

СОЛИТОНЫ В ХИРАЛЬНОЙ СРЕДЕ

*А. А. Заболотский**

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 18 ноября 2020 г.,
после переработки 18 ноября 2020 г.
Принята к публикации 20 ноября 2020 г.

Исследуется динамика поля в тонком волноводе, окруженном спирально расположенными двухуровневыми атомами. Взаимодействие индуцированных поляризаций атомов с полем, распространяющимся внутри волновода, описывается системой редуцированных уравнений Максвелла–Блоха в приближении однонаправленного распространения поля. Нелокальное диполь–дипольное взаимодействие поляризаций атомов в спирали описывается в приближении взаимодействия ближайших соседей в криволинейной среде. Методом, основанном на задаче Римана с нулями, найдены солитонные решения интегрируемой редукции системы уравнений, описывающие несимметричное распространение импульсов поля в волноводе в прямом и обратном направлениях. Показано, что в зависимости от знака хиральности или направления распространения импульс поля в волноводе может иметь форму либо острого пика, либо близкую прямоугольной. Решения, описывающие эволюцию импульсов поля на ненулевом пьедестале, показывают, что форма и амплитуда импульсов поля могут контролироваться параметрами внешней накачки.

DOI: 10.31857/S0044451021030044

1. ВВЕДЕНИЕ

Асимметричное распространение волн, вызванное нелинейностью, возникает в различных областях физики, включая нелинейную оптику. Электронный диод, основанный на эффекте Фарадея, является ключевым компонентом в оптических и микроволновых системах [1–3]. Так называемый полностью оптический диод был предсказан в [4–8], а затем реализован экспериментально в [9]. В качестве основы диода предлагалось использовать левосторонние метаматериалы [10], квазипериодические системы [11], связанные линейные и нелинейные резонаторы [12–14]. Асимметричное пропускание в структурах метаматериалов возникает, если распространение сопровождается преобразованием поляризации [6, 8]. В оптике простейший изолятор, использующий невзаимное пропускание циркулярно поляризованного света, состоит из пары поляризаторов и вращателя Фарадея и для него требуется статическое магнитное поле. Аналогичный подход используется и для микроволновых устройств [1].

Изучение нелинейных невзаимных эффектов представляет как теоретический, так и прикладной интерес, поскольку формирование ультрокоротких импульсов поля в несимметричных, хиральных и криволинейных средах может существенно отличаться от случаев однородных и симметричных сред. Аналитическую информацию об эволюции оптических и других импульсов в нелинейных средах можно получить, решая начально-краевые задачи для полностью интегрируемых уравнений [15–17]. Первые полностью интегрируемые уравнения Максвелла–Блоха, описывающие эволюцию электромагнитных волн в двухуровневой системе (ДУС), были выведены Лэмбом [18] в рамках приближения медленно меняющейся огибающей. Позже были найдены интегрируемые обобщения этих уравнений, описывающие эволюцию электромагнитных импульсов как с применением приближения медленной огибающей, так и вне его, см. обзоры [16, 17]. Различие нелинейных эффектов, определяющих эволюцию возбуждений в прямолинейных и изогнутых молекулярных цепочках, в рамках интегрируемых моделей показано в [19, 20].

Если расстояние между атомами намного меньше резонансной длины волны, то нелокальное диполь–дипольное взаимодействие (ДДВ) может ока-

* E-mail: zabolotskii@iae.nsk.ru

зывать существенное влияние на формирование возбуждений в дипольных средах и на многие другие линейные и нелинейные процессы [21–29]. В приближении взаимодействия ближайших соседей взаимодействие диполей, расположенных на искривленных поверхностях, описывается лапласианом в криволинейных координатах [30]. В двумерных и трехмерных структурах, например, в магнитах и жидких кристаллах, эффекты, связанные с ДДВ и геометрическими факторами, играют решающую роль. Оптические хиральные среды могут быть сформированы из спирально расположенных атомов, см., например, [20].

В настоящей работе интегрируемая модель применяется для описания влияния хиральности и нелинейной обратной связи на распространение импульсов поля. В следующем разделе статьи представлена базовая система редуцированных уравнений Максвелла–Блоха (РУМБ), описывающая динамику ультракоротких импульсов поля в волноводе, окруженном спиралью с ДУС. В разд. 3 приведено ее представление нулевой кривизны. Свойства симметрии описаны в разд. 4. Метод, основанный на решении задачи Римана с нулями [15], описан в разд. 5. Солитонные решения представлены в разд. 6. Выводы даны в Заключение.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ

Хиральная среда, изучаемая в данной работе, показана на рис. 1. Атомы или молекулы, моделированные ДУС, имплантированы в кривые, образующие спирали. Осциллирующие дипольные моменты переходов в атомах создают электромагнитное поле $\tilde{\mathbf{E}}$, которое распространяется вдоль и против направления оси z в волноводе. Для цепочки атомов, расположенных на кривой $\gamma(s)$, энергия взаи-

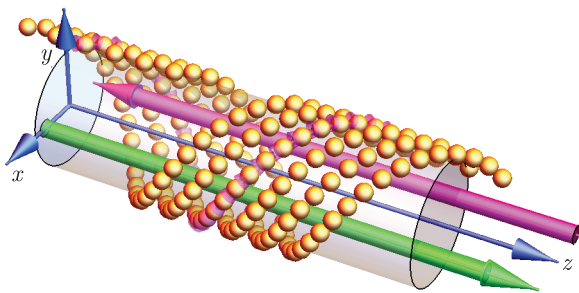


Рис. 1. Вид хиральной среды. Направление распространения импульсов параллельно оси z показано стрелками. Сферы обозначают атомы, расположенные на спиральях

