

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ОГРАНИЧЕННЫХ ЦЕПОЧЕЧНЫХ СТРУКТУРАХ

*О. С. Ваулина**, *Э. А. Саметов*, *Е. А. Лисин***

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 27 января 2020 г.,
после переработки 12 февраля 2020 г.
Принята к публикации 12 февраля 2020 г.

Представлены результаты исследования спектральных характеристик стохастического движения заряженных частиц для цепочечных структур в электрическом поле ловушки. Рассмотрены характерные частоты частиц и способ их аналитического вычисления. Предложены аналитические соотношения для спектральной плотности смещений частиц, взаимодействующих с попарным потенциалом, в малоразмерных цепочечных структурах. Полученные соотношения проверены путем численного моделирования задачи.

DOI: 10.31857/S0044451020080179

1. ВВЕДЕНИЕ

Стохастическое (тепловое) движение заряженных частиц широко распространено в природе, а его изучение представляет интерес в различных областях науки и техники [1–6].

Комплексная (пылевая) плазма является ионизованным газом, содержащим заряженные частицы вещества микронных размеров (пыль) [1–3]. Экспериментальные и численные исследования стохастического движения пылевых частиц в газоразрядной плазме представлены в работах [7–13]. Обычно в центре газоразрядных камер наблюдается некоторое превышение концентрации ионов плазмы над концентрацией ее электронной компоненты [14], что приводит к формированию эффективных ловушек для отрицательно заряженных частиц пыли [1, 2]. Лабораторные эксперименты с небольшим количеством пылевых частиц позволяют проводить исследование спектров их собственных и вынужденных колебаний, изучать влияние различных внешних воздействий, а также разрабатывать новые методы диагностики и т. д. [15–22].

Подробную информацию об особенностях теплового движения взаимодействующих частиц можно получить путем анализа спектральной плотности их смещений. Спектральная плотность для случайных (тепловых) смещений частиц является косинус-преобразованием Фурье для корреляционной функции, описывающей зависимость среднего квадрата этих смещений от времени [23–25]. В отличие от других характеристик системы (параметра неидеальности, коэффициентов массопереноса и т. д.) информация о спектральной плотности тепловых смещений частиц позволяет анализировать спектр частот их собственных колебаний. Это позволяет оценить реакцию исследуемой системы на различные внешние воздействия, а также дает возможность получить информацию о потенциале межчастичного взаимодействия [7–9, 26, 27].

В настоящее время задача о спектральной плотности смещений детально рассмотрена только для случая двух взаимодействующих частиц [28, 29]. В данной работе приводятся результаты исследования спектральных характеристик для частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом, в малоразмерных цепочечных структурах. Представленные результаты могут быть полезны для экспериментального анализа характера и типа потенциала взаимодействия между пылевыми частицами в плазме.

* E-mail: olga.vaulina@bk.ru

** E-mail: ealisin@yandex.ru

Исследование взаимодействий между частицами в комплексной плазме представляет несомненный интерес [1–3]. За последние годы появилось немало работ, посвященных этому вопросу. Часть из них касается разработки экспериментальных методов определения потенциалов взаимодействия между пылевыми частицами в лабораторной плазме газовых разрядов [30–35]. Наибольшим преимуществом обладают методы, основанные на решении обратной задачи Ланжевена [34], или на анализе корреляторов смещений и скоростей частиц [35]. В отличие от других, упомянутые методы полностью учитывают диссипативные и случайные процессы. Тем не менее, и они могут давать некорректные результаты для частиц, колебания (смещения) которых искажены неучтенными регулярными и/или случайными внешними воздействиями [35].

2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим равновесную систему, состоящую из N частиц массой M_i и зарядами Q_i , взаимодействующих с потенциалом произвольной формы в линейном электрическом поле $E(r, z)$ цилиндрической ловушки с радиальной составляющей $E_r = \beta^r r$ и вертикальной составляющей $E_z = E_z^0 + \beta^z z$. Здесь $r \equiv \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$ — радиальная координата, z — вертикальная координата по оси z в направлении силы тяжести, β^r и β^z — величины градиентов электрического поля, а значение E_z^0 определяется балансом сил, действующих в системе.

В предположении, что смещение ξ_i частиц, где $i = 1, 2, \dots, N$, от их положения равновесия под действием некоторой случайной силы F_{bi} ограничено малыми отклонениями, систему линеаризованных уравнений движения в выбранном направлении для каждой из степеней свободы можно записать в общем виде:

$$M_i \frac{dV_i}{dt} = -\nu_i M_i V_i - Q_i \beta^{r(z)} \xi_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ji} (\xi_i - \xi_j) + F_{bi}. \quad (1)$$

Здесь ν_i — коэффициент трения i -й частицы за счет ее столкновений с нейтралами окружающего газа, $V_i = d\xi_i/dt$ — скорость i -й частицы на одну степень свободы, F_{bi} — сила Ланжевена, являющаяся источником стохастической кинетической энергии частиц, а коэффициенты b_{ij} зависят от физики решаемой задачи (для попарного взаимодействия $b_{ij} \equiv b_{ji}$) и рассматриваемой степени свободы смещений частиц.

