} \langle T_{\tau} [J(\tau), J(0)] \rangle, \quad (64)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают гиббсовское усреднение и усреднение по примесям.

Выражая оператор тока свободных частиц через оператора вторичного квантования, получим

$$P^R(\omega_n) = \frac{e^2}{V} \sum_{k_1 k_2 k'_1 k'_2 \sigma_1 \sigma_2} V_{k_1 k_2} V_{k'_1 k'_2} \times K_\omega^R(k_1 \sigma_1, k_2 \sigma_1; k'_1 \sigma_2, k'_2 \sigma_2), \quad (65)$$

Здесь  $K_{\omega_n}(k_1 \sigma_1, k_2 \sigma_1; k_2 \sigma_2, k_1 \sigma_2)$  — фурье-образ двухчастичной функции Грина

$$K_\tau(1, 2; 1', 2') = -\langle T_\tau [\bar{a}_1(\tau) a_2(\tau) \bar{a}_{1'}(0) a_{2'}(0)] \rangle, \quad (66)$$

где  $1 = k_1, \sigma_1$ . В первом приближении величину  $P^R(\omega_n)$  можно представить с помощью диаграммы, приведенной на рис. 3. Тогда получаем

$$P^R(\omega_n) = \frac{2e^2}{V} \sum_{k_1 k_2} V_{k_1 k_2} V_{k_2 k_1} \times \int_0^\beta d\tau e^{i\hbar\omega_n \tau} G(k_1, -\tau) G(k_2, \tau), \quad (67)$$

где мы учли равенство

$$G_{12}(\tau) = \delta_{12} G(k_1, \tau),$$

справедливое при усреднении по примесям. Функция  $G(k_1, \tau)$  получена при разложении по всем несвязанным диаграммам по примесному потенциалу.

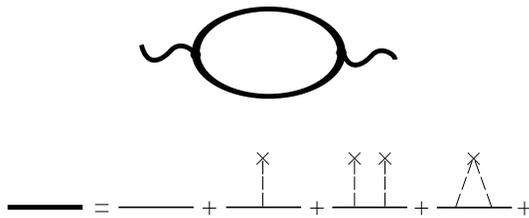


Рис. 3. Диаграммное представление величины  $P^R(\omega_n)$

Стандартное разложение функций Грина в ряд Фурье дает

$$P^R(\omega_n) = \frac{2e^2}{V} \sum_{k_1 k_2} V_{k_1 k_2} V_{k_2 k_1} \times \frac{1}{\beta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k_1, \zeta_s) G(k_2, \zeta_s - \hbar\omega_n), \quad (68)$$

что позволяет рассчитать сумму

$$\frac{1}{\beta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k, \zeta_s) G(k, \zeta_s - \hbar\omega_n).$$

Для этого вычислим

$$S_{12}(\omega_n) = \frac{1}{\beta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_1(\zeta_s) G_2(\zeta_s - \hbar\omega_n), \quad (69)$$

где индексы соответствуют импульсам. Рассмотрим интеграл в комплексной плоскости

$$I_{12}(\omega_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) G_1(z) G_2(z - i\hbar\omega_n), \quad (70)$$

где контур  $C$  охватывает все полюса функции распределения  $f(z)$ , т.е. точки  $z_s = i\zeta_s$ , а функции  $G_{1,2}(z)$  это аналитические продолжения функций Грина с дискретных точек  $z_s = i\zeta_s$  на всю комплексную плоскость. Тогда по теореме о вычетах имеем

$$I_{12}(\omega_n) = -S_{12}(\omega_n). \quad (71)$$

С другой стороны, мы можем изменить контур, учитывая особенности функций Грина  $G_1, G_2$ . Изучим эти особенности.

Функцию Грина  $G(z)$  можно представить через спектральную плотность в виде

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{\rho_k(\varepsilon)}{z - \varepsilon}. \quad (72)$$

Этот интеграл представляет собой интеграл Коши, причем контур проходит по действительной оси. Следовательно, действительная ось является особенностью, на которой функция Грина не является аналитической. Причем по обе стороны от этой оси аналитическими являются функции  $G^R(z)$  — в верхней полуплоскости и  $G^A(z)$  — в нижней полуплоскости. Аналогично, для функции  $G_2(z - i\hbar\omega_n)$  такой особенностью является прямая  $\text{Im}z - \hbar\omega_n = 0$ . Эти особенности должны быть исключены из комплексной плоскости разрезами, путем изменения соответствующим образом контура интегрирования.