модействия поля $\tilde{\mathbf{E}}(s)$ с поляризацией среды $\tilde{\mathbf{P}}(s) = \sum_n g_d(s - s_n) \tilde{\boldsymbol{\rho}}(s_n)$ пропорциональна $-\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_m$, где $s_n = an$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, — координаты атомов на кривой, $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ — индуцированная поляризация одного атома, g_d — коэффициент взаимодействия. Знак тильда над функциями означает, что они определены в точке на кривой $s \in \gamma(s)$. Для расстояний, много меньших длины волны, поле диполя убывает как куб расстояния, поэтому для упрощения модели используем приближение взаимодействия только с ближайшими соседями, которое ранее успешно применялось к аналогичным молекулярным цепочкам, см., например, [21, 24]. С учетом полей поляризаций только ближайших соседей нелокальная поляризация имеет вид

$$\tilde{\mathbf{P}}(s_n) \approx g_d(0) \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\gamma(s_n)) + g_d(s_n - s_{n-1}) \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\gamma(s_{n-1})) + g_d(s_n - s_{n+1}) \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\gamma(s_{n+1})). \quad (1)$$

В декартовых координатах $\mathbf{e}_{x,y,z}$ спираль $\gamma(s)$ имеет вид

$$\gamma(s) = \mathcal{R} [\mathbf{e}_x \cos(\phi) + \mathbf{e}_y \sin(\phi)] + \mathbf{e}_z \mathcal{C} \phi \mathcal{P}. \quad (2)$$

Здесь $\phi = s/\mathcal{L}$, $\mathcal{L} = \sqrt{\mathcal{P}^2 + \mathcal{R}^2}$, \mathcal{R} и \mathcal{P} — соответственно радиус и шаг спирали, $\mathcal{C} = \pm 1$ — хиральность спирали. Для рассматриваемых здесь симметричных спиралей кривизна $\mathcal{C}_h = \mathcal{R}/\mathcal{L}^2$, а также кручение $\mathcal{T}_h = \mathcal{C}\mathcal{P}/\mathcal{L}^2$ — константы. Мы предполагаем, что $s_n - s_{n-1} \ll \mathcal{R}, \mathcal{P}$. Разность между проекциями спиральных положений атомов на продольную координату z имеет вид

$$z_n - z_{n-1} = (s_n - s_{n-1}) \mathcal{C}\mathcal{P}/\mathcal{L} \equiv a \mathcal{C}\mathcal{P}/\mathcal{L}. \quad (3)$$

Тангенциальный $\mathbf{T} = \partial_s \gamma(s)$, нормальный \mathbf{N} и бинормальный \mathbf{V} векторы образуют базис Френе–Серре [30]. Для простоты полагаем, что $\mathcal{C}_h \rightarrow 0$. В итоге движение возбуждения по спирали сводится к вращению нормального и бинормального векторов вокруг оси z . Чтобы учесть влияние полей наведенных диполей соседних атомов, перейдем к вращающейся системе координат $\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \hat{M}(\mathcal{C}_h \rightarrow 0) \mathbf{P}$, $\tilde{\mathbf{E}} = \hat{M}(\mathcal{C}_h \rightarrow 0) \boldsymbol{\mathcal{E}}$, где $\mathbf{P} = \{P_x, P_y, P_z\}^T$, $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z\}^T$. Здесь и ниже функции без тильды определены на оси z . При смещении $s \rightarrow s \pm a$ вектор поляризации $\mathbf{P}_\perp = \{P_x, P_y\}^T$ вращается $\mathbf{P}_\perp(s) \rightarrow \hat{M}_\perp(s)^{-1} \hat{M}_\perp(s \pm a) \mathbf{P}_\perp(s \pm a) = \hat{M}_\perp(\pm a) \mathbf{P}_\perp(s \pm a)$. Это вращение описывается матрицей $\hat{M}_\perp(\pm a)$:

$$\hat{M}_\perp(s) = \begin{bmatrix} -\cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В этом приближении находим из (1) с учетом проекции на ось z

$$\begin{aligned} \hat{M}_\perp(a)\mathbf{P}_\perp(s+a) + \hat{M}_\perp(-a)\mathbf{P}_\perp(s-a) = \\ = 2\hat{I}\mathbf{P}_\perp(s) - 2a^2\mathcal{T}_h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \partial_z\mathbf{P}_\perp(z) + \\ + a^2\hat{I}\partial_s^2\mathbf{P}_\perp(s) + \mathcal{O}(a^3), \end{aligned} \quad (5)$$

где \hat{I} — единичная 2×2 -матрица. Во втором члене в правой части уравнения (5) использована проекция на ось z с учетом (3).

Интегрируемость модели позволяет выявить определяющие нелинейные эффекты, проанализировать начальные условия и провести сравнение с результатами численного анализа исходной более общей модели. Чтобы найти полностью интегрируемую модель, мы предполагаем помимо стандартных условий, таких как отсутствие потерь и одномерность волновода, что второй производной по s в правой части уравнения (5) можно пренебречь. Это условие обсуждается в разд. 5. Уравнения Максвелла, описывающие эволюцию двухкомпонентного электрического поля в прямолинейном волноводе, распространяющегося в направлении оси z или против нее, см. рис. 1, с учетом поляризаций спирально расположенных атомов имеют вид

$$\begin{aligned} \left[\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \right] \boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp = \frac{4\pi N_a d_a}{c^2} \times \\ \times \partial_t^2 \left[(1 + 2g_0) + \gamma_c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \partial_z \right] \mathbf{P}_\perp, \end{aligned} \quad (6)$$

где $g_0 = g_d(\pm a)$, $g_d(0) = 1$, $\gamma_c = -g_0 2a^2 \mathcal{C}\mathcal{P}/\mathcal{L}$, c — фазовая скорость поля в среде и $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp = \{\mathcal{E}_x(z, t), \mathcal{E}_y(z, t)\}^T$. Второй матричный член в правой части уравнений (6) обусловлен влиянием криволинейного расположения атомов вокруг волновода.

При условии $4\pi N_a d_a^2 / \hbar \omega_a \leq 1$, где N_a, d_a, ω_a — плотность ДУС, дипольный момент и частота перехода соответственно, применимо приближение однонаправленного распространения волновых пакетов [31]. Для оптических полей приближение выполни-

мо для $N_a \lesssim 10^{-18}$ см $^{-3}$. Формально условие можно представить в виде

$$\partial_z + \varepsilon \partial_{ct} \ll \partial_t, \partial_z, \quad (7)$$

где $\varepsilon = 1$ соответствует направлению распространения поля слева направо, а $\varepsilon = -1$ — противоположному направлению.

