

# ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ МНЕНИЯ В МУЛЬТИАГЕНТНОЙ СИСТЕМЕ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ СВЯЗЕЙ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ

*Н. Е. Савицкая*<sup>a\*</sup>, *Т. А. Федорова*<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,  
Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова  
188300, Гатчина, Ленинградская обл., Россия*

<sup>b</sup> *Санкт-Петербургский государственный морской технический университет  
190121, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 24 апреля 2021 г.,  
после переработки 1 июня 2021 г.  
Принята к публикации 7 июня 2021 г.

Предложена модель динамики мнений в мультиагентной системе, представляющая изменение мнения агента как результат двух процессов. Первый — лавинообразное распространение информации между агентами по существующим в системе связям, в ходе которого участвующие в нем агенты под влиянием информационного давления со стороны соседей могут копировать их мнение. Второй — независимое изменение мнения агентами, не участвующими в информационной лавине, но находящимися в условиях избыточного информационного давления. Вероятности участия агента в том или другом процессе определяются основными параметрами модели: активностью агентов  $a$ , которая определяет вероятность для агента установить связи со своими соседями, и вероятностью  $p$  независимого изменения мнения агентом под давлением полученной информации. Показано, что в зависимости от соотношения этих параметров в системе возможна реализация одного из трех динамических режимов (фаз). Первый из них представляет собой состояние, близкое к динамическому паритету, и характеризуется унимодальной функцией плотности вероятности для среднего по системе мнения  $m$  с максимумом  $m_0 = 0$ . Во втором режиме система большую часть времени проводит в состояниях, близких к консенсусам. Этот режим описывается бимодальной функцией плотности вероятности для среднего по системе мнения с максимумами  $m_{1,2} = \pm 1$ . Третья динамическая фаза является переходной и в ней все значения среднего по системе мнения практически равновероятны, а функция плотности вероятности этой величины близка к таковой для равномерного распределения. Также показано, что предложенная модель позволяет исследовать процесс формирования мнения в мультиагентных системах в условиях, рассмотрение которых было невозможно в ранее разработанных моделях. В качестве примера рассмотрено влияние времени существования установившихся в системе связей на реализацию различных динамических режимов в ней. Показано, что при уменьшении этого времени область значений параметров, при которых реализуется бимодальный режим, сужается, т. е. достижение консенсуса в системе затрудняется.

DOI: 10.31857/S0044451021110109

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Физика нелинейных неравновесных систем, состоящих из большого числа взаимодействующих элементов, является одним из наиболее актуальных

и перспективных направлений современной науки. Коллективная динамика в таких системах отличается широким спектром возможных режимов, реализация которых зависит от совокупности внешних и внутренних факторов, в том числе и стохастических [1]. Поскольку коллективные явления в многоэлементных системах представляют собой предмет исследований не только в физике, но также в биологии, химии, экологии и социальных науках, раз-

\* E-mail: savitska@inbox.ru

работанные и развитые физиками методы и подходы для их изучения становятся в настоящее время востребованными для исследования таких разнообразных явлений, как распространение эпидемий [2], функционирование головного мозга [3], распространение слухов [4], разделение социальных сообществ по языковым, расовым и другим признакам [5] или динамика общественного мнения [6].

В качестве основного объекта изучения при математическом моделировании динамики мнений рассматривается мультиагентная система, представляемая в виде сети, в которой каждый узел — это агент, характеризующийся переменной, обозначающей его мнение, а наличие связи между узлами обозначает возможность взаимодействия соответствующих агентов. В модели также задаются вероятности изменения мнений агентов. Они определяются тем, какие факторы, влияющие на этот процесс, учитываются в данной модели. Это могут быть влияние ближайшего окружения, давление социальной группы или внешней информации, а также различные индивидуальные характеристики агентов [7].

Несмотря на то, что современные модели динамики мнений достаточно хорошо описывают характерные особенности этого явления, процесс их совершенствования ради дальнейшего приближения к реальности до сих пор далек от завершения. Одним из перспективных направлений этой работы является создание моделей, учитывающих, что агенты могут менять свое мнение, не только ориентируясь на окружение, но и спонтанно, независимо от него. Примером является стохастическая модель выборщика (noisy voter model) [8]. Ненулевая вероятность спонтанного изменения мнения агентом приводит, в частности, к тому, что описываемая такой моделью мультиагентная система никогда не достигает стабильного состояния, а постоянно мигрирует по ансамблю метастабильных состояний. При этом в зависимости от соотношения параметров модели в ней возможно возникновение различных динамических режимов [9]. Приобретенные благодаря собственной стохастичности динамические свойства таких моделей открывают широкие возможности их применения не только для описания динамики мнений [10], но и для моделирования экономических процессов [11], таких как формирование и колебания цен или устойчивость финансовых рынков. Однако как следствие того, что моделирование динамики мнений исторически базировалось на моделях спиновых систем, в частности, на модели Изинга и ее модификациях [12], в существующих на настоящий момент моделях агент, меняющий мнение на данном шаге эво-

люции, как правило, выбирается случайно, также случайно определяется, меняет ли агент свое мнение под влиянием окружения либо спонтанно, независимо от него.

В связи с этим, важным шагом нам представляется создание моделей динамики мнений, которые описывают и допускают исследование не только самого процесса, но и причин, побуждающих агента менять свое мнение определенным образом в тот или иной момент времени. Наиболее естественной причиной при этом можно считать информационное давление, испытываемое агентом в данный момент. В этом случае вполне логично выбирать способ изменения мнения агента в зависимости от того, оказывается ли это давление окружением в системе или извне. Так, если в текущий момент агент связан со своими соседями и получает от них информацию, то он принимает мнение соседа, а при отсутствии связей с окружением — изменяет мнение независимо.

Исходя из этих соображений, в настоящей работе мы построим модель динамики мнений, которая предполагает, что агенты могут менять свое мнение в результате двух процессов. Первый связан с обменом информацией между агентами внутри системы, по существующим на данный момент связям. В ходе этого процесса агенты под действием информационного давления со стороны своих соседей могут принимать их мнение. Второй процесс состоит в независимом изменении мнения агентами, не участвующими в данный момент в процессе обмена информацией, но испытывающими информационное давление, превосходящее некоторое критическое значение.

Для создания математической модели динамики такого типа необходимо, во-первых, рассмотреть мультиагентную систему, в которой агенты в каждый момент времени имеют возможность быть либо связанными со своими соседями, либо нет, и, во-вторых, описать процесс распространения информации в такой системе и вызываемые им изменения информационного давления на агентов. В предлагаемой нами модели система агентов будет представлена как динамическая квадратная решетка, система связей в которой будет меняться согласно алгоритму, впервые предложенному в работе [13]. Ключевым моментом при построении такой решетки является введение для каждого узла понятия «активности», определяющей вероятность данному узлу установить связи со своими ближайшими соседями в единицу времени. Далее, поскольку распространение информации в мультиагентных системах чаще всего рассматривается как лавинообразный процесс [14], мы положим, что информационное давление на

агентов также меняется лавинообразно. Для описания лавин информационного давления мы воспользуемся алгоритмами модели кучи песка [15], модифицированными для случая развития лавины на сети с меняющейся структурой связей [16, 17]. В отличие от классической абелевой модели кучи песка [18], в этом случае лавины, инициируемые поступлением внешней информации в систему, распространяются только по кластерам агентов, между которыми на данный момент существуют связи. Чтобы описать происходящие процессы, помимо бинарной переменной, обозначающей мнение, в модель будут введены две новые характеристики агентов: «активность»  $a$ , которая определяет вероятность агенту установить связи со своими ближайшими соседями, и динамическая пороговая переменная, имеющая смысл величины информационного давления, испытываемого агентом.

Динамика мнений в нашей системе развивается следующим образом. В каждый момент времени часть агентов становятся «активными», т. е. устанавливают связи со своими ближайшими соседями, формируя тем самым кластеры связанных между собой агентов. Возникающие связи будут существовать в системе на протяжении заранее заданного времени. Одновременно в систему извне поступает информация, что увеличивает информационное давление на агентов. В результате в некоторый момент времени информационное давление на одного или несколько агентов может превысить заранее заданное критическое значение. Если агент, информационное давление на которого превышает пороговое значение («надкритический» агент), в данный момент неактивен, т. е. не связан со своими ближайшими соседями, то он независимо от окружения с заданной вероятностью  $p$  меняет свое мнение на противоположное. Если же «надкритический» агент активен, то он понижает испытываемое им информационное давление, передавая информацию о своем мнении ближайшим соседям, и если они также активны, то принимают его мнение. Кроме того, увеличение информационного давления на этих агентов со стороны «надкритического» соседа также может сделать их «надкритическими», что приведет к лавине перераспределений информационного давления в системе и соответственно к лавине изменений мнения активных на данный момент агентов.

Таким образом, динамика в нашей системе будет представлять собой последовательность лавин изменений информационного давления, инициируемых поступлением в систему внешней информации, которые развиваются на кластерах связанных между

собой агентов. При развитии информационных лавин происходят также соответствующие изменения мнений: активные агенты принимают мнение своих соседей, со стороны которых информационное давление на них увеличивается, а неактивные «надкритические» агенты могут менять свое мнение независимо от окружения. Как и в случае стохастической модели выборщика (noisy voter model) [8], мультиагентная система, описываемая нашей моделью, при  $p \neq 0$  и  $a \neq 1$  никогда не приходит в стабильное состояние, в котором мнения агентов больше не менялись бы со временем, а мигрирует по целому набору метастабильных состояний.