Поскольку  $G(z) \sim z^{-1}$  при  $z \rightarrow \infty$ , соответствующие вклады от участков окружности исчезают и интеграл определяется только берегами разрезов. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty+i\hbar\omega_n}^{-\infty+i\hbar\omega_n} d\varepsilon' f(\varepsilon') G_1^R(\varepsilon') G_2^A(\varepsilon' - i\hbar\omega_n) + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\hbar\omega_n}^{\infty+i\hbar\omega_n} d\varepsilon' f(\varepsilon') G_1^R(\varepsilon') G_2^R(\varepsilon' - i\hbar\omega_n) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{-\infty} d\varepsilon f(\varepsilon + i\hbar\omega_n) G_1^R(\varepsilon + i\hbar\omega_n) G_2^A(\varepsilon) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon + i\hbar\omega_n) G_1^R(\varepsilon + i\hbar\omega_n) G_2^R(\varepsilon). \quad (73)$$

Учитывая, что  $f(\varepsilon + i\hbar\omega_n) = f(\varepsilon)$ , получаем

$$\begin{aligned} S_{12}(\omega_n) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) [G_1^R(\varepsilon) - G_1^A(\varepsilon)] G_2^A(\varepsilon - i\hbar\omega_n) - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) G_1^R(\varepsilon + i\hbar\omega_n) [G_2^R(\varepsilon) - G_2^A(\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (74)$$

Аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость дает

$$\begin{aligned} S_{12}(\omega) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) [G_{k_1}^R(\varepsilon) - G_{k_1}^A(\varepsilon)] G_{k_2}^A(\varepsilon - \hbar\omega) - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) G_{k_1}^R(\varepsilon + \hbar\omega) [G_{k_2}^R(\varepsilon) - G_{k_2}^A(\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (75)$$

Учитывая выражение для спектральной плотности

$$-2\pi i A_1(\varepsilon) = G_1^R(\varepsilon) - G_1^A(\varepsilon) \quad (76)$$

и опуская индексы, подставим эту функцию в аналитическое продолжение  $P_{(1)}^R(\omega)$ :

$$\begin{aligned} P^R(\omega) &= \frac{2e^2}{3V} \sum_{k_1 k_2} V_{k_1 k_2} V_{k_2 k_1} S_{12}(\omega) = \frac{2e^2}{3V} \sum_{k_1 k_2} \times \\ &\times \left[ V_{k_1 k_2} V_{k_2 k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) A_{k_1}(\varepsilon) G_{k_2}^A(\varepsilon - \hbar\omega) + \right. \\ &\left. + V_{k_1 k_2} V_{k_2 k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) A_{k_2}(\varepsilon) G_{k_1}^R(\varepsilon + \hbar\omega) \right]. \end{aligned} \quad (77)$$

Меня обозначения  $k_1 \rightleftharpoons k_2$  во втором слагаемом в этом выражении, находим

$$\begin{aligned} P^R(\omega) &= \frac{2e^2}{V} \sum_{k_1 k_2} V_{k_1 k_2} V_{k_2 k_1} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) A_{k_1}(\varepsilon) [G_{k_2}^A(\varepsilon - \hbar\omega) + G_{k_2}^R(\varepsilon + \hbar\omega)]. \end{aligned} \quad (78)$$

Для мнимой части получаем

$$\begin{aligned} \text{Im} P^R(\omega) &= \left[ \frac{2e^2}{V} \sum_{k_1 k_2} V_{k_1 k_2} V_{k_2 k_1} \right]^{-1} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) A_{k_1}(\varepsilon) \text{Im} [G_{k_2}^R(\varepsilon + \hbar\omega) + G_{k_2}^A(\varepsilon - \hbar\omega)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) A_{k_1}(\varepsilon) [A_{k_2}(\varepsilon + \hbar\omega) - A_{k_2}(\varepsilon - \hbar\omega)] = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) A_{k_1}(\varepsilon) A_{k_2}(\varepsilon + \hbar\omega) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon + \hbar\omega) A_{k_1}(\varepsilon + \hbar\omega) A_{k_2}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (79)$$