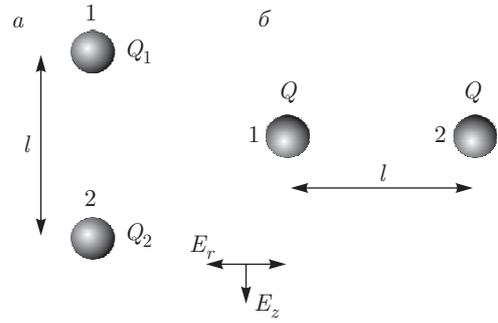


Рис. 1. Вертикальная (а) и горизонтальная (б) конфигурации двух взаимодействующих частиц в электрическом поле ловушки $E = E(z, r)$ с цилиндрической симметрией

Основные гармоники для системы (1) (ее характерные частоты) можно найти путем решения характеристического уравнения

$$f(\lambda) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0,$$

где n определяется числом N взаимодействующих частиц [36]. Если корни этого уравнения имеют положительную действительную часть, то решение системы (1) является неустойчивым. Задача об устойчивом положении двух идентичных частиц, взаимодействующих с различными типами потенциалов, в электрическом поле ловушки рассматривалась в работах [20, 21, 37, 38], где было показано, что вертикальная конфигурация частиц наблюдается при $\beta^r > \beta^z$, в обратном случае ($\beta^r < \beta^z$) формируется их горизонтальная конфигурация, см. рис. 1. Критерии устойчивости для малоразмерных кластерных систем, включающих до пяти заряженных частиц ($2 \leq N \leq 5$), подробно рассмотрены в работе [38].

Спектральные характеристики частиц для системы (1) при $F_{bi} = 0$, такие как их характерные частоты ω_i и спектральные плотности смещений G_i могут быть получены численно на основе существующих пакетов математического моделирования. Практически все современные программные пакеты имеют встроенные функции символьных вычислений и позволяют получить конечный результат в виде формул для ω_i и G_i , которые являются математически решениями задачи и не несут какого-либо физического смысла. Кроме того, такие формулы имеют весьма громоздкий вид и занимают со всеми входящими в них коэффициентами от двух (для $N = 3$) и более (при $N > 3$) страниц текста. Таким образом, упомянутые соотношения являются малоэффективными для практического использования, включая анализ и/или обращение данных численных и лабораторных экспериментов.

Способ простого аналитического решения задачи для малоразмерных цепочек частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом, описан в следующих разделах работы.

3. СЛУЧАЙ ДВУХ ЧАСТИЦ

В начале раздела отметим, что большинство экспериментов в пылевой плазме проводятся для монодисперсных частиц, когда различием между их массами и размерами (соответственно, между коэффициентами трения) можно пренебречь: $M_i \cong M$, $\nu_i \cong \nu$ [1–3].

Рассмотрим систему линеаризованных уравнений движения, описывающих отклонения двух заряженных частиц (равных масс M и размеров), взаимодействующих с потенциалом произвольной формы, от их положения равновесия $\xi_{1(2)}$ под действием случайной силы $F_{b1(2)}$:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = -\nu \frac{d\xi_1}{dt} + a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \frac{F_{b1}}{M}, \quad (2a)$$

$$\frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = -\nu \frac{d\xi_2}{dt} + a_{22}\xi_2 + a_{21}\xi_1 + \frac{F_{b2}}{M}. \quad (2b)$$

Для попарного взаимодействия $a_{12} \equiv a_{21}$. Случай $a_{11} \neq a_{22}$ может реализоваться для пылевых частиц в лабораторной плазме даже для их попарного взаимодействия, например, из-за различия их зарядов или отличия градиентов внешнего поля в точке равновесного положения частиц. Такие условия могут возникать за счет пространственных изменений параметров окружающей плазмы (например, концентраций и температур ионов/электронов).

Здесь мы рассмотрим вертикальную конфигурацию частиц, рис. 1а. (Отметим, что все решения для горизонтальной конфигурации частиц при их попарном взаимодействии и $Q_{1(2)} \equiv Q$, см. рис. 1б, будут аналогичными [28].)

Для поиска корреляторов скоростей и смещений частиц в системе (2а), (2б) отметим, что корреляторы случайной силы $F_{b1(2)}$ подчиняются уравнениям $\langle F_{b1} \rangle = \langle F_{b2} \rangle \equiv 0$, $\langle F_{b1} F_{b2} \rangle = 0$, $\langle F_{b1} V_2 \rangle = \langle F_{b2} V_1 \rangle \equiv 0$, $\langle F_{b1} \xi_2 \rangle = \langle F_{b2} \xi_1 \rangle \equiv 0$, $\langle F_{b1} \xi_1 \rangle = \langle F_{b2} \xi_2 \rangle \equiv 0$. Здесь и далее угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение по времени при $t \rightarrow \infty$. При движении частиц

по ограниченными траекториям $\langle \xi_1 V_1 \rangle = \langle \xi_2 V_2 \rangle \equiv 0$, $\langle V_{1(2)} F_{b1(2)} \rangle = \nu T_{1(2)}^0$, где $T_{1(2)}^0$ — температура тепловых источников [28, 29]. Тогда уравнения для корреляторов скоростей и смещений частиц можно представить в виде [39, 40]

$$-\frac{\nu \delta T_{1(2)}}{M} + a_{12(21)} \langle V_{1(2)} \xi_{2(1)} \rangle = 0, \quad (3a)$$

$$a_{11(22)} \langle (\xi_{1(2)})^2 \rangle + a_{12(21)} \langle \xi_1 \xi_2 \rangle + \frac{T_{1(2)}}{M} = 0, \quad (3b)$$

$$-\nu \langle V_{1(2)} \xi_{2(1)} \rangle + a_{11(22)} \langle \xi_1 \xi_2 \rangle + a_{12(21)} \langle (\xi_{2(1)})^2 \rangle + \langle V_1 V_2 \rangle = 0, \quad (3c)$$

$$-2\nu \langle V_1 V_2 \rangle + (a_{11} - a_{22}) \langle \xi_1 V_2 \rangle = 0, \quad (3d)$$