При условиях (7) уравнения (6) принимают вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial \chi} = \frac{\partial P_x}{\partial \tau} + b \frac{\partial^2 P_y}{\partial \tau^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial \chi} = \frac{\partial P_y}{\partial \tau} - b \frac{\partial^2 P_x}{\partial \tau^2}. \quad (9)$$

Здесь $E_{x,y} = d_0 \mathcal{E}_{x,y} / (\hbar \omega)$, $\tau = t\omega$, $\varepsilon = \varepsilon \mathcal{C} = \pm 1$ и

$$b = \frac{-\varepsilon g_0 \omega}{(1 + 2g_0) \mathcal{L} c} = \varepsilon f^2, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} = \frac{-\hbar c^2}{4\pi N_a d_a^2 \omega_0 (1 + 2g_0)} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial ct} \right). \quad (11)$$

Для диполь-дипольного взаимодействия $g_0 < 0$ и, считая, что $1 + 2g_0 > 0$, полагаем $b = \varepsilon f^2$, $f \in \mathbb{R}$. Знак ε определяется как хиральностью спирали, так и направлением распространения импульсов поля.

В безразмерных переменных уравнения, описывающие динамику ДУС во внешнем поле вращения вектора Блоха $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$, [32] совместно с уравнениями (8), (9) представим в виде

$$\partial_\tau S = iS - iES_3, \quad (12)$$

$$\partial_\tau S_3 = \frac{i}{2} (ES^* - E^*S), \quad (13)$$

$$\partial_x E = \partial_\tau (S - i\varepsilon f^2 \partial_\tau S). \quad (14)$$

Здесь $E = E_x + iE_y$, $S = S_1 + iS_2$, $S_1 = P_x$, $S_2 = P_y$ и S_3 — нормированная разность населенностей уровней энергетического перехода ДУС.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Система (12)–(14) является условием совместности следующих линейных систем:

$$\partial_t \Phi = \mathbf{L}\psi \equiv \frac{\varepsilon}{f^2 - \zeta^2} \begin{bmatrix} -i & \zeta U \\ -\varepsilon \zeta U^* & i \end{bmatrix} \Phi, \quad (15)$$

$$\partial_z \Phi = \mathbf{A}\Phi \equiv \frac{\varepsilon}{f^2 - \zeta^2 + 2\varepsilon} \begin{bmatrix} i \frac{f^2 + \zeta^2}{f^2 - \zeta^2} S_3 & \zeta \sqrt{c} S - \varepsilon \delta(\zeta) f^2 U S_3 \\ -\varepsilon \zeta \sqrt{c} S^* + \delta(\zeta) f^2 U^* S_3 & -i \frac{f^2 + \zeta^2}{f^2 - \zeta^2} S_3 \end{bmatrix} \Phi, \quad (16)$$

где $U = E/\sqrt{c}$, $c = 1 + \epsilon f^2$ и

$$\delta(\zeta) = \zeta \frac{f^2 - \zeta^2 + 2\epsilon}{f^2 - \zeta^2}. \tag{17}$$

Существует бесконечное количество интегрируемых уравнений, отличающихся калибровочными преобразованиями представления нулевой кривизны. Система (15), (16) подобрана с целью удобства применения метода решения с использованием задачи Римана с нулями [15].

Для анализа аналитических свойств функций Йоста представим компоненты первого столбца функции Φ в виде

$$\phi_1 = \exp \left(-i\lambda\tau + \int_{-\infty}^{\tau} \rho(\zeta, t) dt \right), \tag{18}$$

$$\phi_2 = \phi_0 \exp \left(-i\lambda\tau + \int_{-\infty}^{\tau} \rho(\zeta, t) dt \right), \tag{19}$$

где $\lambda(\zeta) = \epsilon(f^2 - \zeta^2)^{-1}$ и ϕ_0 не зависит от ζ . Считаем, что λ лежит в верхней полуплоскости комплексной плоскости. Подставляя (18), (19) в систему (15), получаем

$$\zeta F \partial_{\tau} \left(\frac{\Gamma}{\zeta U} \right) = \lambda (2i\Gamma - \zeta^2 |U|^2 - \Gamma^2), \tag{20}$$

где $\Gamma = \zeta U \phi_2 / \phi_1$. Пусть разложение Γ по степеням $i\lambda$ имеет вид

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (i\lambda)^{-n}. \tag{21}$$

Подставив (21) в уравнение (20), получаем рекурсию

$$2i\gamma_n - i^k f^2 |U|^2 \delta_{k0} + \sum_{n=0}^k \gamma_{k-n} \gamma_n = iU \partial_{\tau} \left(\frac{\gamma_{k-1}}{U} \right). \tag{22}$$

Отсюда находим интегральную плотность

$$\gamma_0 = i \left(1 \pm \sqrt{1 + \epsilon f^2 |U|^2} \right). \tag{23}$$

Сравнивая с разложением ρ по степеням $i\lambda$

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (i\lambda)^{-n}, \tag{24}$$

находим из уравнения (20)

$$\rho_n = -i\gamma_{n+1}. \tag{25}$$

Таким образом, асимптотика вектор-функции при $\lambda \rightarrow \infty$ ($\zeta \rightarrow \pm f$) имеет вид

$$\phi = \left(\begin{array}{c} 1 \\ i\rho_{-1} \\ fU \end{array} \right) e^{-i\lambda u(\tau) + \mathcal{O}(1)} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\lambda} \right), \tag{26}$$

где

$$u = \tau + \int_{-\infty}^{\tau} \left(\sqrt{1 + \epsilon f^2 |U|^2} dt - 1 \right). \tag{27}$$

Из (26), (27) следует, что вместо τ удобно ввести новую переменную u . При этом спектральная проблема (15) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\epsilon}{f^2 - \zeta^2} \begin{bmatrix} -iV_3 & \zeta V \\ -\epsilon \zeta V^* & iV_3 \end{bmatrix} \Phi, \tag{28}$$