Переобозначая во втором слагаемом  $k_1 \rightleftharpoons k_2$ , получим

$$\begin{aligned} \text{Im} P^R(\omega) &= -\frac{2\pi e^2}{V} \sum_{k_1 k_2} V_{k_1 k_2} V_{k_2 k_1} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon [f(\varepsilon) - f(\varepsilon + \hbar\omega)] A_{k_1}(\varepsilon) A_{k_2}(\varepsilon + \hbar\omega). \end{aligned} \quad (80)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\pi\hbar e^2}{V} \sum_{k_1 k_2} V_{k_1 k_2} V_{k_2 k_1} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) A_{k_1}(\varepsilon) A_{k_2}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (81)$$

Для межслойной проводимости, соответственно, получаем

$$\sigma_{zz} = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \Sigma_{zz}(\varepsilon), \quad (82)$$

где

$$\Sigma_{zz}(\varepsilon) = \frac{2\pi\hbar e^2}{V} \sum_{k_1 k_2} V_{k_1 k_2}^z V_{k_2 k_1}^z A_{k_1}(\varepsilon) A_{k_2}(\varepsilon). \quad (83)$$

В случае диагональных матричных элементов скоростей получаем выражение

$$\Sigma_{zz}(\varepsilon) = \frac{2\pi\hbar e^2}{V} \sum_k |V_k^z|^2 A_k^2(\varepsilon). \quad (84)$$

В случае малого числа примесей  $n_i$  можно показать, что

$$\lim_{n_i \rightarrow 0} A_k^2(\varepsilon) \approx \frac{\delta(\varepsilon - \varepsilon_k)}{2\pi} \tau(\varepsilon),$$

и мы приходим к формуле (14).