где $T_{1(2)} = M \langle V_{1(2)}^2 \rangle$ — кинетическая температура частиц (удвоенная кинетическая энергия их стохастического движения на одну степень свободы) для равновесного состояния системы, а $\delta T_{1(2)} = T_{1(2)}^0 - T_{1(2)}$ — приращение кинетической температуры в процессе установления равновесия. При численном моделировании задачи температура тепловых источников, $T_{1(2)}^0$, соответствует их заданной/начальной температуре, т. е. температуре термостата.

Решение системы (3а)–(3д) дает уравнения энергетического баланса для двух взаимодействующих частиц, которые описывают перераспределение стохастической кинетической энергии между этими частицами при $T_1^0 \neq T_2^0$ [28] или «подкачку» энергии для случая непопарного взаимодействия частиц [39, 40]:

$$\delta T_{1(2)} = \pm \frac{2a_{12(21)}(T_1^0 a_{21} - T_2^0 a_{12})}{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} - 2\nu^2(a_{11} + a_{22})}, \quad (4a)$$

где знак «плюс» для δT_2 , а знак «минус» для δT_1 . Уравнение баланса (4а) согласуется со всеми ранее полученными результатами для любых взаимодействий между двумя частицами системы [28, 39, 40].

Решение системы (3а)–(3д) позволяет также получить соотношения для корреляторов скоростей и смещений частиц, которые необходимы для поиска спектральных плотностей:

$$\langle V_1 V_2 \rangle = \frac{(a_{11} - a_{22})(T_1 a_{21} - T_2 a_{12})}{M \{(a_{11} - a_{22})^2 - 2\nu^2(a_{11} + a_{22})\}}, \quad (4b)$$

$$\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle = -\frac{(a_{22(11)}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})T_{1(2)} + a_{12}^2 T_{2(1)} - 2a_{12(21)}a_{22(11)}M \langle V_1 V_2 \rangle}{(a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})M}. \quad (4c)$$

Перейдем к определению спектральных характеристик рассматриваемой системы. Еще раз отметим, что $\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle$ (4с) описывает отклонения частиц от их равновесного положения при $t \rightarrow \infty$. При вычислениях спектральной плотности обычно используют преобразование Фурье для среднеквадратичного отклонения частиц от их начального положения: $\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle_t = \langle (\xi_{1(2)}(t) - \xi_{1(2)}(0))^2 \rangle_t$, где угловые скобки $\langle \dots \rangle_t$ обозначают усреднение по всем отрезкам времени равным t ; при $t \rightarrow \infty$: $\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle_{t \rightarrow \infty} \equiv 2 \langle \xi_{1(2)}^2 \rangle$ [6, 23–25].

Корни характеристического уравнения для задачи (2а), (2б) можно записать как [28, 36]

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\nu}{2} \pm \left(\frac{\nu^2}{4} - \omega_1^2 \right)^{1/2}, \quad (5a)$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{\nu}{2} \pm \left(\frac{\nu^2}{4} - \omega_2^2 \right)^{1/2}, \quad (5b)$$

где $\omega_1^2 = -(a_{11} + a_{22})/2 - d$, $\omega_2^2 = -(a_{11} + a_{22})/2 + d$, $d = ((a_{11} - a_{22})^2/4 + a_{12}a_{21})^{1/2}$.

Любое решение для рассматриваемой здесь задачи $(\xi_i(t), \xi_i(t)^2, \langle \xi_i^2 \rangle_t; i = 1, 2)$ можно представить в виде суперпозиции [28, 36]:

$$\Phi(t) = C_0 + \sum_{k=1}^4 C_k \exp(\lambda_k t), \quad (6)$$

где коэффициенты C_k ($k = 0 \div 4$) вычисляются для условий конкретной задачи. Так, при определении $\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle_t$ величина $C_0 \equiv A_1 = \langle \xi_{1(2)}^2 \rangle_{t \rightarrow \infty} \equiv 2 \langle \xi_{1(2)}^2 \rangle$, а для поиска значений C_k ($k = 1 \div 4$) используют начальные условия $\Phi(0) = 0$, $d\Phi(0)/dt = 0$, $d^2\Phi(0)/dt^2 \equiv A_2 = 2T_{1(2)}/M$, $d^3\Phi(0)/dt^3 \equiv A_3 = 2\nu T_{1(2)}^0/M$ [6, 23]. Таким образом, для коэффициентов C_k имеет место следующая система уравнений [28]:

$$C_1 = -\frac{A_3 + A_2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - A_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}, \quad (7a)$$

$$C_2 = \frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) - A_1\lambda_1\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}, \quad (7b)$$

$$C_3 = -\frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4) - A_1\lambda_1\lambda_2\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}, \quad (7c)$$

$$C_4 = \frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - A_1\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)}. \quad (7d)$$