Задачей настоящей работы является аналитическое и численное исследование динамических свойств мультиагентной системы, описываемой предлагаемой нами моделью. Мы планируем показать, что введение в модель новых параметров позволит расширить возможности изучения динамики мнений, раскрывая механизмы возникновения тех или иных режимов функционирования, в том числе и в условиях, рассмотрение которых было невозможно в ранее разработанных моделях.

Основным результатом работы будет построение фазовой диаграммы динамических режимов исследуемой системы в пространстве ее основных параметров: активности агентов  $a$ , которая определяет вероятность участия агента в информационной лавине, и вероятности  $p$  независимого изменения мнения агентом под давлением полученной информации. Мы покажем, что в зависимости от соотношения этих параметров в системе возможна реализация одного из трех динамических режимов (фаз). Первый из них представляет собой состояние, близкое к динамическому паритету. В этой фазе мнения агентов могут меняться, но среднее число агентов с положительным и отрицательным значениями мнений в каждый момент времени примерно одинаково. Эта фаза описывается унимодальной функцией плотности вероятности для среднего по системе мнения  $m$  с максимумом  $m_0 = 0$ . Находясь во втором режиме, система большую часть времени проводит в состояниях, близких к консенсусам, в которых значения мнений всех агентов либо положительны, либо отрицательны. Этот режим описывается бимодальной функцией плотности вероятности для среднего по системе мнения с максимумами  $m_{1,2} = \pm 1$ . Третья динамическая фаза является переходной и в ней все значения среднего по системе мнения практически равновероятны, а функция плотности вероятности этой величины близка к таковой для равномерного распределения.

Мы также изучим поведение нашей системы при различных временах существования установившихся между агентами связей, сравнив два предельных случая. В первом из них система связей между агентами будет меняться только между очередными информационными лавинами, а в течение лавины будет оставаться неизменной, а во втором — будет меняться во время прохождения лавины. В результате мы покажем, что область значений параметров системы, при которых реализуется бимодальный режим, во втором случае несколько сужается, поскольку формирование консенсуса в этой ситуации усложняется тем, что в течение лавины один и тот же агент может и принять мнение соседа, и изменить его независимо.

Работа имеет следующую структуру. Раздел 2 посвящен построению и анализу модели динамики мнений в мультиагентной системе с меняющейся структурой связей. Здесь мы представим алгоритмы, описывающие процесс, а также из решения уравнения Фоккера – Планка для плотности вероятности среднего по системе мнения получим аналитическую оценку значений параметров системы, соответствующих каждому из возможных режимов ее функционирования. В разд. 3 приведем результаты численного моделирования поведения системы в различных режимах, а также при различных временах существования связей. Там же мы сравним результаты аналитического и компьютерного изучения системы и определим границы применимости используемого аналитического подхода. В Заключении будут сформулированы основные выводы работы, представлены перспективы ее развития и описаны возможности применения результатов.

## 2. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МНЕНИЙ В МУЛЬТИАГЕНТНОЙ СИСТЕМЕ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ СВЯЗЕЙ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ

Рассматриваемая нами мультиагентная система будет представлена узлами квадратной решетки размером  $L = N \times N$  на плоскости  $(x, y)$ , координаты которых будем обозначать  $(i, j)$ . Каждому агенту (узлу) в системе приписываются две динамические переменные: бинарная переменная  $s_{i,j} = \pm 1$ , обозначающая мнение данного агента, и пороговая переменная  $z_{i,j}$ , соответствующая величине информационного давления, которое испытывает агент. Также каждый агент имеет активность  $a_{i,j}$ , величина которой определяет вероятность агенту установить связи со своими ближайшими соседями в данный

момент времени. В настоящей работе мы рассмотрим наиболее простой случай, когда активности всех агентов одинаковы,  $a_{i,j} = a$ . Будем предполагать, что до начала эволюции системы значения  $s_{i,j}$  на узлах распределены таким образом, что усредненное по системе мнение агентов равняется нулю, а величины  $z_{i,j}$  распределены равномерно в интервале  $[0, z_c]$ , где  $z_c = 4.5$  — пороговое значение для переменной  $z_{i,j}$ . Для каждой реализации процесса мы будем задавать величину  $p$ , определяющую вероятность агенту изменить свое мнение независимо от окружения, и время  $t_l$ , на протяжении которого будут существовать установившиеся в решетке связи. Варианты выбора  $t_l$  обсудим ниже.

Как было сказано выше, динамика мнений в нашей системе представляет собой последовательность лавинообразных изменений информационного давления, которые, в свою очередь, вызывают изменения мнений агентов. Используя алгоритмы из работы [17], развитие каждой информационной лавины и соответствующие изменения мнений агентов можно представить в виде следующей последовательности повторяющихся шагов.

1. Поступление внешней информации в систему.

В начале каждой лавины исследуемая мультиагентная система представляет собой набор узлов, связи между которыми пока не установлены. В этот момент случайно выбирается один из агентов, к которому поступает внешняя информация, и информационное давление  $z_{i_1, j_1}$  на нем увеличивается на единицу. Мы будем нумеровать акты поступления информации и следующие за этим информационные лавины индексом  $n$ .

2. Формирование кластеров связанных агентов.

Все множество агентов разделяется на два подмножества: активных и неактивных агентов. Вероятность агенту стать активным в данный момент времени  $k$  определяется величиной  $a$ . Каждый активный в данный момент времени агент устанавливает связи с четырьмя своими ближайшими соседями одновременно, независимо от того, активны они или нет. Возникает подрешетка  $G_l$ , представляющая собой набор связанных кластеров, в которых имеются активные и неактивные узлы (агенты). Индекс  $l$  нумерует возникающие подрешетки на протяжении всего времени эволюции системы.

3. Независимое изменение мнений неактивными агентами.

Неактивные в данный момент времени агенты, которые являются «надкритическими» ( $z_{i_0, j_0}(k) > z_c$ ), с заданной вероятностью  $p$  меняют свое мнение на противоположное.

4. Изменение мнений активными агентами в результате «осыпания» их активных «надкритических» соседей.

Рассматриваются значения  $z_{i,j}(k)$  на всех активных узлах существующей в данный момент подрешетки  $G_l$ . Если хоть один из узлов является «надкритическим» ( $z_{i_0,j_0}(k) > z_c$ ), то происходит процесс его «осыпания» (“toppling”) и величина информационного давления  $z_{i_0,j_0}$  на данном узле уменьшается на  $\Delta z = 4$ . При этом мы считаем, что «осыпающийся» агент передает информацию о своем мнении ближайшим соседям, увеличивая тем самым величину информационного давления на них на единицу.

Активные на данный момент времени ближайшие соседи «осыпавшегося» агента меняют свое мнение на мнение этого агента.

На неактивных узлах подрешетки  $G_l$  информационное давление может только увеличиваться, но сами они не «осыпаются» и агенты не меняют мнения при «осыпании» соседей.

Мы считаем нашу систему открытой, поэтому в случае, если «осыпается» узел на границе решетки, имеющий меньше четырех ближайших соседей, то одна или две единицы  $z_{i,j}$  уходят из системы.

Если в подрешетке  $G_l$  в данный момент времени  $k$  обнаруживается сразу несколько активных «надкритических» узлов, то они «осыпаются» одновременно.

Процессы «осыпания» всех «надкритических» на данный момент агентов и соответствующие изменения мнений активными и неактивными агентами (пункты 3, 4) происходят за одну единицу времени  $\Delta k = 1$  и называются волной лавины.

5. В зависимости от заданного времени существования установившихся связей в решетке  $t_l$  действия повторяются следующим образом.

5а. Установившиеся в системе связи существуют на протяжении всего времени развития лавины ( $t_l = T_{av}(n)$ ). В этом случае мы повторяем действие из пункта 4 до тех пор, пока все активные узлы сформированной подрешетки  $G_l$  не станут «подкритическими». На этом информационная лавина заканчивается и мы переходим к пункту 6.

Заметим, что в этом случае времена существования всех подрешеток  $t_l$  различны, как и длительности лавин  $T_{av}(n)$ , а индекс  $l$ , нумерующий шаги эволюции решетки, совпадает с индексом  $n$ , нумерующим лавины,  $l = n$ . При таких условиях подмножества активных и неактивных агентов в течение лавины не изменяются и, следуя пункту 3, неак-

тивные в данной лавине агенты могут менять свое мнение только один раз.

5б. Система связей в решетке меняется после каждой волны лавины ( $t_l = 1$ ). В этом случае действия из пункта 4 проводятся один раз, после чего все связи в решетке аннулируются и повторяются действия из пунктов 2–5б. Лавина считается завершенной, если все узлы вновь возникшей согласно пункту 2 подрешетки являются «подкритическими».

В этом случае подмножества активных и неактивных узлов меняются после каждой волны лавины и каждый раз после их изменения ставшие неактивными узлы меняют свое мнение согласно пункту 3.

6. По окончании лавины все связи в существующей подрешетке аннулируются и процесс повторяется, согласно пунктам 1–6.

В рамках нашей модели мы считаем, что процессы аннулирования существующих связей и установления новых происходят за времена значительно меньшие, чем  $\Delta k = 1$ , т. е. практически мгновенно. Тогда мы можем представить описанные выше алгоритмы изменения переменной  $z_{i,j}(k)$  в виде следующих конечно-разностных уравнений:

$$z_{i,j}(k+1) = z_{i,j}(k) - 4\delta_{i,j}(k)\theta[z_{i,j}(k) - z_c] + \delta_{i+1,j}(k)\theta[z_{i+1,j}(k) - z_c] + \delta_{i-1,j}(k)\theta[z_{i-1,j}(k) - z_c] + \delta_{i,j-1}(k)\theta[z_{i,j-1}(k) - z_c] + \delta_{i,j+1}(k)\theta[z_{i,j+1}(k) - z_c] + \xi_{i,j}(k). \quad (1)$$

Граничные условия для агентов на левой границе решетки записываются как

$$z_{1,j}(k+1) = z_{1,j}(k) - 4\delta_{1,j}(k)\theta[z_{1,j}(k) - z_c] + \delta_{2,j}(k)\theta[z_{2,j}(k) - z_c] + \delta_{1,j-1}(k)\theta[z_{1,j-1}(k) - z_c] + \delta_{1,j+1}(k)\theta[z_{1,j+1}(k) - z_c] + \xi_{1,j}(k). \quad (2)$$

Для агентов на других границах и угловых агентов граничные условия получаются из (1) аналогичным образом.