где $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$, $V = V_1 + iV_2$ и

$$V_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon f^2 |U|^2}}, \quad V = \frac{U}{\sqrt{1 + \epsilon f^2 |U|^2}}. \tag{29}$$

4. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

Перечислим свойства симметрии линейных систем (16), (28) и соответствующих матричных функций Φ :

I)

$$L^*(\zeta^*) = M(\zeta) L(\zeta) M^{-1}(\zeta), \tag{30}$$

$$A^*(\zeta^*) = M(\zeta) A(\zeta) M^{-1}(\zeta), \tag{31}$$

$$\Phi^*(\zeta^*) = M(\zeta) \Phi(\zeta) M^{-1}(\zeta), \tag{32}$$

$$M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{33}$$

II)

$$\sigma_3^{-1} L(-\zeta) \sigma_3 = L(\zeta), \tag{34}$$

$$\sigma_3^{-1} A(-\zeta) \sigma_3 = A(\zeta), \tag{35}$$

$$\sigma_3^{-1} \Phi(-\zeta) \sigma_3 = \Phi(\zeta), \tag{36}$$

σ_i — матрицы Паули;

III)

$$M_H(\zeta) L^\dagger(\zeta^*) M_H^{-1}(\zeta) = -L(\zeta), \tag{37}$$

$$M_H(\zeta) A^\dagger(\zeta^*) M_H^{-1}(\zeta) = -A(\zeta), \tag{38}$$

$$M_H(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Свойства симметрии I определяют вид функции $\Phi(\zeta_j) = \Phi_j$,

$$\Phi_j^\pm = \begin{pmatrix} \psi_{j1} & -\epsilon\psi_{j2}^* \\ \psi_{j2} & \psi_{j1}^* \end{pmatrix}. \quad (40)$$

5. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Будем строить N -солитонное решение методом решения задачи Римана с нулями [15]. Считаем, что все полюсы простые. Функция Йоста $J_N(\zeta)$ — решение системы (16), (28) — строится «одеванием» исходного решения $J_0(\zeta)$, которое определяется начально-краевыми условиями:

$$J_N(\zeta) = G_N(\zeta)J_0(\zeta), \quad (41)$$

где $G_N(\zeta)$ — мероморфная функция с $2N$ полюсами со свойствами симметрии I и II, см. разд. 4:

$$J_N^*(\zeta^*) = MJ_N(\zeta)M^{-1}, \quad (42)$$

$$J_N(-\zeta) = \sigma_3 J_N(\zeta) \sigma_3^{-1}, \quad (43)$$

$$G_N^*(\zeta^*) = MG_N(\zeta)M^{-1}, \quad (44)$$

$$G_N(-\zeta) = \sigma_3 G_N(\zeta) \sigma_3^{-1}. \quad (45)$$

Если ζ_n — простой полюс $G_N(\zeta)$, то из-за симметрии (34), (35) $-\zeta_n$ тоже простой полюс $G_N(\zeta)$, т. е.

$$G_N(\zeta) = C_N H_N(\zeta), \quad (46)$$

$$H_N(\zeta) = I + \sum_{n=1}^N \left[\frac{A_n}{\zeta - \zeta_n} + \frac{\tilde{A}_n}{\zeta + \zeta_n} \right]. \quad (47)$$

Здесь C_N — 2×2 -матрица, не зависящая от ζ . Матрицы C_N, H_N обладают той же симметрией, что и G_N :

$$C_N = \sigma_3 C_N \sigma_3^{-1}, \quad H_N(-\zeta) = \sigma_3 H_N(\zeta) \sigma_3^{-1}, \quad (48)$$

где

$$\tilde{A}_n = -\sigma_3 A_n \sigma_3^{-1}. \quad (49)$$

Для определения C_N рассмотрим предел $\zeta \rightarrow \infty$ в системах (16) и (28):

$$\partial_{\tau,x} C_N H_N(\infty) = \partial_{\tau,x} C_N \rightarrow 0. \quad (50)$$

Из (48), (50) следует, что C_N — действительная постоянная диагональная матрица, которая может быть устранена калибровочным преобразованием.

Из (34), (35) и (16), (28) следует, что $J^\dagger(\zeta^*)M_H(\zeta)^{-1}J(\zeta)M_H(\zeta)$ — постоянная матрица и, как следует из асимптотики $\zeta \rightarrow \infty$, единичная:

$$J_N(\zeta)M_H(\zeta)J^\dagger(\zeta^*)M_H(\zeta)^{-1} = 1. \quad (51)$$

Из условия отсутствия сингулярностей в (51) при $\zeta \rightarrow \zeta_k$ находим систему линейных уравнений:

$$A_k M_H \left\{ I + \sum_{n=1}^N \left[\frac{A_n^\dagger(\zeta_n^*)}{\zeta_k - \zeta_n^*} - \frac{\tilde{A}_n^\dagger(\zeta_n^*)}{\zeta_k + \zeta_n^*} \right] \right\} M_H^{-1} = 0. \quad (52)$$

Обозначим $x_n = x(\zeta_n), \beta_n = \beta(\zeta_n), \dots$, etc, $n = 1, 2, \dots, N$ и представим матрицы A_n в виде

$$A_n = \begin{pmatrix} x_n \beta_n & x_n \alpha_n \\ y_n \beta_n & y_n \alpha_n \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Подстановка в (63) дает систему уравнений

$$\beta_k + \frac{2}{\zeta_k^2 - \zeta_n^{*2}} B_{kn} x_n^* = 0, \quad (54)$$

$$\epsilon \alpha_k + \frac{2}{\zeta_k^2 - \zeta_n^{*2}} A_{kn} y_n^* = 0, \quad (55)$$

где

$$B_{kn} = (\beta_k \beta_n^* \zeta_n^* + \epsilon \alpha_k \zeta_k \alpha_n^*), \quad (56)$$

$$A_{kn} = (\beta_k \zeta_k \beta_n^* + \epsilon \alpha_k \alpha_n^* \zeta_n^*). \quad (57)$$