С учетом корней характеристического уравнения (5а), (5б) и уравнений баланса энергии (4а) в рассматриваемой системе фурье-преобразование функции $\Phi(t)$ дает для спектральной плотности смещений частиц, $G_{1(2)} = G_{1(2)}(\omega)$, соотношение

$$G_{1(2)} = \frac{2\nu \left\{ T_{1(2)}^0 ((\omega^2 + a_{22(11)})^2 + \nu^2\omega^2) + T_{2(1)}^0 a_{12(21)}^2 \right\} / M}{\{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4\} \{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_2^2)\omega^2 + \omega_2^4\}}. \quad (8)$$

Аналогичное соотношение было получено ранее в работе [29] независимым спектральным методом. Численное моделирование спектральных плотностей для смещений частиц, выполненное для попарных потенциалов ($a_{12} \equiv a_{21}$) [28], показывает хорошее согласие с формулой (8).

В случае попарного взаимодействия между частицами ($a_{12} \equiv a_{21} = b$, $a_{11} = a_1$, $a_{22} = a_2$) для их вертикальных смещений, $\xi_{1(2)} = \delta z_{1(2)}$, величины $a_{1(2)} = -(Q_{1(2)}\beta^z - F')/M$ и $b = -F'/M$, где F' — производная силы F взаимодействия между двумя частицами в направлении оси z . Для радиальных смещений частиц, $\xi_{1(2)} = \delta r_{1(2)}$, величины $a_{1(2)} = -(Q_{1(2)}\beta^r - F/l)/M$ и $b = F/lM$, где l — расстояние между частицами. При этом соотношение (8) может быть представлено в виде суперпозиции спектральных плотностей для двух классических осцилляторов $S_i = S_i(\omega, \nu, \omega_i)$:

$$G_{1(2)} = B_{1(2)} \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4} + B_{2(1)} \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_2^2)\omega^2 + \omega_2^4} = B_{1(2)} S_1 + B_{2(1)} S_2, \quad (9)$$

где $B_1 = 0.5 + (a_1 - a_2)/4d$, $B_2 = 0.5 - (a_1 - a_2)/4d$. Отсюда легко заметить, что $G_1 + G_2 \equiv S_1 + S_2$. Тогда для двух идентичных частиц $G_1(\omega) \equiv G_2(\omega) = G(\omega)$ получим [28]

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^2 \frac{\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_i^2)\omega^2 + \omega_i^4} \equiv \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} S_i. \quad (10)$$

Для одной частицы ($N = 1$) в ловушке получим формулу для классического осциллятора в виде

$$G_1(\omega) = \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4}, \quad (11)$$

где $\omega_1^2 = (\omega_i^{z(r)})^2 \equiv Q\beta^{z(r)}/M$.

Нормированные спектральные плотности $G^*(\omega) = G(\omega)/B$, $S_1^*(\omega) = S_1(\omega)/B$ и $S_2^*(\omega) = S_2(\omega)/B$ смещений в вертикальном и радиальном направлениях для двух идентичных частиц с кулоновским взаимодействием представлены на рис. 2 при $\beta^r/\beta^z = 4$ и $\nu = 5 \text{ с}^{-1}$, когда $\omega_t^z/\nu = 2$, $\omega_t^r/\nu = 4$. Здесь и далее $B = 2T/(\omega_t^z \nu M)$, где $\omega_t = \omega_t^{z(r)} \equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$.

Следует отметить, что при $(\omega_i/\nu)^2 \gg 1$ максимумы спектральных функций $G(\omega)$, $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$ хорошо соответствуют аналитическим значениям ω_i . С уменьшением отношения ω_i/ν (например, с ростом коэффициента трения ν) максимумы упомянутых функций смещаются в сторону более низких частот [23, 28], см. рис. 3.

4. СЛУЧАИ ТРЕХ, ЧЕТЫРЕХ И ПЯТИ ЧАСТИЦ

Рассмотрим спектральные характеристики для случаев трех, четырех и пяти идентичных частиц ($Q_i = Q$, $M_i = M$, $\nu_i = \nu$), взаимодействующих с произвольной попарной силой $F_{ij} = F_{ji} \equiv F(l_{ij})$ в линейном электрическом поле $E(r, z)$ ловушки с цилиндрической симметрией (см. рис. 4); здесь $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$ и $i \neq j$. Критерии устойчивости таких систем представлены в работе [38]. В силу симметрии задачи относительно центра ловушки в этих системах функции равны $G_j(\omega) = G_i(\omega)$ для частиц j и i , которые расположены на одинаковом расстоянии от центра структуры, см. рис. 4.

Численное моделирование стохастических процессов выполнялось методом Ланжевена для идентичных частиц с равными массами, зарядами и температурой. Техника моделирования подробно описана в работах [1–3]. Шаг интегрирования составлял от $\Delta t \cong (40 \max[\omega_t^{z(r)}; \nu])^{-1}$ до $\Delta t \cong (100 \max[\omega_t^{z(r)}; \nu])^{-1}$ в зависимости от начальных условий задачи. Время расчетов t_c после установления равновесия в моделируемых системах варьировалось от $\sim 10^3 / \min[\omega_t^{z(r)}; \nu]$ до $\sim 10^4 / \min[\omega_t^{z(r)}; \nu]$; здесь $\omega_t^{z(r)} = (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$ — характерные частоты ловушки. Температура частиц в процессе моделирования не менялась, т. е. оставалась равной заданной, $T_i = T_i^0 \equiv T$.