Здесь функция  $\theta[x] = 1$  при  $x > 0$  и  $\theta[x] = 0$  при  $x \leq 0$ . Функция  $\xi_{i,j}(k)$  описывает поступление внешней информации в систему,  $\xi_{i,j}(k) = 1$  в момент начала очередной лавины  $k_{beg}^n$  и  $\xi_{i,j}(k) = 0$  в остальные моменты времени. Функция  $\delta_{i,j}(k)$  учитывает эволюцию решетки и зависит от того, активен ли узел  $(i, j)$  в данный момент времени или нет:  $\delta_{i,j}(k) = 1$ , если узел активен, и  $\delta_{i,j}(k) = 0$ , если узел неактивен в момент времени  $k$ . Так, если изменения решетки происходят только между лавинами, то на

протяжении лавины  $\delta_{i,j}(k) = \delta_{i,j}(k_{beg}^n)$ . Классическая модель кучи песка [18] получается из данных уравнений при  $\delta_{i,j}(k) = 1$  для всех узлов  $(i, j)$  во все моменты времени  $k$ .

Происходящие одновременно с лавиной перераспределений информационного давления (1) измене-

ния мнений агентов  $s_{i,j}$  можно описать следующим образом.

Если система связей в решетке не меняется в течение лавины, т. е. при  $t_l = T_{av}(n)$ , имеем

$$s_{i,j}(k+1) = \begin{cases} -s_{i,j}(k_{beg}^n) & \text{для } k = k_{beg}^n \text{ с вероятностью } p, \text{ при } (\delta_{i,j}(k_{beg}^n) = 0) \text{ и } (\theta[z_{i,j}(k_{beg}^n) - z_c] = 1), \\ s_{nn(i,j)}(k) & \text{при } (\delta_{i,j}(k_{beg}^n) = 1) \text{ и } (\delta_{nn(i,j)}(k_{beg}^n) = 1; \theta[z_{nn(i,j)}(k) - z_c] = 1), \\ s_{i,j}(k) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

Здесь индекс  $nn(i, j)$  обозначает координаты ближайших соседей агента с координатами  $(i, j)$ .

Если система связей в решетке меняется после каждой волны лавины (при  $t_l = 1$ ), то

$$s_{i,j}(k+1) = \begin{cases} -s_{i,j}(k) & \text{с вероятностью } p, \text{ если } (\delta_{i,j}(k) = 0) \text{ и } (\theta[z_{i,j}(k) - z_c] = 1), \\ s_{nn(i,j)}(k), & \text{если } (\delta_{i,j}(k) = 1) \text{ и } (\delta_{nn(i,j)}(k) = 1; \theta[z_{nn(i,j)}(k) - z_c] = 1), \\ s_{i,j}(k) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

Различия между алгоритмами (3) и (4) отражают тот факт, что при  $t_l = T_{av}(n)$  подмножества активных и неактивных агентов не изменяются в течение лавины и неактивные агенты имеют возможность изменить свое мнение лишь один раз за лавину. В случае же  $t_l = 1$  эти подмножества меняются после каждой волны лавины и также в начале каждой волны неактивные агенты могут поменять свое мнение. Также из (3) и (4) видно, что при  $p = 0$  или  $a = 1$  система утрачивает собственную стохастичность и в процессе развития лавин агенты могут только копировать мнение своих ближайших соседей. В этом случае наша модель становится подобной классической «модели выборщика» (voter model) (см., например, [7]) и, как следствие, в результате динамики система конечного размера всегда приходит в стабильное состояние.

ных агентов в соответствующие моменты времени.

Рисунок 1 иллюстрирует случай, когда система связей между агентами не меняется во время прохождения очередной лавины  $t_l = T_{av}(n)$ . Это означает, что подмножества активных и неактивных агентов, сформированные в момент начала лавины, на ее протяжении не изменяются. На рис. 1а представлена наша мультиагентная система в момент поступления в нее внешней информации, который является моментом начала  $n$ -й лавины  $k = k_{beg}^n$ . Система представляет собой набор несвязанных узлов, так как по окончании предыдущей лавины все связи в решетке были аннулированы. Информация поступает к агенту с координатами  $(2, 4)$ , увеличивая информационное давление на него на единицу ( $\xi_{i,j}(k_{beg}^n) = 1$ ). В этот же момент часть агентов, определяемая заданной величиной  $a$  ( $L^{act} = 2$ ), становятся активными и устанавливают связи со своими ближайшими соседями. На рис. 1б видно, что активными становятся агенты с координатами  $(4, 2)$  и  $(4, 3)$  ( $\delta_{4,2}(k_{beg}^n) = \delta_{4,3}(k_{beg}^n) = 1$ ). Остальные агенты в системе неактивны. Далее происходят следующие изменения. Один из двух неактивных «надкритических» агентов с координатами  $(2, 3)$  ( $\delta_{2,3}(k_{beg}^n) = 0$ ,  $\theta[z_{2,3}(k_{beg}^n) - z_c] = 1$ ) независимо меняет свое мнение на противоположное. Активный «надкритический» агент с координатами  $(4, 2)$  ( $\delta_{4,2}(k_{beg}^n) = 1$ ,  $\theta[z_{4,2}(k_{beg}^n) - z_c] = 1$ ) понижает испытываемое им информационное давление на  $\Delta z = 4$  за счет пере-

На рис. 1 и 2 представлен процесс прохождения  $n$ -й информационной лавины и вызываемая ею динамика мнений в мультиагентной системе размером  $L = 5 \times 5$  при  $t_l = T_{av}(n)$  и  $t_l = \Delta k = 1$  соответственно. Величина активности в этих случаях задана  $a = 0.08$ , а вероятность изменения мнения для неактивных «надкритических» агентов  $p = 0.5$ . На этих рисунках черные кружки обозначают агентов, для которых  $s_{i,j}(k) = 1$ , а светлые кружки — агентов с  $s_{i,j}(k) = -1$ . В скобках указаны величины информационного давления  $z_{i,j}(k)$  для рассматриваемых

дачи информации о своем мнении ближайшим соседям, увеличивая тем самым информационное давление на них. Направления перераспределения информационного давления обозначены стрелками. Одновременно активный агент с координатами (4, 3) ( $\delta_{4,3}(k_{beg}^n) = 1$ ) копирует мнение своего «осыпавшегося» соседа. Все эти изменения происходят в течение первой волны информационной лавины, и к моменту ее окончания  $k = k_{beg}^n + 1$  распределение мнений и информационного давления по агентам представлено на рис. 1в. Согласно уравнениям (1) и алгоритмам (3) имеем, например, для агентов с координатами (2, 3) и (4, 3):

$$\begin{aligned} z_{4,3}(k_{beg}^n + 1) &= z_{4,3}(k_{beg}^n) + \\ + \delta_{4,2}(k_{beg}^n)\theta[z_{4,2}(k_{beg}^n) - z_c] &= 4 + 1 = 5, \\ s_{4,3}(k_{beg}^n + 1) &= s_{4,2}(k_{beg}^n) = 1, \\ s_{2,3}(k_{beg}^n + 1) &= -s_{2,3}(k_{beg}^n) = -1. \end{aligned}$$

Аналогично можно представить и другие изменения информационного давления и мнений за первую волну лавины. Далее, после «осыпания» агента (4, 2), активный агент (4, 3) становится «надкритическим» и, следовательно, начинается вторая волна информационной лавины, в течение которой «осыпается» агент (4, 3) и информационное давление перераспределяется по его ближайшим соседям, согласно (1). Среди них нет ни одного активного агента с мнением, противоположным мнению агента (4, 3), поэтому согласно (3) за вторую волну лавины ни один агент своего мнения не меняет. Поскольку на момент окончания второй волны лавины  $k = k_{beg}^n + 2$  оказывается, что ни для одного активного агента существующей подрешетки информационное давление не превышает критического значения, лавина заканчивается (рис. 1г). Информационное давление на неактивных узлах (4, 1) и (4, 4) превышает критическое значение, но в процессе данной лавины они не осыпаются, а лишь накапливают его. После того как лавина заканчивается, подрешетка  $G_l$  перестает существовать и система вновь имеет вид несвязанного набора агентов. Далее происходит очередное поступление информации в систему (пункт 1) и возникает подрешетка  $G_{l+1}$ , на которой будет развиваться следующая лавина.