Подставляя решения систем (54), (55), которые можно найти с помощью формул Крамера, в выражение (47), находим матричную функцию

$$H_N = I - \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{\zeta_k^{*2} - \zeta_n^2}{f_0^2 - \zeta_n^2} \times \begin{bmatrix} \zeta_n \beta_n (B_{nk}^*)^{-1} \beta_k^* & f_0 \alpha_n (B_{nk}^*)^{-1} \beta_k^* \\ \epsilon f_0 \beta_n (A_{nk}^*)^{-1} \alpha_k^* & \epsilon \zeta_n \alpha_n (A_{nk}^*)^{-1} \alpha_k^* \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Для определения функций α_n, β_n перейдем к пределу $\zeta \rightarrow \zeta_n$ в линейных системах (16), (28):

$$\partial_x (C_N A_n J_0(\zeta_n)) = L C_N A_n J_0(\zeta_n), \quad (59)$$

$$\partial_t (C_N A_n J_0(\zeta_n)) = A C_N A_n J_0(\zeta_n). \quad (60)$$

Поскольку $\det A_n = 0$, находим, что

$$\{\beta_n, \alpha_n\} J_0(\lambda_n) = \{b_n, a_n\}, \quad (61)$$

где a_n, b_n — произвольные константы, задаваемые начально-краевыми условиями. Без потери общности достаточно найти

$$\rho_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{J_{12}^{(0)} - J_{11}^{(0)} r_n}{\epsilon J_{12}^{(0)*} + J_{11}^{(0)*} r_n}, \quad (62)$$

где $r_n = b_n/a_n$ и $J_{ij}^{(0)}$ — элементы матрицы J_0 .

Преобразование решения Йоста, относящегося к $N-1$ -солитонному решению, в решение G_N , отвечающее N -солитонному решению, удовлетворяет системе уравнений

$$\partial_x G_N = L_N G_N - G_N L_{N-1}, \quad (63)$$

$$\partial_t G_N = A_N G_N - G_N A_{N-1}. \quad (64)$$

Повторяя это преобразование, получаем уравнения, связывающие G_N и G_0 . Переходя к пределу $\zeta \rightarrow \pm f$ в уравнении (63), находим в итоге связь между N -солитонным ($2N$ -полюсным) решением \mathbf{V}_N и исходным решением \mathbf{V}_0 :

$$(\mathbf{V}_N \cdot \boldsymbol{\sigma}) = C_N H_N(\pm f) (\mathbf{V}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}) H_N^{-1}(\pm f) C_N^{-1}. \quad (65)$$

6. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Для начально-краевых условий $U(0, \tau) = 0$, $S(0, \chi) = 0$ с точностью до сдвигов переменных находим

$$J_0(\zeta, u, \chi) = e^{\sigma_3 \Theta}, \quad (66)$$

где

$$\Theta = \frac{-i\epsilon}{f^2 - \zeta^2} \left[u - \frac{f^2 + \zeta^2}{f^2 - \zeta^2 + 2\epsilon} \int_{-\infty}^x S_3(0, s) ds \right]. \quad (67)$$

Найдем решения для $N = 1$. Используя (58), (65), находим для $\epsilon = 1$

$$V_3 = 1 - \frac{16f^2\eta^2\xi^2}{[(f - \xi)^2 + \eta^2][(f + \xi)^2 + \eta^2] [-\eta^2 + \xi^2 + (\eta^2 + \xi^2) \text{ch}(4\theta)]}, \quad (68)$$

$$V = \frac{2f\xi e^{-2\theta - 2i\psi} \{ \eta e^{4\theta} (\eta - i\xi) [f^2 + (\eta + i\xi)^2] - \eta (\eta + i\xi) [f^2 + (\eta - i\xi)^2] \}}{[(f - \xi)^2 + \eta^2][(f + \xi)^2 + \eta^2] [\xi \text{ch}(2\theta z) + i\eta \text{sh}(2\theta)]^2}; \quad (69)$$

и для $\epsilon = 1$

$$V_3 = 1 + \frac{16f^2\eta^2\xi^2}{[(f - \xi)^2 + \eta^2][(f + \xi)^2 + \eta^2][(\eta^2 + \xi^2) \text{ch}(4\theta) + \eta^2 - \xi^2]}, \quad (70)$$

$$V = \frac{16f\eta\xi e^{4\theta - 2i\psi} [\eta \text{ch}(2\theta) (f^2 + \eta^2 + \xi^2) + i\xi \text{sh}(2\theta) (-f^2 + \eta^2 + \xi^2)]}{[(f - \xi)^2 + \eta^2][(f + \xi)^2 + \eta^2] [e^{4\theta} (\eta - i\xi) + \eta + i\xi]^2}. \quad (71)$$

Здесь $\theta = \text{Im } \Theta$, $\psi = \text{Re } \Theta$.

Зависимость E от τ представлена в неявном виде:

$$U(\tau) = \frac{V(u)}{V_3(u)}, \quad \tau = \tau_0 + \int_{-\infty}^u V_3(\chi, u') du'. \quad (72)$$

На рис. 2 и 3 показаны формы импульсов для разных значений f .

Для исследования новых механизмов управления импульсами поля в невязимных системах рассмотрим случай ненулевого пьедестала фонового решения $U_0 \neq 0$, $S(\chi) = 0$, $S_3(\chi) = \text{const}$. Простейшее решение отвечает вращающейся поляризации поля в волноводе:

$$U_b(z) = U_0 e^{-2i\Theta_0 z/v}. \quad (73)$$

В рамках приближения однонаправленного распространения (7) $U_b(z) = U_b(v\tau)$, где v — фазовая скорость поля в волноводе. Решение линейных систем (16), (28) имеет вид

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \{1, \sqrt{\epsilon}\} e^{\sigma_3(\theta + i\psi)}, \quad (74)$$