Вычисления спектральной плотности по результатам моделирования проводились на основе численных расчетов смещений $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ для отдельных частиц системы при помощи процедуры «N-D fast Fourier transform» в пакете прикладных программ MATLAB.

Представленные аналитические соотношения для спектральной плотности смещений частиц сравнивались с результатами определения спектральной плотности, полученными путем преобразования Фурье для решений системы (1) при $F_{bi} = 0$ с помощью пакета прикладных программ MATLAB.

4.1. Три частицы

Обратимся к случаю трех частиц ($N = 3$), см. рис. 4а. В состоянии равновесия средние расстояния между двумя ближайшими частицами равны $l_{12} = l_{23} \equiv l_d$, а уравнение баланса сил дает $Q\beta^z l_d = F_{12} + F_{13}$, где $F_{12} = F_{23} \equiv F$. Исследование динамики таких частиц в цепочечной структуре сводится к анализу системы уравнений движения (1) для $i = 1, 2, 3$.

Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных: $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $\eta_2 = \xi_1 - \xi_3$, $\eta_3 = 2\xi_2 - (\xi_1 + \xi_3)$. (Здесь и далее для вертикальных смещений частиц в цепочке $\xi_i = \delta z_i$, а для их радиальных смещений $\xi_i = \delta r_i$.) С учетом указанной замены переменных преобразуем систему уравнений движения (1) для случая $F_{bi} = 0$ к виду

$$\frac{d^2 \eta_1}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_1}{dt} - \frac{Q\beta}{M} \eta_1, \quad (12a)$$

$$\frac{d^2 \eta_2}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_2}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - b_{12} - 2b_{13} \right) \eta_2, \quad (12b)$$

$$\frac{d^2 \eta_3}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_3}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 3b_{12} \right) \eta_3. \quad (12c)$$

Здесь для вертикальных смещений частиц от их положения равновесия $\beta = \beta^z$, $b_{12} = F'_{12} \equiv F'_{23} = F'$, $b_{13} = F'_{13}$, где F' — первая производная силы взаимодействия F в точке l_d и F'_{13} — первая производная силы взаимодействия F_{13} в точке $l_{13} \equiv 2l_d$. Для радиальных смещений частиц $\beta = \beta^r$, $b_{12} = F/l_d$, $b_{13} = F_{13}/2l_d$. Для систем с кулоновским взаимодействием $F = Q^2/l_d^2$, $F_{13} = Q^2/4l_d^2$, $F' = -2Q^2/l_d^3$, $F'_{13} = -Q^2/4l_d^3$.

Рассматриваемая система (12a)–(12c) имеет по три характерных частоты в вертикальном и радиальном направлениях: $\omega_1^2 = (Q\beta/M)$, $\omega_2^2 = (Q\beta/M - b_{12} - 2b_{13})$, $\omega_3^2 = (Q\beta/M - 3b_{12})$. Ее решение для $\langle \eta_k^2 \rangle$ ($k = 1, 2, 3$) с учетом $\langle \xi_i \xi_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ позволяет получить для спектральной плотности смещений отдельных частиц:

$$G_2(\omega) = \frac{S_1 + 2S_3}{3}, \quad (13)$$

$$G_1(\omega) \equiv G_3(\omega) = \frac{2G_2(\omega) - S_3 + S_2}{2}, \quad (14)$$

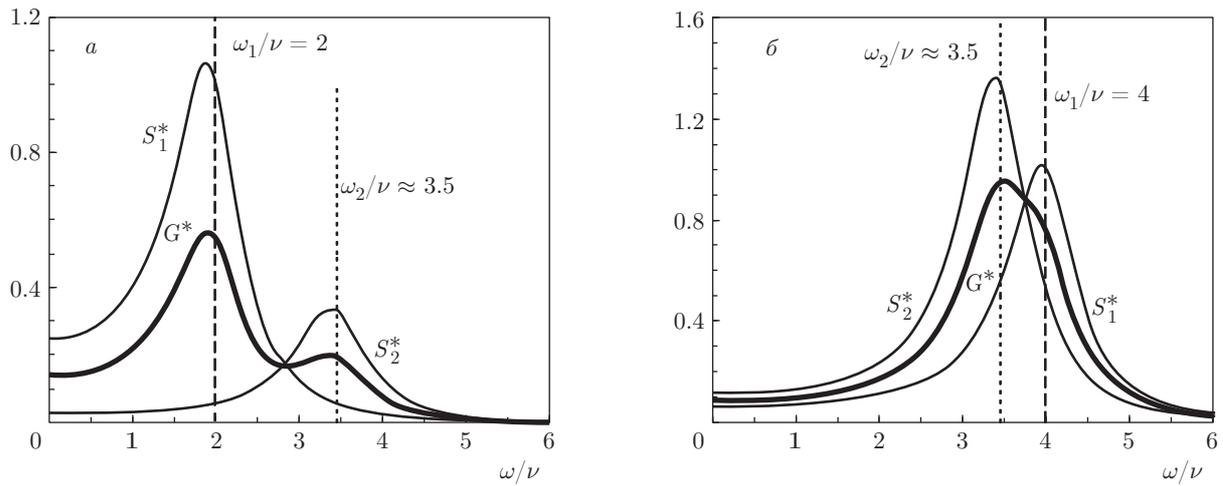


Рис. 2. Функции $G^*(\omega)$, $S_1^*(\omega)$ и $S_2^*(\omega)$ для вертикального (а) и радиального (б) направлений смещения частиц при $\beta^r/\beta^z = 4$, $\nu = 5 \text{ c}^{-1}$, $\omega_t^z/\nu = 2$ и $\omega_t^r/\nu = 4$