Рисунок 2 иллюстрирует случай, когда система связей между агентами меняется после каждой волны лавины,  $t_l = 1$ . На рис. 2а представлены изменения, происходящие за первую волну лавины, которая развивается, как и в предыдущем случае, вызывая те же изменения мнений. Так как  $t_l = 1$ , то после осыпания узла (4, 2) и изменения мнения его активным соседом (4, 3) подрешетка  $G_l$ , сформиро-

вавшаяся в момент времени ( $k_{beg}^n$ ) перестает существовать и мгновенно формируется новая подрешетка  $G_{l+1}$ . Она состоит из активных узлов (3, 3) и (4, 2) ( $\delta_{3,3}(k_{beg}^n + 1) = \delta_{4,2}(k_{beg}^n + 1) = 1$ ) и соседних с ними неактивных узлов (рис. 2б). Согласно (4) два из четырех неактивных «надкритических» агентов сформировавшейся подрешетки (4, 1) и (5, 4) меняют свое мнение на противоположное, поскольку

$$\delta_{4,1}(k_{beg}^n + 1) = \delta_{5,4}(k_{beg}^n + 1) = 0,$$

$$\theta[z_{4,1}(k_{beg}^n) - z_c] = \theta[z_{5,4}(k_{beg}^n + 1) - z_c] = 1.$$

Так как активные узлы существующей на момент времени  $k = k_{beg}^n + 1$  подрешетки являются «подкритическими», то лавина на шаге  $k = k_{beg}^n + 2$  заканчивается (рис. 2в) и подрешетка  $G_{l+1}$  перестает существовать. Далее происходит очередное возмущение системы (пункт 1) и возникает подрешетка  $G_{l+2}$ , на которой начнет развиваться следующая лавина.

Рисунки 1 и 2 на примере одной лавины демонстрируют, что время существования установившихся в системе связей  $t_l$  влияет на ее пространственно-временное развитие и, соответственно, на динамику мнений агентов.

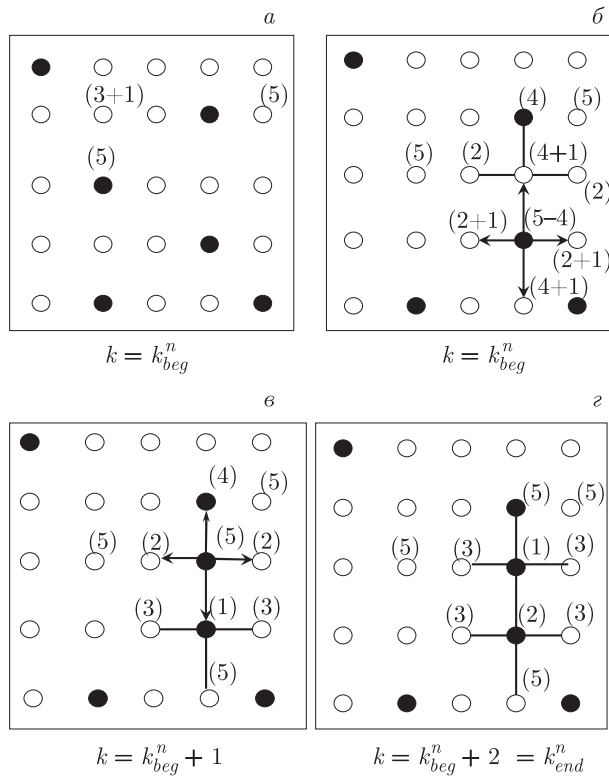
Прежде чем перейти к моделированию поведения нашей системы, сделаем аналитические оценки ожидаемых результатов.

В качестве основной характеристики при изучении динамики мнений будем рассматривать среднее по системе мнение агентов

$$m(t) = \frac{1}{L} \sum_{i,j} s_{i,j}(t).$$

При аналитическом изучении процесса перейдем к обозначению времени  $t$ , чтобы подчеркнуть, что в отличие от шага дискретного времени  $\Delta k = 1$  величина  $\Delta t$  будет принимать любые значения. Поскольку динамика нашей системы стохастическая, характеризовать ее удобнее всего функцией  $\rho(m, t)$  — плотностью вероятности для среднего по системе мнения иметь значение  $m$  в момент времени  $t$ . Аналитическое выражение для  $\rho(m, t)$  мы можем получить, решив уравнение Фоккера–Планка. Предположим, что за некоторый малый промежуток времени  $\Delta t$  величина  $m$  может возрасти или уменьшиться на  $\Delta m$ , или же остаться прежней. Тогда получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \rho(m, t + \Delta t) &= (1 - w^-(m) - w^+(m))\rho(m, t) + \\ &+ w^+(m - \Delta m)\rho(m - \Delta m, t) + \\ &+ w^-(m + \Delta m)\rho(m + \Delta m, t), \end{aligned} \quad (5)$$



**Рис. 1.** Изменение мнений в группе агентов в результате прохождения информационной лавины при  $t_l = T_{av}(n)$ . Агенты с  $s_{i,j} = 1$  обозначены черными кружками, а с  $s_{i,j} = -1$  — светлыми кружками. Направления перераспределения информационного давления при «осыпании» агента указаны стрелками на соответствующих связях, цифры в скобках обозначают величину  $z_{i,j}$  для агента в момент времени  $k$ . а) Начало первой волны лавины. К агенту с координатами (2, 3) поступает информация. б) Продолжение первой волны лавины. Активные агенты устанавливают связи со своими соседями. Неактивный «надкритический» агент с координатами (2, 3) меняет свое мнение. Происходит «осыпание» активного агента с координатами (4, 2), в результате агент с координатами (4, 3) меняет мнение на мнение агента с координатами (4, 2), от которого получает информацию. в) Окончание первой и начало второй волн лавины. Активный агент с координатами (4, 3) становится «надкритическим» и осыпается, неактивные узлы принимают по единице энергии, но в течение данной лавины не осыпаются. г) Окончание второй волны и лавины в целом. После осыпания активного агента (4, 3) информационное давление на соседних неактивных агентов увеличивается, но в течение данной лавины они не осыпаются и не меняют своего мнения. Поскольку для всех активных агентов в существующей подрешетке  $z_{i,j} \leq z_c$ , лавина заканчивается, все существующие в системе связи аннулируются

где функции  $w^\pm(m)$  определяют вероятность величине  $m$  увеличиться (уменьшиться) на  $\Delta m$  за промежуток времени  $\Delta t$ . Разложив  $w^\pm(m)$  и  $\rho(m, t)$  в ряд по малой величине  $\Delta m$  до второго порядка, мы можем записать

$$\begin{aligned} \frac{\rho(m, t + \Delta t) - \rho(m, t)}{\Delta t} = & \\ = -\frac{\partial}{\partial m} \frac{\Delta m}{\Delta t} (w^+(m) - w^-(m)) \rho(m, t) + & \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} \frac{\Delta m^2}{\Delta t} (w^+(m) + w^-(m)) \rho(m, t). & \quad (6) \end{aligned}$$

Чтобы получить выражение для  $\rho(m, t)$ , мы сделаем предположение, что в нашей системе возможно ввести малую величину изменения времени  $\Delta t \sim \sim L^{-1}$ , за которую только один агент меняет свое мнение, т.е. происходит изменение  $m$  на  $\Delta m = = 2/L \ll 1$ . Тогда, переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$  в (6), получим уравнение Фоккера–Планка для  $\rho(m, t)$  и для интересующей нас стационарной плотности вероятности  $\rho^{st}(m)$  —

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(m, t) = -\frac{\partial}{\partial m} \frac{\Delta m}{\Delta t} \times & \\ \times (w^+(m) - w^-(m)) \rho(m, t) + & \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} \frac{\Delta m^2}{\Delta t} (w^+(m) + w^-(m)) \rho(m, t), & \quad (7) \end{aligned}$$

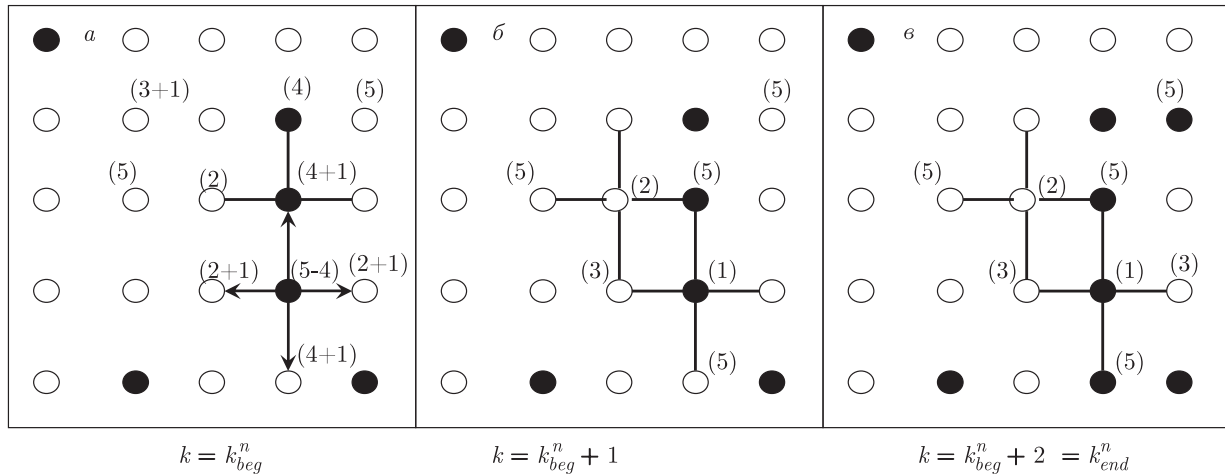
$$\begin{aligned} \rho^{st}(m) = \frac{C}{w^+(m) + w^-(m)} \times & \\ \times \exp \left( L \int \frac{(w^+(m') - w^-(m'))}{(w^+(m') + w^-(m'))} dm' \right), & \end{aligned}$$