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Карцовник, П. А. Кононович, В. Н. Лаухин, И. Ф. Щеголев, Письма в ЖЭТФ **48**, 498 (1988) [Sov. Phys. JETP Lett. **48**, 541 (1988)].
2. М. В. Карцовник, П. А. Кононович, В. Н. Лаухин, С. И. Песоцкий, И. Ф. Щеголев, ЖЭТФ **97**, 1 305 (1990) [JETP **70**, 735 (1990)].
3. M. V. Kartsovnik et al., J. Phys. I France **2**, 89 (1992)
4. J. Wosnitza et al., Synth. Metals **85**, 1479 (1997).
5. E. Ohmichi et al., Phys. Rev. B **57**, 7481 (1998).
6. P. D. Grigoriev, M. V. Kartsovnik, W. Biberacher, N. D. Kushch, and P. Wyder, Phys. Rev. B **65**, 060403(R) (2002).
7. J. Wosnitza, *Fermi Surfaces of Low-Dimensional Organic Metals and Superconductors*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1996).
8. T. Ishiguro, K. Yamaji and G. Saito, *Organic Superconductors*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin (1998).
9. *The Physics of Organic Superconductors and Conductors*, ed. by A. G. Lebed, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2008).
10. M. V. Kartsovnik, Chem. Rev. **104**, 5737 (2004).
11. M. V. Kartsovnik, P. D. Grigoriev, W. Biberacher, N. D. Kushch, and P. Wyder, Phys. Rev. Lett. **89**, 126802 (2002).
12. P. D. Grigoriev, M. V. Kartsovnik, and W. Biberacher, Phys. Rev. B **86**, 165125 (2012).
13. N. Tajima, T. Yamauchi, T. Yamaguchi, M. Suda, Y. Kawasugi, H. M. Yamamoto, R. Kato, Y. Nishio and K. Kajita, Phys. Rev. B **88**, 075315 (2013).
14. E. Tisserond et al., Europhys. Lett. **119**, 67001 (2017).
15. N. Doiron-Leyraud, C. Proust, D. LeBoeuf, J. Levallois, J.-B. Bonnemaïson, R. Liang, D. A. Bonn, W. N. Hardy, and L. Taillefer, Nature **447**, 565 (2007).
16. S. E. Sebastian, N. Harrison, E. Palm, T. P. Murphy, C. H. Mielke, R. Liang, D. A. Bonn, W. N. Hardy, and G. G. Lonzarich, Nature (London) **454**, 200 (2008)
17. S. E. Sebastian and C. Proust, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **6**, 411 (2015).
18. S. E. Sebastian, N. Harrison, and G. G. Lonzarich, Rep. Prog. Phys. **75**, 102501 (2012).
19. B. Vignolle, D. Vignolles, M.-H. Julien, and C. Proust, C. R. Phys. **14**, 39 (2013).
20. S. E. Sebastian, N. Harrison, P. A. Goddard, M. M. Altarawneh, C. H. Mielke, R. Liang, D. A. Bonn, W. N. Hardy, O. K. Andersen, and G. G. Lonzarich, Phys. Rev. B **81**, 214524 (2010).
21. E. A. Yelland, J. Singleton, C. H. Mielke, N. Harrison, F. F. Balakirev, B. Dabrowski, and J. R. Cooper, Phys. Rev. Lett. **100**, 047003 (2008).
22. B. S. Tan, N. Harrison, Z. Zhu, F. Balakirev, B. J. Ramshaw, A. Srivastava, S. A. Sabok-Sayr, B. Dabrowski, G. G. Lonzarich, and S. E. Sebastian, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **112**, 9568 (2015).
23. T. Helm, M. V. Kartsovnik, M. Bartkowiak, N. Bittner, M. Lambacher, A. Erb, J. Wosnitza, and R. Gross, Phys. Rev. Lett. **103**, 157002 (2009).
24. T. Helm, M. V. Kartsovnik, C. Proust, B. Vignolle, C. Putzke, E. Kampert, I. Sheikin, E.-S. Choi, J. S. Brooks, N. Bittner, W. Biberacher, A. Erb, J. Wosnitza, and R. Gross, Phys. Rev. B **92**, 094501 (2015).
25. T. Terashima, N. Kurita, M. Tomita, K. Kihou, C.-H. Lee, Y. Tomioka, T. Ito, A. Iyo, H. Eisaki, T. Liang, M. Nakajima, S. Ishida, S.-I. Uchida, H. Harima, and S. Uji, Phys. Rev. Lett. **107**, 176402 (2011).
26. A. I. Coldea, D. Braithwaite, and A. Carrington, C. R. Phys. **14**, 94 (2013).
27. T. Terashima, N. Kikugawa, A. Kiswandhi, E.-S. Choi, J. S. Brooks, S. Kasahara, T. Watashige, H. Ikeda, T. Shibauchi, Y. Matsuda, T. Wolf, A. E. Böhmer, F. Hardy, C. Meingast, H. v. Löhneysen, M.-T. Suzuki, R. Arita, and S. Uji, Phys. Rev. B **90**, 144517 (2014).
28. *Superlattices and Other Heterostructures*, by E. L. Ivchenko and G. E. Pikus, Springer Berlin, Heidelberg (1997); <https://doi.org/10.1007/978-3-642-60650-2>.
29. K. Enomoto, S. Uji, T. Yamaguchi, T. Terashima, T. Konoike, M. Nishimura, T. Enoki, M. Suzuki, and I. S. Suzuki, Phys. Rev. B **73**, 045115 (2006).