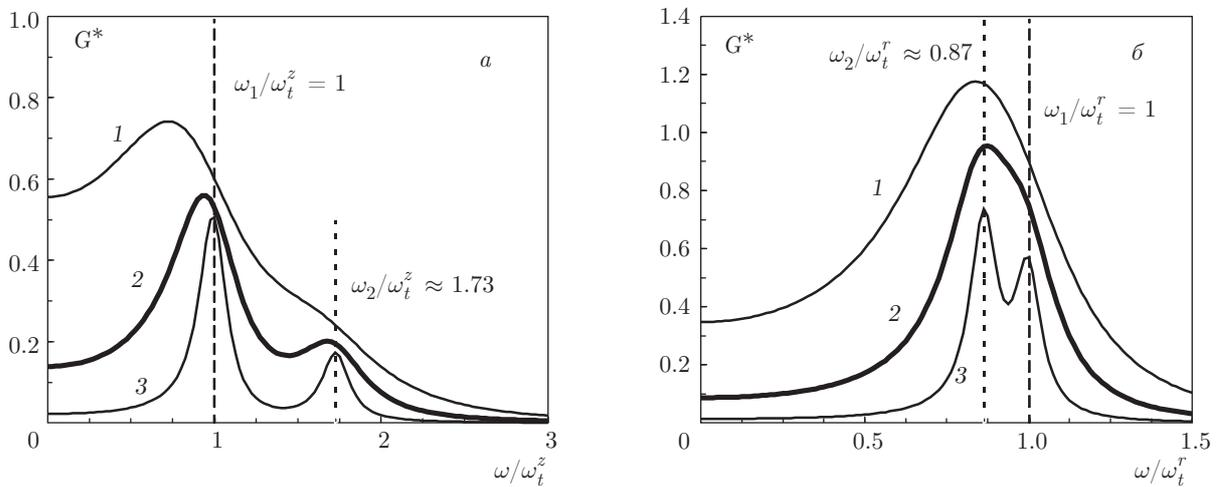


Рис. 3. Функции $G^*(\omega)$ для вертикального (а) и радиального (б) направлений смещения частиц при $\beta^r/\beta^z = 4$, $\omega_t^z = 10 \text{ c}^{-1}$, $\omega_t^r = 20 \text{ c}^{-1}$ и коэффициентах трения $\nu = 10 \text{ c}^{-1}$ (1), 5 c^{-1} (2), 2 c^{-1} (3)

где S_k — плотность классического осциллятора с частотой ω_k . Отметим, что представленные аналитические кривые полностью совпадают с результатами вычислений спектральной плотности путем преобразования Фурье для решений системы (1) при $F_{bi} = 0$.

Напомним, что спектральная плотность для смещений η_k является фурье-преобразованием функций $\langle \eta_k^2 \rangle_t$, а величина $S_{\eta k} = D_k S_k$, где коэффициент D_k определяется суммарной температурой частиц, входящих в данный коррелятор. Так, для η_1 величина $D_1 = 3$, для η_2 — $D_2 = 2$, для η_3 — $D_3 = 6$.

Нормированные спектральные плотности $S_i^*(\omega) = S_i(\omega)/B$ и $G_i^*(\omega) = G_i(\omega)/B$ для системы из трех частиц с кулоновским взаимодействием представлены соответственно на рис. 5 и рис. 6 при $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$ и $\beta^r/\beta^z = 4$.

4.2. Четыре частицы

Уравнения баланса сил для вертикальной конфигурации четырех частиц ($N = 4$), см. рис. 4б, можно записать в виде системы двух уравнений:

$$Q\beta^z(2l_o + l_d) = 2F_{s2}, \tag{15a}$$

$$Q\beta^z l_d = 2F_{s1}, \tag{15b}$$

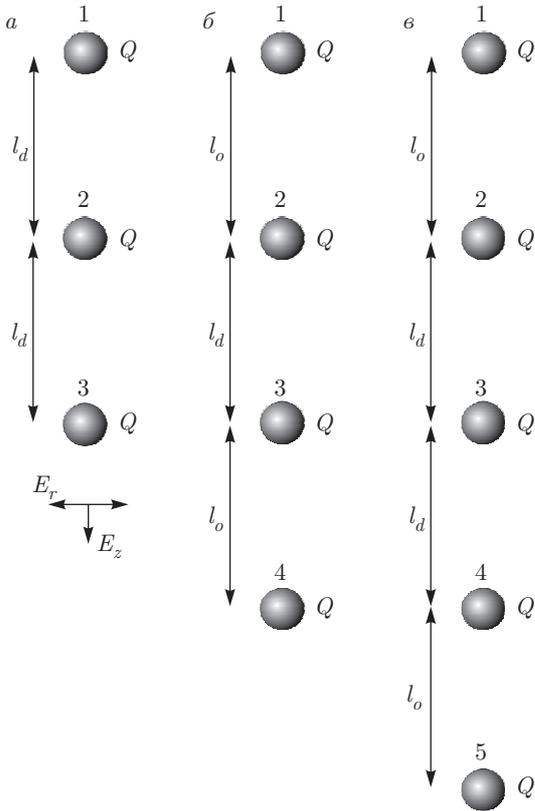


Рис. 4. Вертикальная конфигурация трех (а), четырех (б) и пяти (в) взаимодействующих частиц в электрическом поле ловушки $E = E(z, r)$ с цилиндрической симметрией