где  $C$  — нормировочная константа, которая получается из условия

$$\int_{-1}^1 \rho^{st}(m) dm = 1.$$

Для того чтобы проанализировать поведение  $\rho^{st}(m)$  в зависимости от параметров системы, необходимо определить функции  $w^\pm(m)$ . Для этого рассмотрим величины  $\rho^\pm$  — доли агентов соответственно с положительным и отрицательным мнением, причем  $m = \rho^+ - \rho^-$ , а  $\rho^+ + \rho^- = 1$ . Тогда вероятность агенту с мнением  $s_{i,j} = 1$  находиться в окружении  $u$  агентов с  $s_{i,j} = 1$  и  $(4 - u)$  агентов с  $s_{i,j} = -1$  можно представить как  $\rho^{u+1} \rho^{-(4-u)}$ . Аналогичное выражение можно записать и для агентов с отрицательным мнением. Также обозначим через  $g(t)$  вероятность агенту иметь  $z_{i,j} > z_c$  в момент времени  $t$ . Тогда вероятность осыпания узла можно представить как совместную вероятность  $g(t)a$ , а





**Рис. 2.** Изменение мнений в группе агентов в результате прохождения информационной лавины в случае  $t_l = 1$ . Агенты с  $s_{i,j} = 1$  обозначены черными кружками, а с  $s_{i,j} = -1$  — светлыми кружками. Направления перераспределения информационного давления указаны при «осыпании» агента стрелками на соответствующих связях, цифры в скобках обозначают величину  $z_{i,j}$  на узле в момент времени  $k$ . а) Первая волна лавины протекает так же, как на рис. 1а,б,в. После ее прохождения все существующие в системе связи аннулируются. б) Состояние системы на момент окончания первой и начала второй волн лавины. Возникает новая подрешетка, сформированная активными агентами с координатами (3,3) и (4,2). в) Состояние системы на момент окончания второй волны лавины. За вторую волну независимо от окружения мнение меняют неактивные «надкритические» агенты с координатами (4,1) и (5,4). Так как все активные агенты в существующей подрешетке имеют  $z_{i,j} < z_c$ , то «осыпаний» не происходит и, соответственно, ни один активный агент не меняет своего мнения. Лавина заканчивается и все существующие связи аннулируются

вероятность агенту изменить мнение независимо от соседей — как  $pg(t)(1 - a)$ . Учитывая, что активный агент может поменять свое мнение, если у него имеется хотя бы один сосед с противоположным мнением, который осыпается на данном шаге, мы можем записать следующие выражения для  $w^\pm(m)$ :

$$w^+ = \frac{1}{4}g(t)a^2(4\rho^+\rho^{-4} + 12\rho^{+2}\rho^{-3} + 12\rho^{+3}\rho^{-2} + 4\rho^{+4}\rho^-) + \rho^-(1 - a)g(t)p = \frac{1}{4}g(t)a^2(1 - m^2) + \rho^-(1 - a)g(t)p, \quad (8)$$

$$w^- = \frac{1}{4}g(t)a^2(4\rho^-\rho^{+4} + 12\rho^{-2}\rho^{+3} + 12\rho^{-3}\rho^{+2} + 4\rho^{+4}\rho^+) + \rho^+(1 - a)g(t)p = \frac{1}{4}g(t)a^2(1 - m^2) + \rho^+(1 - a)g(t)p, \quad (9)$$

$$w^+ - w^- = -(1 - a)g(t)pm, \quad (10)$$

$$w^+ + w^- = \frac{1}{2}g(t)a^2(1 - m^2) + (1 - a)g(t)p. \quad (11)$$

Как видно из выражений (8)–(11), соответствующие вероятности зависят от величин  $g(t)$ , т.е.

от вероятности агенту испытывать в данный момент «надкритическое» информационное давление, а они, в свою очередь, определяются тем, как развивается информационная лавина.

Ранее в работе [17] было исследовано развитие лавин на решетке с изменяющейся структурой связей при различных значениях активностей узлов  $a$  и времени существования установившихся связей  $t_l$ . Было показано, что величиной, определяющей характер лавинообразного процесса, является среднее число узлов (агентов), остающихся «надкритическими» на момент окончания очередной лавины  $\langle N_a \rangle$ . Становясь активными на следующем шаге эволюции, эти узлы дают начало новым каскадам «осыпаний» в следующей лавине. Если их число велико, то возникающая лавина будет представлять собой совокупность независимых каскадов «осыпаний» примерно одинаковых размеров, возникающих на разных участках решетки. В случае же, когда начало лавине может дать малое число узлов, она локализуется на едином кластере узлов, размер которого может быть любым, как малым, так и катастрофически большим. Также существует переходный режим, в котором лавина может состоять из отдельных каскадов «осыпаний», возникающих на

различных участках решетки, но при этом размеры этих каскадов различны. Эти три типа лавинообразной динамики характеризуются различным поведением функции плотности вероятности для размеров возникающих в системе лавин  $\rho(S)$ . Размер лавины при этом вычисляется как полное число актов осыпания за время лавины:

$$S(n) = \sum_{k=k_{beg}^n}^{k=k_{end}^n} \sum_l \sum_{G_l} \theta [z_{i,j}^{a,l}(k) - z_c], \quad (12)$$

где первое суммирование проводится по всему времени (или по всем волнам) лавины  $k$  от ее начала  $k = k_{beg}^n$  до окончания  $k = k_{end}^n$ , второе суммирование — по всем подрешеткам, которые возникают во время данной  $n$ -й лавины, третье суммирование — по узлам существующей в данный момент времени подрешетки  $G_l$ . Таким образом, величина  $S(n)$  имеет смысл полного числа активных агентов, осыпавшихся во время лавины, при этом «осыпающийся» узел будет учтен столько раз, сколько раз он осыпался за время лавины.

Плотность вероятности размеров лавин  $\rho(S)$  при  $\langle N_a \rangle \gg 1$  близка к таковой для нормального распределения. В случае малого  $\langle N_a \rangle$  она демонстрирует степенное поведение:  $\rho(S) \sim S^{-\alpha}$ . При переходном режиме  $\rho(S)$  убывает по экспоненциальному закону:  $\rho(S) \sim \exp(-S/\beta)$ . В работе [17] также было показано, что величина  $\langle N_a \rangle$  зависит как от активностей агентов  $a$ , так и от времени существования установившихся связей  $t_l$ , и была получена аналитическая оценка для  $\langle N_a \rangle$ . В случае, когда структура связей в решетке на протяжении очередной лавины остается неизменной, имеем

$$\langle N_a \rangle \approx \frac{(1-a)\langle S \rangle}{a},$$

где  $\langle S \rangle$  — средний по реализации процесса размер лавины. В случае, когда структура связей меняется на каждом шаге лавины,  $\langle N_a \rangle \rightarrow 0$  практически для всех  $a$ .

Возвращаясь к уравнениям (7), воспользуемся результатами работы [17] и сделаем на их основе ряд упрощающих предположений. Проанализируем сначала случай, когда структура связей в решетке остается неизменной все время развития информационной лавины. Поскольку в этом случае на протяжении всей лавины неактивными остаются одни и те же агенты и их число

$$\langle N_a \rangle = \frac{(1-a)\langle S \rangle}{a},$$

вероятность изменить мнение независимо от соседей для них можно представить как

$$p \frac{\langle N_a \rangle}{L} \quad \text{или} \quad p \frac{\langle s \rangle (1-a)}{a}.$$

Мы также допустим, что в выражениях (8) и (9) вероятность узлу «осыпаться»  $g(t)a$  можно оценить как среднюю вероятность узлу «осыпаться» за время лавины  $\langle s \rangle = \langle S \rangle / L$ . При подобных допущениях, ограничения для которых мы обсудим в следующем разделе, из (7) получим для  $\rho^{st}(m)$  в случае, когда установившиеся связи существуют на протяжении всего времени лавины:

$$\rho^{st}(m) = C \left( \frac{1}{2} \langle s \rangle a (1-m^2) + \frac{(1-a)^2 \langle s \rangle p}{a} \right)^{P-1}, \quad (13)$$

$$P = Lp \frac{(1-a)^2}{a^2}. \quad (14)$$

Из выражения (13) видно, что в зависимости от величины параметра  $P$  изменяется вид функции  $\rho^{st}(m)$ , а следовательно, и режим динамики системы. При  $P < 1$  стационарная плотность вероятности  $\rho^{st}(m)$  имеет два максимума при  $m = \pm 1$ . В соответствующем такому бимодальному виду  $\rho^{st}(m)$  режиме система большую часть времени эволюции находится в состояниях «положительного» или «отрицательного» консенсуса, для которых значение  $m$  равно соответственно  $m = \pm 1$ . Переходы между этими состояниями происходят относительно быстро. При  $P = 1$  плотность вероятности  $\rho^{st}(m)$  соответствует равномерному распределению  $m$ . В этом случае система может равновероятно находиться в состояниях с любым значением  $m \in [-1, 1]$ . При  $P > 1$  стационарная функция плотности вероятности имеет единственный максимум при  $m = 0$ . Соответствующий такому унимодальному виду  $\rho^{st}(m)$  режим является состоянием «динамического паритета». Это означает, что большую часть времени эволюции число агентов с мнением  $s_{i,j} = 1$  в системе равно числу агентов с мнением  $s_{i,j} = -1$  и  $m(n) = 0$ , хотя значения  $s_{i,j}$  на узлах меняются.