где $\theta = \text{Im } \Theta_0$, $\vartheta = -\text{Re } \Theta_0$,

$$\Theta_0 = \frac{\epsilon}{f^2 - \zeta^2} \left[(G_0 + \sqrt{-\epsilon} U_0 \zeta) u - S_3 \left(\frac{f^2 + \zeta^2}{f^2 - \zeta^2 + 2\epsilon} - \sqrt{-\epsilon} \zeta U_0 \right) \chi \right], \quad (75)$$

$$U_0 = E_0/\sqrt{c}.$$

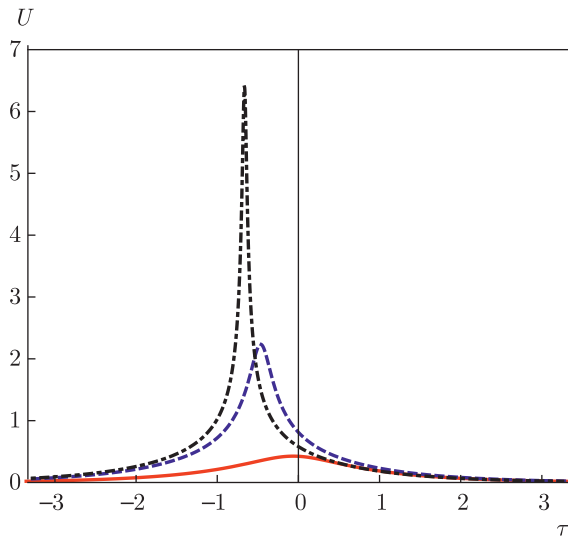


Рис. 2. Форма солитонов для $\epsilon = 1, \eta = 1, \xi = 1$ и нулевого пьедестала в безразмерных переменных. Значения $f = 0.2, 0.55, 0.666$ отвечают сплошной (красной), штриховой (синей) и штрихпунктирной (черной) линиям соответственно

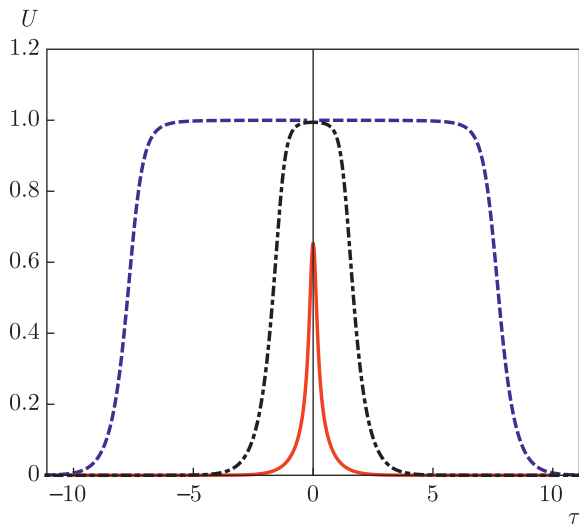


Рис. 3. Форма солитонов для $\epsilon = -1, \eta = 0.2, \xi = 1.5$ и нулевого пьедестала в безразмерных переменных. Значения $f = 0.2, 0.666, 1$ отвечают сплошной (красной), штриховой (синей) и штрихпунктирной (черной) линиям соответственно

Решение для $V_3 = Y_-/Z_1, V = X_-/Z_2, F = U_0 f, G_- = \sqrt{1 + f^2 U_0^2}$ и $\epsilon = -1$ имеет вид

$$Y_- = 2e^{4\theta} \left\{ 8fF\eta\xi [\xi \sin(4\psi) (\eta^2 + \xi^2 - f^2) \operatorname{sh}(2\theta) - \eta \cos(4\psi) (f^2 + \eta^2 + \xi^2) \operatorname{ch}(2\theta)] + G_- [f^4(\eta - \xi)(\eta + \xi) + 2f^2(\eta^4 + 6\eta^2\xi^2 + \xi^4) + (\eta - \xi)(\eta + \xi)(\eta^2 + \xi^2)^2] + G_- (\eta^2 + \xi^2) \times [f^4 + 2f^2(\eta - \xi)(\eta + \xi) + (\eta^2 + \xi^2)^2] \operatorname{ch}(4\theta) \right\}, \quad (76)$$

$$Z_1 = ((f - \xi)^2 + \eta^2) ((f + \xi)^2 + \eta^2) \times [\eta^2 (e^{4\theta} + 1)^2 + \xi^2 (e^{4\theta} - 1)^2]; \quad (77)$$

$$X_- = -e^{-2i\psi} \left\{ 8f^2 F \eta^2 \xi^2 e^{-4i\psi} + 4i\eta\xi (-f^2 + \eta^2 + \xi^2) \operatorname{sh}(2\theta) \times [-2fG_- \xi + F e^{4i\psi} (f^2 + \eta^2 + \xi^2) \operatorname{ch}(2\theta)] + F e^{4i\psi} [f^2(\eta + \xi) + (\eta - \xi)(\eta^2 + \xi^2)] \times [f^2(\eta - \xi) + (\eta + \xi)(\eta^2 + \xi^2)] \operatorname{ch}(4\theta) - 8f\eta^2 G_- \xi (f^2 + \eta^2 + \xi^2) \operatorname{ch}(2\theta) + F e^{4i\psi} (\eta^2 + \xi^2) ((f - \xi)^2 + \eta^2) ((f + \xi)^2 + \eta^2) \right\}, \quad (78)$$

$$Z_2 = 2 [f^4 + 2f^2(\eta - \xi)(\eta + \xi) + (\eta^2 + \xi^2)^2] \times (\eta \operatorname{ch}(2\theta) - i\xi \operatorname{sh}(2\theta))^2. \quad (79)$$