где l_d — среднее расстояние между двумя центральными частицами, l_o — среднее расстояние между двумя частицами на периферии. Здесь $F_{s1} \equiv F_{23} + F_{24} - F_{12} \equiv F_{23} + F_{13} - F_{34}$, $F_{s2} \equiv F_{13} + F_{14} + F_{12} \equiv F_{34} + F_{14} + F_{24}$, поскольку цепочка симметрична относительно центра системы. Совместное решение уравнений (15а), (15б) позволяет найти и отношение l_o/l_d , и величину градиента β^z электрического поля ловушки. Для систем с кулоновским взаимодействием

$$F_{14} = \frac{Q^2}{(l_d + 2l_o)^2}, \quad F_{23} = \frac{Q^2}{l_d^2},$$

$$F_{24} = F_{13} = \frac{Q^2}{(l_d + l_o)^2}, \quad F_{12} = F_{34} = \frac{Q^2}{l_o^2}.$$

Исследование динамики четырех частиц в цепочной структуре сводится к анализу системы уравнений (1) для $i = 1 \div 4$. Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных: $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$, $\eta_2 = (\xi_1 + \xi_4) - (\xi_2 + \xi_3)$, $\eta_3 = \xi_1 - \xi_4$, $\eta_4 = \xi_2 - \xi_3$. С учетом указанной замены преобразуем

систему уравнений движения (1) для $F_{bi} = 0$ к виду

$$\frac{d^2 \eta_1}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_1}{dt} - \frac{Q\beta}{M} \eta_1, \quad (16a)$$

$$\frac{d^2 \eta_2}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_2}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 2(b_{12} + b_{13}) \right) \eta_2, \quad (16b)$$

$$\frac{d^2 \eta_3}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_3}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 2b_{14} - b_{12} - b_{13} \right) \eta_3 + (b_{13} - b_{12}) \eta_4, \quad (16c)$$

$$\frac{d^2 \eta_4}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_4}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 2b_{23} - b_{12} - b_{13} \right) \eta_4 + (b_{13} - b_{12}) \eta_3. \quad (16d)$$

Здесь в случае вертикальных смещений частиц от их положения равновесия $\beta = \beta^z$, $b_{12} = F'_{12}$, $b_{13} = F'_{13}$, $b_{14} = F'_{14}$, $b_{23} = F'_{23}$, где F' — первая производная соответствующей силы взаимодействия, а в случае их радиальных смещений $\beta = \beta^r$, $b_{12} = F_{12}/l_o$, $b_{13} = F_{13}/(l_d + l_o)$, $b_{14} = F_{14}/(l_d + 2l_o)$, $b_{23} = F_{23}/l_d$.

Рассматриваемая система имеет по четыре характерных частоты в вертикальном и радиальном направлениях соответственно $\omega_1^2 = Q\beta/M$, $\omega_2^2 = Q\beta/M - 2(b_{12} + b_{13})$, $\omega_3^2 = (Q\beta/M - b_{14} - b_{23} - b_{12} - b_{13}) - d$, $\omega_4^2 = (Q\beta/M - b_{14} - b_{23} - b_{12} - b_{13}) + d$, где $d = \{(b_{14} - b_{23})^2 + (b_{13} - b_{12})^2\}^{1/2}$. А ее решение дает для спектральной плотности смещений частиц

$$G_1(\omega) \equiv G_4(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{S_1 + S_2}{2} + B_1 S_3 + B_2 S_4 \right), \quad (17a)$$

$$G_2(\omega) \equiv G_3(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{S_1 + S_2}{2} + B_2 S_3 + B_1 S_4 \right), \quad (17b)$$

где S_k — плотность классического осциллятора с частотой ω_k , а $B_1 = 0.5 + (b_{23} - b_{14})/4d$, $B_2 = 0.5 - (b_{23} - b_{14})/4d$, см. (9). Полученные аналитические кривые полностью совпадают с результатами вычислений спектральной плотности путем преобразования Фурье для решений системы (1) при $F_{bi} = 0$.

Нормированные спектральные плотности $G_i^*(\omega) = G_i(\omega)/B$ для системы из четырех частиц с кулоновским взаимодействием представлены на рис. 7 при $\nu = 5 \text{ с}^{-1}$ и $\beta^r/\beta^z = 9$.