Из (13) видно, что параметр  $P$  пропорционален отношению вероятностей двух процессов, в результате которых агент в нашей модели может изменить свое мнение. Величина  $p \langle s \rangle (1-a)^2 / a$  характеризует вероятность независимого изменения мнения неактивным агентом, а величина  $\langle s \rangle a$  — вероятность активному агенту принять мнение соседа в ходе информационной лавины. Однако коэффициент пропорциональности является размер системы  $L$ . Чтобы понять природу этой зависимости, рассмотрим случай  $p = 0$ , т. е. ситуацию, когда агенты

в системе не имеют возможности менять свое мнение независимо, а могут лишь копировать мнение соседей в ходе информационных лавин. Как видно из выражений для  $w^\pm(m)$  и уравнения (13), в этом случае в системе возможна реализация только «положительного» или «отрицательного» консенсуса. При этом, достигнув одного из них, система будет в нем оставаться, потому что именно возможность независимого от соседей изменения мнений агентами обеспечивает разрушение консенсусов и дальнейшую динамику. Пользуясь тем же приемом, что и для получения выражения для  $\rho(m, t)$ , мы можем написать уравнение для определения времени  $T(m)$ , которое требуется системе для достижения консенсуса из состояния со средним по системе мнением равным  $m$ , при условии  $p = 0$  [7]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial m} \frac{\Delta m}{\Delta t} (w^+(m) - w^-(m))T(m) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} \frac{\Delta m^2}{\Delta t} (w^+(m) + w^-(m))T(m) = -1, \\ & T(-1) = T(1) = 0, \\ & w^+(m) - w^-(m) = 0, \\ & w^+(m) + w^-(m) = \frac{1}{2} \langle s \rangle a (1 - m^2), \\ & T(m) = \frac{1}{2} \frac{L}{\langle s \rangle a} (\ln 4 + (1 - m) \ln(1 - m) - \\ & \quad - (1 + m) \ln(1 + m)). \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, время, которое необходимо системе для достижения консенсуса при  $p = 0$ , зависит от размера системы. Учитывая полученное, мы видим, что управляющий параметр  $P$  можно представить как произведение величины, пропорциональной  $T(0)$ , и вероятности независимого изменения мнения агентом. Физически мы можем трактовать данный параметр как количество агентов, меняющих свое мнение независимо от соседей за время, необходимое системе для достижения консенсуса из состояния  $m = 0$  при условии  $p = 0$ . Эта величина качественно характеризует процесс разрушения кластеров агентов с единым мнением, возникающих за счет копирования мнения соседей агентами, участвующими в лавине. То есть при  $P < 1$  процесс копирования мнения соседей превалирует над независимым от окружения изменением мнения, что приводит к формированию консенсуса, а при  $P > 1$  формирование кластеров агентов с единым мнением идет медленнее, чем их разрушение, что приводит к реализации динамического паритета.

При переходе к случаю, когда система связей в решетке будет меняться на каждом шаге лавины

$t_i = 1$ , мы также сделаем упрощающее предположение, что  $g(t) = \langle g \rangle$ , где  $\langle g \rangle$  — средняя доля агентов с  $z_{i,j} > z_c$  на одном шаге лавины. Тогда мы получим

$$\begin{aligned} \rho^{st}(m) &= \\ &= C^* \left( \frac{1}{2} \langle g \rangle a^2 (1 - m^2) + (1 - a) \langle g \rangle p \right)^{P^* - 1}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$P^* = Lp \frac{1 - a}{a^2}, \tag{17}$$

где  $C^*$  — нормировочная константа.

Из (16) видно, что в системе возможны те же режимы динамики, что и в случае, когда система связей не меняется в течение лавины. Однако при фиксированных значениях  $a \neq 0$  ( $a \neq 1$ ) и  $p \neq 0$  параметр  $P^*$  больше параметра  $P = P^*(1 - a)$ . Это означает, что область реализации бимодального режима в системе сужается по сравнению со случаем, когда система связей в системе на протяжении лавины неизменна. Этот результат адекватно отражает реальную ситуацию формирования единого мнения в мультиагентной системе, поскольку при частом изменении структуры связей один и тот же агент на протяжении лавины может на одном шаге принять мнение соседа, находясь с ним в связи, а на следующем изменить свое мнение независимо от окружения, будучи не связанным с другими агентами. Это приводит к более медленному формированию консенсуса.

Таким образом, опираясь на полученные при сделанных упрощающих предположениях оценки, в нашей системе можно ожидать реализации трех динамических режимов (фаз), каждый из которых описывается характерной стационарной функцией плотности вероятности для среднего по системе мнения  $\rho^{st}(m)$ . Реализация той или иной фазы зависит от величины параметра  $P$  или  $P^*$ , пропорционального отношению вероятностей двух основных процессов, влияющих на изменение мнений агентов: копирования агентом мнения соседа, с которым он связан и от которого он получает информацию в ходе лавины, и независимого от окружения изменения мнения агентом, не связанным в данный момент со своими соседями. При  $P < 1$  ( $P^* < 1$ ) функция  $\rho^{st}(m)$  бимодальна, что отражает тот факт, что система большую часть времени своей эволюции проводит в состояниях «положительного» ( $m = 1$ ) или «отрицательного» ( $m = -1$ ) консенсуса. При  $P > 1$  ( $P^* > 1$ ) функция унимодальна, что соответствует режиму динамического паритета с  $m = 0$ . При  $P = 1$  ( $P^* = 1$ ) функция  $\rho^{st}(m)$  соответствует равномерному распределению  $m$  на интервале  $[-1, 1]$ .

### 3. ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА РЕЖИМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ МУЛЬТИАГЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ СВЯЗЕЙ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ

В данном разделе мы представим результаты компьютерного моделирования поведения системы, описываемой нашей моделью, и сравним их с аналитическими оценками, полученными выше.

Расчеты проводились для систем различных размеров ( $L = 10^4$ ,  $L = 2500$ ,  $L = 900$ ) при различных значениях активности агентов  $a$  и вероятности независимого изменения мнений  $p$ , при двух временах существования установившихся связей  $t_l = T_{av}(n)$  и  $t_l = 1$ .

Во всех случаях, эволюционируя по описанным выше алгоритмам, система после некоторого переходного периода достигала стационарного (нестабильного) состояния. Ориентируясь на критерии, используемые в расчетах для модели кучи песка [18], мы считали, что система находится в стационарном состоянии, если среднее значение информационного давления в системе на момент окончания лавины

$$z(k_{end}^n) = \frac{1}{L} \sum z_{i,j}(k_{end}^n)$$

лишь незначительно флуктуирует вокруг средней по лавинам величины  $z_{av}$ . В этом состоянии мы следили за системой на протяжении  $N_{av}$  лавин, причем величина  $N_{av}$  менялась в пределах  $10^7$ – $10^9$  лавин для различных размеров системы и величин  $a$  и  $p$ .

В качестве характеристики, описывающей динамику мнений в системе в стационарном состоянии, мы рассматривали среднее по системе мнение на момент окончания  $n$ -й лавины  $m(n)$ :

$$m(n) = \frac{1}{L} \sum_{i,j} s_{i,j}(k_{end}^n), \quad (18)$$

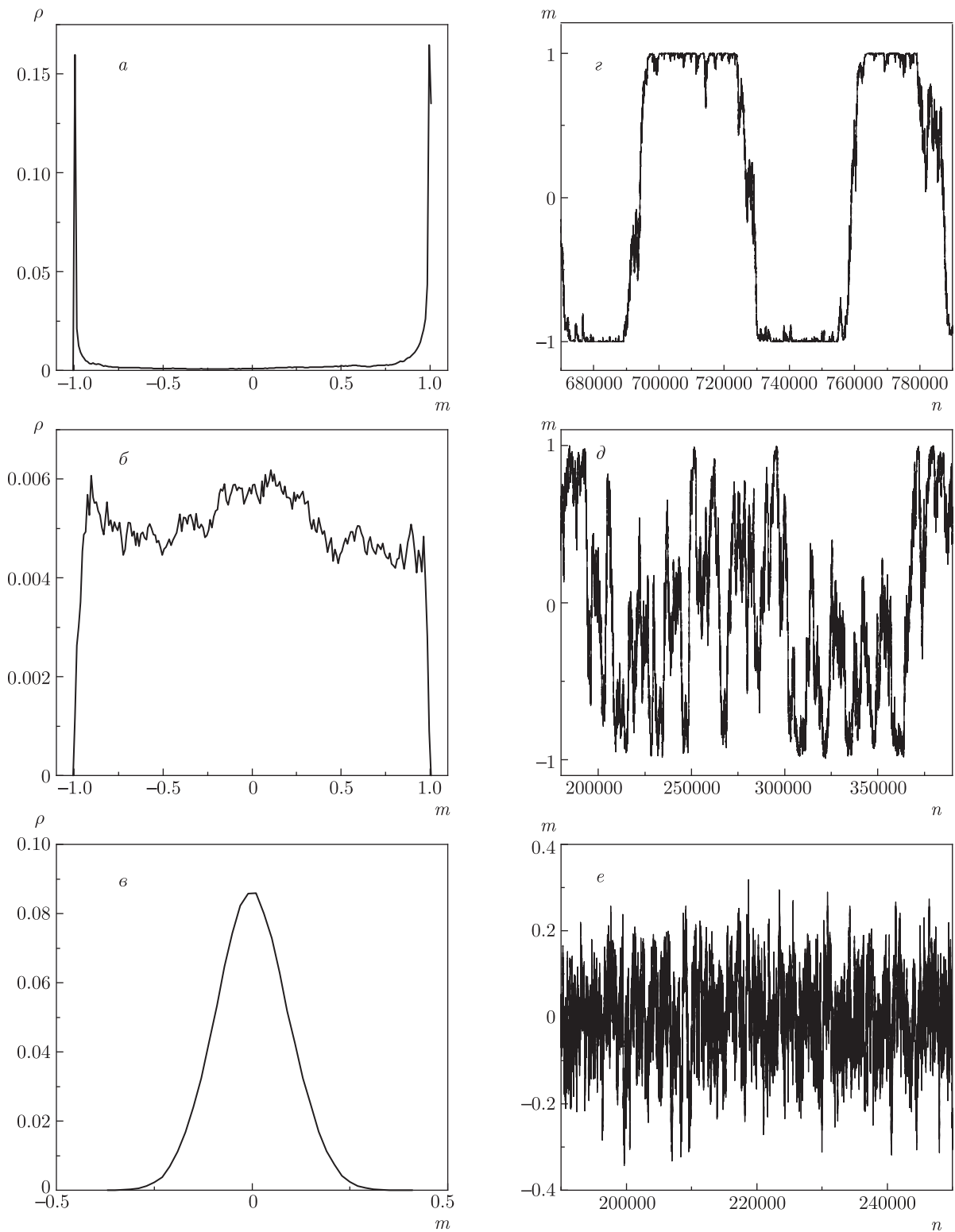
где  $s_{i,j}(k_{end}^n)$  — мнение агента на узле  $(i, j)$  на момент окончания  $n$ -й лавины. По окончании реализации процесса длительностью  $N_{av}$  лавин мы рассчитывали плотность вероятности  $\rho^{st}(m)$ , которая характеризует режим функционирования системы.