Решение для $V_3 = X_+/Z_3, V = Y_+/Z_4, G_+ = \sqrt{1 - f^2 U_0^2}, \epsilon = 1$ записывается как

$$Y_+ = G [f^4 (\xi^2 - \eta^2) - 2f^2 (\eta^4 + 6\eta^2\xi^2 + \xi^4) - (\eta^2 - \xi^2) (\eta^2 + \xi^2)^2] + G (\eta^2 + \xi^2) \operatorname{ch}(4\theta) \times ((f - \xi)^2 + \eta^2) ((f + \xi)^2 + \eta^2) + 8f\eta H \xi [\eta \operatorname{sh}(2\theta) \cos(4\psi) (f^2 + \eta^2 + \xi^2) - \xi \operatorname{ch}(2\theta) \sin(4\psi) (-f^2 + \eta^2 + \xi^2)], \quad (80)$$

$$Z_3 = 2 [f^4 + 2f^2(\eta - \xi)(\eta + \xi) + (\eta^2 + \xi^2)^2] \times [\eta^2 \operatorname{sh}^2(2\theta) + \xi^2 \operatorname{ch}^2(2\theta)], \quad (81)$$

$$X_+ = e^{-2i\psi} \left\{ -H\xi^2 e^{4i\psi} \operatorname{ch}^2(2\theta) (f^4 + (\eta^2 + \xi^2)^2) - 4f^2 \eta^2 H \xi^2 e^{-4i\psi} - 4f\eta^2 G \xi \operatorname{sh}(2\theta) (f^2 + \eta^2 + \xi^2) - 2i\eta\xi \operatorname{ch}(2\theta) [2fG\xi (-f^2 + \eta^2 + \xi^2) + H e^{4i\psi} \operatorname{sh}(2\theta) (f^4 - (\eta^2 + \xi^2)^2)] + H e^{4i\psi} [\eta^2 \operatorname{sh}^2(2\theta) (f^4 + (\eta^2 + \xi^2)^2) + f^2 (-\eta^4 + \xi^4 + (\eta^2 + \xi^2)^2 \operatorname{ch}(4\theta z))] \right\}, \quad (82)$$

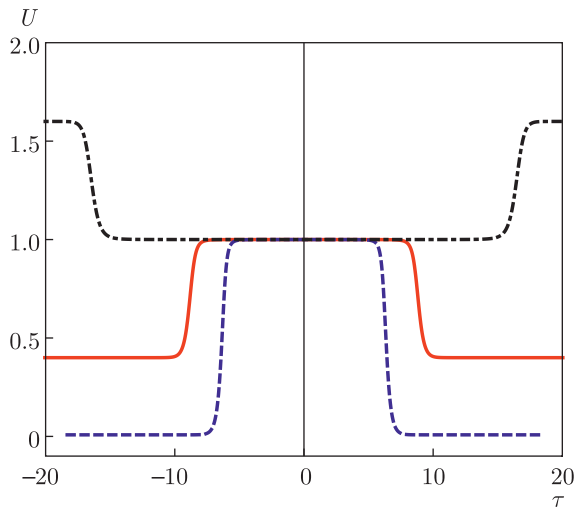


Рис. 4. Форма солитонов для $\epsilon = -1$, $\eta = 0.2$, $\xi = 1.5$, $f = 1.5$ и ненулевого пьедестала в безразмерных переменных. Графики для $U_0f = 0.5, 0, 2$ показаны сплошной (красной), штриховой (синей) и штрихпунктирной (черной) линиями соответственно

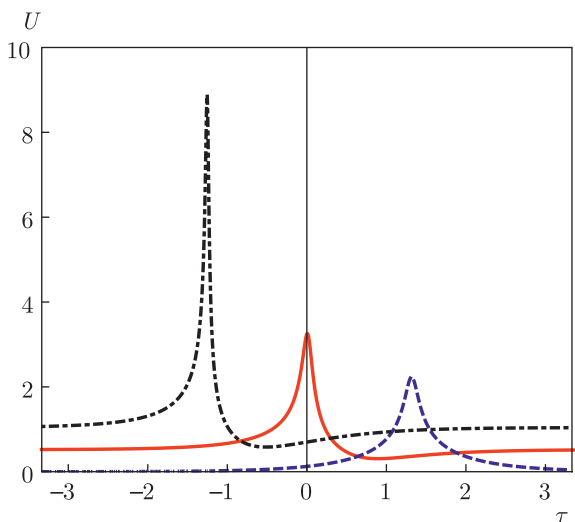


Рис. 5. Форма солитонов для $\epsilon = 1$, $\eta = 1$, $\xi = 1$, $f = 0.55$ и ненулевого пьедестала в безразмерных переменных. Графики для $U_0f = 0.5, 0, 1$ показаны сплошной (красной), штриховой (синей) и штрихпунктирной (черной) линиями соответственно

$$Z_4 = f^4 + 2f^2(\eta^2 - \xi^2) + (\eta^2 + \xi^2)^2. \quad (83)$$

Формы солитонов для различных значений амплитуды поля фона U_0 показаны на рис. 4 и 5. Обнаружено, что в случае $\epsilon = 1$ увеличение $|U_0|$ приводит к значительному росту амплитуды импульса. В случае $\epsilon = -1$ рост $|U_0|$ приводит к увеличению ширины как светлого, так и темного импульсов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интегрируемая система уравнений (12)–(14), описывающая невзаимное распространение электромагнитных импульсов в нелинейной среде, выведена с использованием приближения однопольного распространения. Это приближение позволяет использовать РУМБ для моделирования процессов, происходящих на расстояниях порядка длины волны. Пространственная анизотропия в исследуемой системе — следствие спирального положения ДУС вокруг волновода. Эффект невзаимного распространения возникает из-за локальной анизотропии и взаимодействия импульса поля с наведенной поляризацией ДУС. При выводе уравнений для сохранения полной интегрируемости члены дисперсии второго порядка в правых частях уравнений (5) ($\propto \partial_z^2 \mathbf{P}_\perp$) были отброшены. Эти члены возникают из-за ДДВ в приближении сильной связи. Ими можно пренебречь при условии, что $\partial_z \ll 2T_h$ или $2\lambda_{light} \gg \mathcal{L}$, где λ_{light} — длина волны света, соответствующая энергии перехода ДУС. Последнее неравенство означает, что количество спиральных колец, расположенных на расстоянии длины волны, больше единицы. Таким образом, интегрируемая система РУМБ может быть использована для анализа экситонных возбуждений в спиральных молекулах. Эффекты, связанные с хиральностью длинных молекулярных систем, состоящих из молекул белка или ДНК, изучены недостаточно полно. В то же время их роль важна при описании спинтроники и близких явлений. Сложные молекулярные среды, такие как J -агрегаты красителей, могут образовывать длинные пучки из нитей, закрученных в виде спирали вокруг оси [28]. Приближения двухуровневых сред нередко используются для описания возбуждений в агрегатах на масштабах порядка длины волны. Эволюция экситонных импульсов в такой среде может также быть описана в рамках близкой модели.