30. Lei et al., *Sci. Adv.* **6**, 6407 (2020).
31. P. D. Grigoriev, A. A. Sinchenko, P. Lejay, A. Hadj-Azzem, J. Balay, O. Leynaud, V. N. Zverev, and P. Monceau, *Eur. Phys. J. B* **89**, 151 (2016).
32. В. М. Гвозди́ков, ФТТ **26**, 2574 (1984) [*Sov. Phys. Solid State* **26**(9), 1560 (1984)].
33. T. Maniv and I. D. Vagner, *Phys. Rev. B* **38**, 6301 (1988).
34. P. Grigoriev, I. Vagner, Письма в ЖЭТФ, **69**, 139 (1999) [*JETP Lett* **69**, 156 (1999)].
35. P. Moses and R. H. McKenzie, *Phys. Rev. B* **60**, 7998 (1999).
36. T. Champel and V. P. Mineev, *Philos. Mag. B* **81**, 55 (2001).
37. P. D. Grigoriev, ЖЭТФ **119**, 1257 (2001) [*JETP* **92**, 1090 (2001)].
38. T. Champel, *Phys. Rev. B* **64**, 054407 (2001).
39. T. Champel and V. P. Mineev, *Phys. Rev. B* **66**, 195111 (2002).
40. P. D. Grigoriev, *Phys. Rev. B* **67**, 144401 (2003).
41. V. M. Gvozdkov, Yu. V. Pershin, E. Steep, A. G. M. Jansen, and P. Wyder, *Phys. Rev. B* **65**, 165102 (2002).
42. C. Bergemann, S. R. Julian, A. P. Mackenzie, S. Nishizaki, and Y. Maeno, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2662 (2000).
43. P. D. Grigoriev, *Phys. Rev. B* **81**, 205122 (2010).
44. P. D. Grigoriev, *Phys. Rev. B* **83**, 245129 (2011).
45. P. D. Grigoriev, *Phys. Rev. B* **88**, 054415 (2013).
46. P. D. Grigoriev and T. I. Mogilyuk, *Phys. Rev. B* **90**, 115138 (2014).
47. P. D. Grigoriev and T. I. Mogilyuk, *Phys. Rev. B* **95**, 195130 (2017).
48. P. D. Grigoriev and T. Ziman, *Phys. Rev. B* **96**, 165110 (2017).
49. T. I. Mogilyuk and P. D. Grigoriev, *Phys. Rev. B* **98**, 045118 (2018).
50. A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals*, North Holland, Amsterdam (1988).
51. J. M. Ziman, *Principles of the Theory of Solids*, Cambridge University, Cambridge, England, (1972).
52. D. Shoenberg, *Magnetic Oscillations in Metals*, Cambridge University, Cambridge, England, (1984).
53. Bodo Huckestein *Rev. Mod. Phys.* **67**, 357 (1995).
54. S. A. J. Wieggers, M. Specht, L. P. Levy, M. Y. Simmons, D. A. Ritchie, A. Cavanna, B. Etienne, G. Martinez, and P. Wyder, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3238 (1997).
55. А. А. Быков, Письма в ЖЭТФ **88**, 70 (2008).
56. А. А. Быков, Д. В. Номоконов, А. В. Горан и др. Письма в ЖЭТФ **114**, 486 (2021).
57. G. M. Minkov, O. E. Rut, A. A. Sherstobitov, S. A. Dvoretzki, N. N. Mikhailov, V. A. Solov'ev, M. Yu. Chernov, S. V. Ivanov, and A. V. Germanenko *Phys. Rev. B* **101**, 245303 (2020).
58. A. A. Burkov and Leon Balents, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 127205 (2011)
59. A. A. Zyuzin, Si Wu, and A. A. Burkov, *Phys. Rev. B* **85**, 165110 (2012)
60. G. Zhang et al., *Appl. Phys. Lett.* **95**, 053114 (2009)
61. H. Peng et al., *Nature Mater.* **9**, 225 (2009)
62. Y. Zhang et al., *Nature Phys.* **6**, 584 (2010)
63. W. Zhang, R. Yu, H.-J. Zhang, X. Dai, and Zh. Fang, *New J. Phys.*, **12**(6), 065013 (2010).
64. Ch.-X. Liu, X.-L. Qi, H. J. Zhang, X. Dai, Zh. Fang, and Sh.-Ch. Zhang, *Phys. Rev. B* **82**(4), 045122 (2010)
65. J. Linder, T. Yokoyama, and A. Sudbø, *Phys. Rev. B* **80**, 205401 (2009).
66. C. Liu, H. Zhang, B. Yan, X. Qi, T. Frauenheim, X. Dai, Z. Fang, and S. Zhang, *Phys. Rev. B* **81**, 041307 (2010)
67. H. Lu, W. Shan, W. Yao, Q. Niu, and S. Shen, *Phys. Rev. B* **81**, 115407 (2010)
68. J.-P. Xu, M.-X. Wang, Zh. L. Liu et. al., *Phys. Rev. Lett.* **114**, 017001 (2015)
69. N. P. Armitage, E. J. Mele, and A. Vishwanath, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015001 (2018)
70. З.З. Алисултанов, ЖЭТФ **152** 986 (2017) [*Z. Z. Alisultanov, JETP* **125**, 836 (2017)].
71. Z. Z. Alisultanov, *Sci. Rep.* **8**, 13707 (2018)