Первым важным результатом моделирования является тот факт, что при изучении эволюции среднего по системе мнения  $m(n)$  для систем всех рассмотренных нами размеров при различных  $t_l$  мы наблюдали изменение вида функции  $\rho^{st}(m)$  в зависимости от величины параметра  $P$  ( $P^*$ ), адекватно описываемое оценками (13), (16).

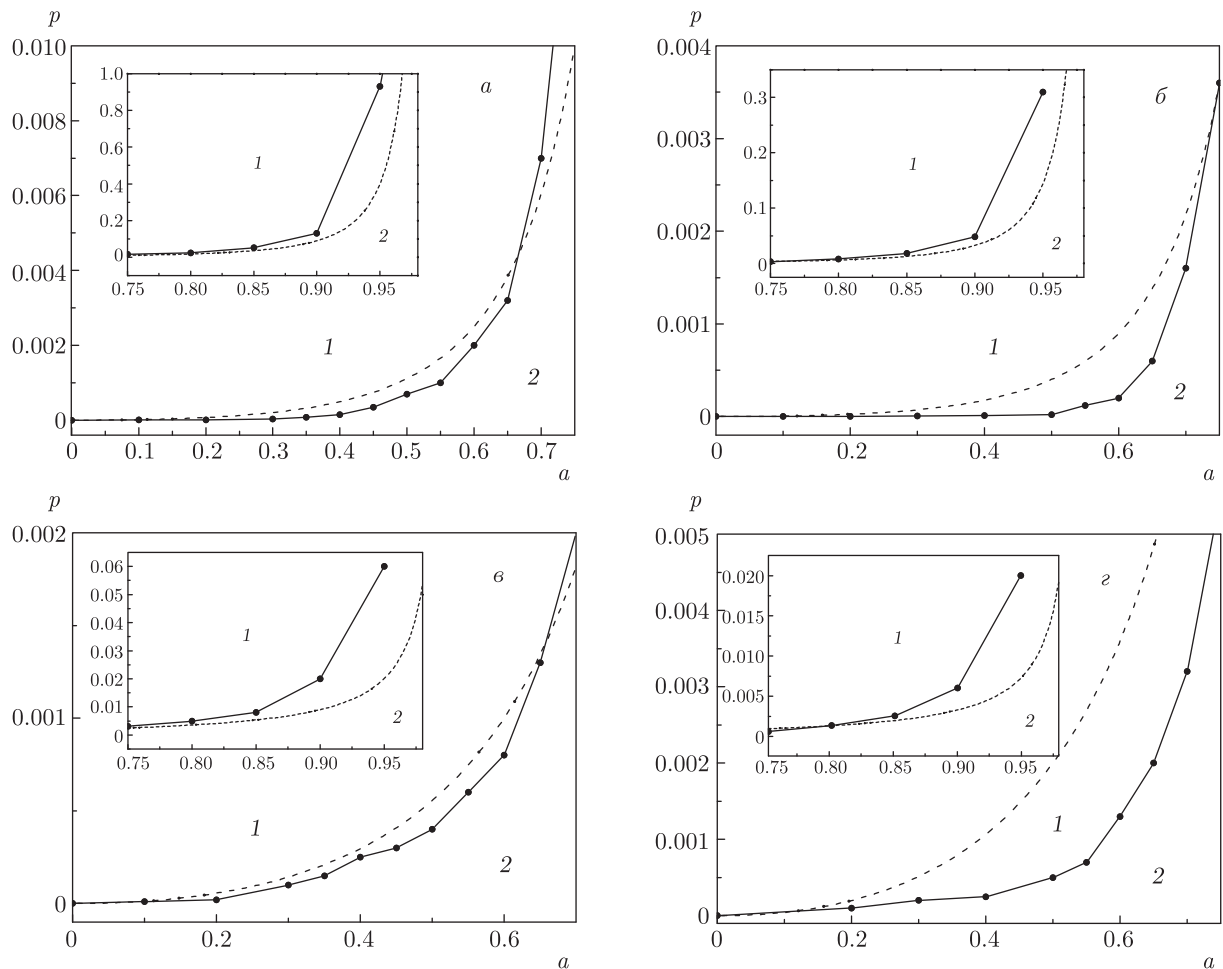
Для иллюстрации на рис. 3 представлены типичные реализации  $m(n)$  и соответствующие им функции плотности вероятности  $\rho^{st}(m)$  для системы размером  $L = 10^4$  в случае, когда система связей между агентами в течение информационной лавины не меняется,  $t_l = T_{av}(n)$ . На рис. 3а,г представлены результаты для  $a = 0.85$ ,  $p = 0.0003$  ( $P = 0.11$ ). Как мы видим, функция  $\rho^{st}(m)$  имеет два максимума при значениях  $m = \pm 1$ . Поведение  $m(n)$  в этом режиме показывает, что система большую часть времени эволюции проводит в состоянии консенсусов с  $m(n) = \pm 1$ , переходы между этими состояниями совершаются относительно быстро. На рис. 3в,е представлены зависимости  $\rho^{st}(m)$  и  $m(n)$  для  $a = 0.85$ ,  $p = 0.03$  ( $P = 11.2$ ). Мы видим, что функция  $\rho^{st}(m)$  имеет один максимум при  $m = 0$ , а значения  $m(n)$  колеблются в окрестности  $m = 0$ , не достигая значений  $m = \pm 1$ . Рисунки 3б,д иллюстрируют случай  $a = 0.85$ ,  $p = 0.0036$  ( $P = 1.3$ ). Здесь функция  $\rho^{st}(m)$  не является ни унимодальной, ни бимодальной, а близка к плотности вероятности равномерного распределения на интервале  $m \in [-1, 1]$ , и величина  $m(n)$  может принимать любое значение из данного интервала.

Нашей основной задачей было построение фазовой диаграммы для режимов функционирования рассмотренной нами системы в пространстве ее параметров  $a$  и  $p$  для различных времен существования связей ( $t_l = 1$  и  $t_l = T_{av}(n)$ ). В качестве критерия для определения значений  $a$  и  $p$ , при которых происходит смена динамических фаз и переход от бимодальной к унимодальной функции  $\rho^{st}(m)$ , мы, следуя работе [19], использовали тот факт, что при данном переходе все значения для  $m(n)$  равновероятны, и это означает, что величина усредненного по реализации модуля среднего по системе мнения должна быть  $\langle |m| \rangle \approx 0.5$  и стандартное квадратичное отклонение этой величины  $\sigma(\langle |m| \rangle) \approx 0.2886$ .

На рис. 4а,б представлены фазовые диаграммы динамических режимов систем размером  $L = 900$  и  $L = 2500$  в пространстве параметров  $a$  и  $p$  в случае, когда система связей между агентами не меняется в течение лавины ( $t_l = T_{av}(n)$ ). В свою очередь, на рис. 4в,г представлены фазовые диаграммы для динамических режимов систем размером  $L = 900$  и  $L = 2500$  в пространстве параметров  $a$  и  $p$  в случае, когда система связей между агентами меняется после каждой волны лавины ( $t_l = 1$ ). На основных графиках параметр  $a$  меняется от нуля до  $a = 0.75$ , на вставках представлен участок  $a \in [0.75, 1]$ . В областях параметров, отмеченных 1, реализуется режим динамического паритета с унимодальной  $\rho^{st}(m)$ , в



**Рис. 3.** а,б,в) Функция плотности вероятности среднего по системе мнения в стационарном состоянии  $\rho^{st}(m)$  в системе размером  $L = 10^4$  для  $a = 0.85$  при  $P = 0.11$  ( $p = 0.0003$ ),  $P = 1.3$  ( $p = 0.0036$ ),  $P = 11.2$  ( $p = 0.03$ ) соответственно. z,д,е) Типичная реализация  $m(n)$  на момент окончания  $n$ -й лавины для тех же значений параметра системы. При увеличении параметра  $P$  и последующем переходе его через значение  $P = 1$  происходит изменение динамического режима в системе от бимодального к унимодальному, как и предсказывает оценка (13)



**Рис. 4.** Фазовые диаграммы динамических режимов мультиагентных систем: а)  $L = 900, t_l = T_{av}(n)$ ; б)  $L = 2500, t_l = T_{av}(n)$ ; в)  $L = 900, t_l = 1$ ; г)  $L = 2500, t_l = 1$ . На основных графиках параметр  $a$  меняется от нуля до  $a = 0.75$ , на вставках дополнительно представлен участок  $f \in [0.75, 1]$ . 1 — область реализации режима динамического паритета, характеризующегося унимодальной функцией плотности вероятности  $\rho^{st}(m)$ , 2 — область реализации режима консенсусов, характеризующегося с бимодальной  $\rho^{st}(m)$ . Точки на сплошных кривых отвечают полученным при численном моделировании значениям  $a$  и  $p$ , при которых происходит переход между двумя режимами. Пунктирные кривые отвечают оценкам  $p = a^2/(L(1 - a)^2)$  (13) и  $p = a^2/(L(1 - a))$  (16)

областях, отмеченных 2 — фаза консенсусов, отвечающая бимодальной функции  $\rho^{st}(m)$ . Точки на сплошных кривых отвечают полученным при численном моделировании значениям  $a$  и  $p$ , при которых происходит переход между двумя режимами. На рис. 4 также приведены кривые (пунктирные линии), отвечающие соотношению  $P = 1$  и  $P^* = 1$ , т. е.  $p = a^2/(L(1 - a)^2)$  и  $p = a^2/(L(1 - a))$  соответственно (13), (16).