Как показано в настоящей работе, хиральность среды может критическим образом влиять на форму и динамику импульсов поля. Анализ полученных решений показал, что формой импульсов можно управлять, создавая фоновое поле U_0 , т.е. основание, на фоне которого импульсы распространяются. Решения идеализированной модели хиральной нелинейной среды, изученные в настоящей работе, демонстрируют дополнительные возможности управления импульсами, которые дают искривленные и хиральные среды вместо прямолинейных.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке базового бюджета Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley-Interscience (2007).
2. V. N. Konotop, J. Yang, and D. A. Zezyulin, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 035002 (2016), <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.035002>.
3. C. Caloz, A. Alú, S. Tretyakov, D. Sounas, K. Achouri, and Z.-L. Deck-Léger, *Phys. Rev. Appl.* **10**, 047001 (2018), DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.10.047001>.
4. M. Scalora, J. P. Dowling, C. M. Bowden, and M. J. Bloemer, *J. Appl. Phys.* **76**, 2023 (1994), DOI: [10.1103/PhysRevLett.73.1368](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.1368).
5. M. D. Tocci, M. J. Bloemer, M. Scalora, J. P. Dowling, and C. M. Bowden, *Appl. Phys. Lett.* **66**, 2324 (1995), <https://doi.org/10.1063/1.113970>.
6. V. A. Fedotov, P. L. Mladyonov, S. L. Prosvirnin, A.V. Rogacheva, Y. Chen, and N. I. Zheludev, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 167401–4 (2006), DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.167401V>.
7. I. V. Shadrivov, V. A. Fedotov, D. Powell, Y. S. Kivshar, and N. I. Zheludev, *New J. Phys.* **13**, 033025 (2011), DOI:[10.1088/1367-2630/13/3/033025](https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/3/033025).
8. C. Menzel, C. Helgert, C. Rockstuhl, E.-B. Kley, A. Tunnermann, T. Pertsch, and F. Lederer, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 253902–4 (2010), DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.253902>.
9. K. Gallo, G. Assanto, K. R. Parameswaran, and M. M. Fejer, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 314 (2001), <https://doi.org/10.1063/1.1386407>.
10. M. W. Feise, I. V. Shadrivov, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. E* **71**, 037602 (2005), <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.193903>.
11. F. Biancalana, *J. Appl. Phys.* **104**, 093113 (2008), <https://doi.org/10.1063/1.3010299>.
12. M. Krause, H. Renner, and E. Brinkmeyer, *Electron. Lett.* **44**, 691 (2008), DOI: [10.1049/el:20080791](https://doi.org/10.1049/el:20080791).
13. V. Grigoriev and F. Biancalana, *Opt. Lett.* **36**, 2131 (2011), <https://doi.org/10.1364/OL.36.002131>.
14. C. G. Poulton, R. Pant, A. Byrnes, S. Fan, M. J. Steel, and B. J. Eggleton, *Opt. Express* **20**, 21235 (2012), <https://doi.org/10.1364/OE.20.021235>.
15. S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*, Springer-Verlag, Berlin (1984).
16. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999), DOI:[10.1007/978-94-017-2448-7](https://doi.org/10.1007/978-94-017-2448-7).
17. A. A. Zabolotskii, *Eur. Phys. J. Special Topics* **173**, 193 (2009), <https://doi.org/10.1140/epjst/e2009-01074-x>.
18. G. L. Lamb, Jr., *Rev. Mod. Phys.* **43**, 99 (1971), DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.43.99>.
19. A. A. Zabolotskii, *Phys. Rev. A* **80**, 063616 (2009), DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.063616>.
20. А. А. Заболотский, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 303 (2019).
21. J. M. Hyman, D. W. McLaughlin, and A. C. Scott, *Physica D, Nonlin. Phenom.* **3**, 23 (1981), [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(81\)90117-2](https://doi.org/10.1016/0167-2789(81)90117-2).
22. M. C. Benedict, V. A. Malyshev, E. D. Trifonov, and A. I. Zaitsev, *Phys. Rev. A* **43**, 3845 (1991).
23. C. M. Bowden and J. P. Dowling, *Phys. Rev. A* **47**, 1247 (1993), DOI: [10.1103/physreva.47.1247](https://doi.org/10.1103/physreva.47.1247).
24. Yu. B. Gaididei, K. Ø. Rasmussen, and P. L. Christiansen, *Phys. Rev. E* **52**, 2951 (1995), DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.52.2951>.
25. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **154**, 526 (2018), DOI: [10.1134/S1063776118090121](https://doi.org/10.1134/S1063776118090121).
26. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Phys. Scripta* **94**, 115206 (2019).
27. F. Wurthner, T. E. Kaiser, and Ch. R. Saha-Muller, *Angew. Chem. Int. Ed.* **50**, 3376 (2011), DOI: [10.1002/anie.201002307](https://doi.org/10.1002/anie.201002307).

28. A. V. Sorokin, A. A. Zabolotskii, N. V. Pereverzev, S. L. Yefimova, Y. V. Malyukin, and A. I. Plekhanov, *J. Phys. Chem. C* **118**, 7599 (2014), [dx.doi.org/10.1021/jp412798u](https://doi.org/10.1021/jp412798u).
29. A. V. Sorokin, A. A. Zabolotskii, N. V. Pereverzev, I. I. Bespalova S. L. Yefimova, Y. V. Malyukin, and A. I. Plekhanov, *J. Phys. Chem. C* **119**, 2743 (2015), DOI: 10.1021/jp5102626.
30. S. Sternberg, *Curvature in Mathematics and Physics*, Dover Publ., Mineola, New York (2012).
31. J. K. Eilbeck, *J. Phys. A: Math. Gen.* **5**, 1355 (1972), DOI: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/5/9/008>.
32. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonances and Two-Level Atoms*, Wiley and Sons, New York (1975).