Как видно из представленных на рис. 4 результатов, сделанные нами выше оценки значений  $a$  и  $p$  для реализации того или иного динамического режима качественно адекватно отражают карти-

ну поведения системы. Так, согласно оценкам (13), (16) для реализации в системе режима, отвечающего бимодальной функции плотности вероятности  $\rho^{st}(m)$ , при уменьшении активностей агентов  $a$  требуется, чтобы вероятность независимого изменения мнения агентами  $p$  также уменьшалась, что и подтверждается результатами моделирования. Сравнивая рис. 4а и 4в, а также рис. 4б и 4г, мы видим, что область параметров, при которых реализуется режим консенсусов, как и предсказывают оценки (13), (16), заметно сужается в случае, когда система связей в решетке меняется после каждой волны лавины.

Однако из рис. 4 также видно, что удовлетворительное количественное совпадение аналитических и численных результатов можно наблюдать только в определенных промежутках значений параметров. Возникающее расхождение аналитических и численных результатов можно объяснить следующими факторами. Во-первых, как видно из рис. 1 и 2, величина

$$\Delta m(n) = m(n+1) - m(n)$$

включает в себя все изменения мнений агентов за время лавины, в то время как аналитические результаты возможно получить лишь при рассмотрении малых промежутков времени  $\Delta t \sim L^{-1}$ , за которые меняет мнение только один агент. Во-вторых, при расчете вероятности узлу осыпаться мы заменили величину  $g(t)a$  на  $\langle g(t) \rangle a$  для случая  $t_l = 1$  и на  $\langle s \rangle$  для случая  $t_l = T_{av}(n)$ . Подобная замена не учитывает характер развития лавинообразного процесса, который меняется в зависимости от величины  $a$ . Так, в случае  $t_l = T_{av}(n)$  при  $a$  близких к единице, а в случае  $t_l = 1$  и в более широком диапазоне  $a$ , когда функция плотности вероятности размеров лавин носит степенной характер  $\rho(S) \sim S^{-\alpha}$  [17], такая замена будет заметно искажать результат, что мы и видим на вставках на рис. 3. Возможность и способ введения поправок, учитывающих эти факторы, требуют отдельного исследования. Кроме того, необходимо учесть, что зависимость параметра  $P$  ( $P^*$ ) от размера системы приводит к тому, что при увеличении  $L$  для обнаружения фазы с бимодальной функцией  $\rho^{st}(m)$  понадобится экстремально большое время наблюдения  $T \sim L/a$ . Поэтому расхождение аналитических оценок и численных результатов может быть вызвано еще и неоптимально подобранной длиной реализации процесса.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена новая модель динамики мнений в мультиагентной системе, которая, в отличие от уже существующих, представляет изменение мнения агента как результат двух протекающих в системе процессов. Первый — лавинообразное распространение информации между агентами по существующим в системе связям, в ходе которого участвующие в нем агенты под влиянием информационного давления со стороны соседей могут копировать их мнение, второй — независимое изменение мнения агентами, не участвующими в информационной лавине, но находящимися в условиях избыточ-

ного информационного давления. Вероятности участия агента в том или другом процессе определяются основными параметрами модели: активностью агентов  $a$ , которая определяет вероятность участия агента в информационной лавине, и вероятностью независимого изменения мнения агентом под давлением полученной информации  $p$ . По результатам аналитического и численного исследований динамики мнений в нашей модели можно сделать вывод, что в зависимости от соотношения этих параметров в системе возможна реализация одного из трех динамических режимов (фаз). Первый из них представляет собой состояние, близкое к динамическому паритету. В этой фазе мнения агентов могут меняться, но среднее число агентов с положительным и отрицательным значениями мнений в каждый момент времени примерно одинаково. Эта фаза описывается унимодальной функцией плотности вероятности для среднего по системе мнения  $m$  с максимумом  $m_0 = 0$ . Находясь во втором режиме, система большую часть времени проводит в состояниях, близких к консенсусам, в которых значения мнений всех агентов либо положительны, либо отрицательны. Этот режим описывается бимодальной функцией плотности вероятности для среднего по системе мнения с максимумами  $m_{1,2} = \pm 1$ . Третья динамическая фаза является переходной и в ней все значения среднего по системе мнения практически равновероятны, а функция плотности вероятности этой величины близка к таковой для равномерного распределения.

Благодаря тому, что предлагаемая в работе модель динамики мнений описывает не только сам процесс, но и причины, вызывающие его, она имеет ряд преимуществ перед ранее разработанными моделями. Новые параметры, введенные в модель, позволяют рассматривать влияние различных факторов на процессы формирования мнения в мультиагентных системах. Так, в настоящей работе мы рассмотрели влияние времени существования установившихся в системе связей на реализацию различных динамических режимов в ней, сравнив результаты для двух вариантов изменения структуры связей. В первом случае система связей между агентами менялась только между очередными информационными лавинами, а в течение лавины оставалась неизменной, а во втором она менялась во время прохождения лавины. В результате мы показали, что область значений параметров системы, при которых реализуется бимодальный режим, во втором случае несколько сужается. Этот результат вполне адекватно отражает реальную ситуацию, когда более ак-

тивный обмен мнениями в мультиагентной системе усложняет формирование консенсуса.

В дальнейшем, используя возможности предложенной модели, можно рассмотреть динамику мнений в нашей системе при различных условиях, например, в случае, когда поступающая в систему информация имеет определенный знак и агенты, меняя свое мнение, могут ориентироваться не только на мнение соседей, но и на знак внешней информации. Также интересной задачей является изучение системы при условии, что значения активностей агентов различны или изменяются со временем. Еще одним важным обобщением модели будет рассмотрение мультиагентной системы не на базе решетки, а на сложных сетях, с учетом информационного давления не только со стороны ближайших соседей.

Важно также отметить, что ясный физический смысл параметров, определяющих поведение системы, позволяет адаптировать ее к описанию различных систем, что может открыть широкие возможности для практического применения нашей модели, например, в задачах о динамике рыночных цен, подобных рассмотренным в [20], стабилизации процессов на финансовых рынках [21] или в исследованиях эффекта «эхо-камеры» в социальных сетях [22].

**Финансирование.** Т. Ф. благодарит Министерство науки и высшего образования Российской Федерации за финансовую поддержку работы в рамках реализации программы Научного центра мирового уровня по направлению «Передовые цифровые технологии» (соглашение от 16.11.2020 № 075-15-2020-903).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Holovatch, R. Kenna, and S. Thurner, *Eur. J. Phys.* **38**, 023002 (2017).
2. R. Dickman, *Physica A* **306**, 90 (2002).
3. H. Haken, J. A. S.Kelso, and H. Bunz, *Biol. Cybernetics* **51**, 347 (1985).
4. J. Borge-Holthoefer and Y. Moreno, *Phys. Rev. E* **85**, 026116 (2012).
5. V. Avetisov, A. Gorsky, S. Maslov, S. Nechaev, and O. Valba, *Phys. Rev. E* **98**, 032308 (2018).
6. S. Galam, *Int. J. Mod. Phys. C* **19**, 409 (2008).
7. S. Redner, *Compt. Rend. Phys.* **20**(4), 275 (2019).
8. A. Carro, R. Toral, and M. San Miguel, *Sci. Rep.* **6**, 24775 (2016).
9. L. Rozanova and M. Boguna, *Phys. Rev. E* **96**, 012310 (2017).
10. J. Fernandez-Gracia, K. Suchecki, J. J. Ramasco, M. San Miguel, and V. Eguiluz, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 158701 (2014).
11. A. Kirman, *Quart. J. Economics* **108**(1), 137 (1993).
12. A. Sirbu, V. Loreto, V. D. P. Servedio, and F. Tria, *Participatory Sensing, Opinions and Collective Awareness*, pp. 363–401, *Understanding Complex Systems*, Springer (2016).
13. N. Perra, B. Goncalves, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, *Nature Sci. Rep.* **2**, 469 (2012).
14. H. Borge-Holthoefer, R. A. Banos, S. Gonzalez-Bailon, and Y. Moreno, *J. Complex Networks* **1**(1), 3 (2013).
15. D. Markovic and C. Gros, *Phys. Rep.* **536**, 41 (2014).
16. Н. Е. Савицкая, *Письма в ЖЭТФ* **103**, 225 (2016).
17. А. В. Накин, Н. Е. Савицкая, *ЖЭТФ* **152**, 812 (2017).
18. D. Dhar, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1613 (1990).
19. A. F. Peralta, A. Carro, M. San Miguel, and R. Toral, *New J. Phys.* **20**, 103045 (2018).
20. A. E. Biondo, A. Pluchino, A. Rapisarda, and D. Helbing, *Phys. Rev. E* **88**, 062814 (2013).
21. S. M. Krause and S. Bornholdt, *Phys. Rev. E* **86**, 056106 (2012).
22. F. Baumann, P. Lorenz-Spreen, I. M. Sokolov, and M. Starnini, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 048301 (2020).