В заключение данного раздела отметим, что с ростом коэффициента трения ν или радиальной частоты ловушки ω_r^2 экспериментальный анализ спек-

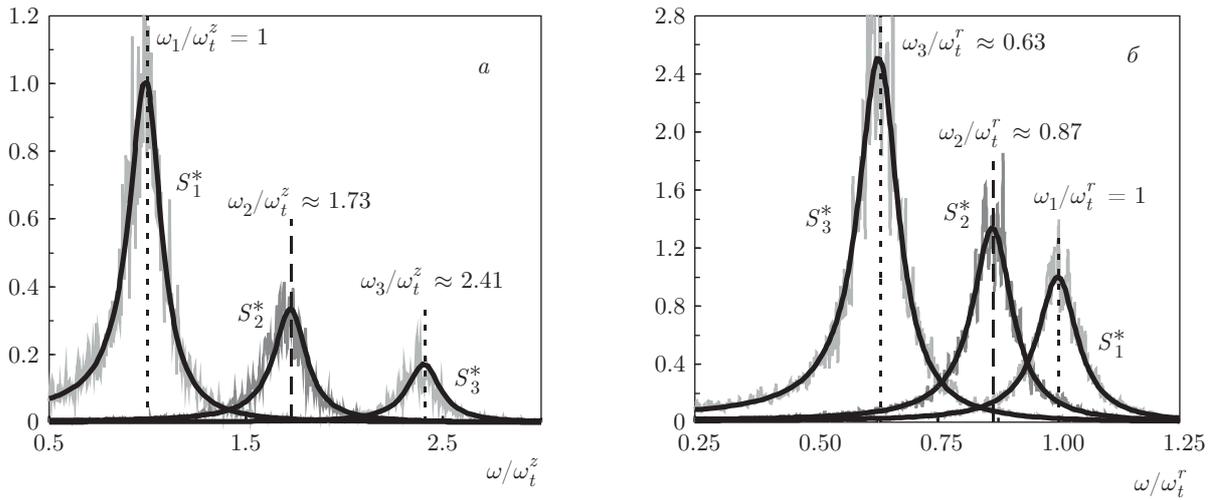


Рис. 5. Функции $S_i^*(\omega)$ для вертикальных (а) и радиальных (б) смещений частиц при $\beta^r/\beta^z = 4$, $\omega_t^z = 10 \text{ c}^{-1}$, $\omega_t^r = 20 \text{ c}^{-1}$ и $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$. Здесь $S_1^* = S_{\eta 1}^*/3$, $S_2^* = S_{\eta 2}^*/2$, $S_3^* = S_{\eta 3}^*/6$. Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми — результаты численного моделирования

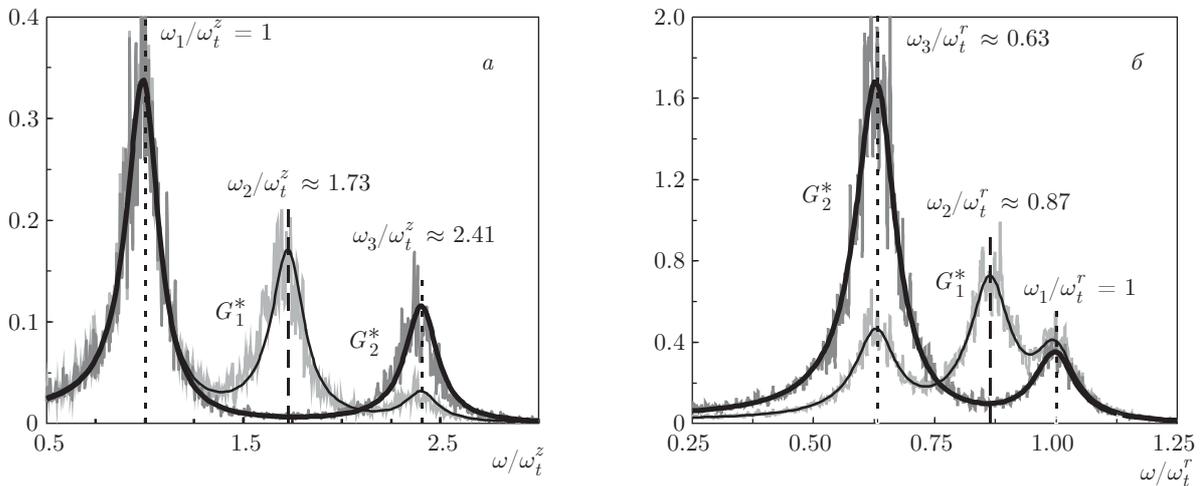


Рис. 6. Функции $G_i^*(\omega)$ для вертикальных (а) и радиальных (б) смещений частиц при $\beta^r/\beta^z = 4$, $\omega_t^z = 10 \text{ c}^{-1}$, $\omega_t^r = 20 \text{ c}^{-1}$ и $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$. Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми — результаты численного моделирования

ральной плотности смещений для отдельных частиц с целью определения основных характеристик системы (ω_k, ν) становится затруднительным, см. рис. 3, 7. Тем не менее, измерение η_k позволяет без особого труда определить и коэффициент трения ν , и основные гармоники системы ω_k . Спектральные плотности $S_{\eta k}(\omega)$ для рассматриваемых смещений η_k ($k = 1 \div 4$) связаны с функцией $S_k(\omega)$ следующими соотношениями: $S_{\eta k} = 4S_k$ для $k = 1, 2$; а сумма спектральных плотностей $S_{\eta 3} + S_{\eta 4} \equiv 2(S_3 + S_4)$, см. рис. 8.

4.3. Пять частиц

Уравнения баланса сил для вертикальной конфигурации пяти частиц ($N = 5$), см. рис. 4в, можно записать в виде системы двух уравнений:

$$Q\beta^z(l_o + l_d) = F_{s2}, \tag{18a}$$

$$Q\beta^z l_d = F_{s1}, \tag{18b}$$

где $l_d = l_{23} \equiv l_{34}$ — среднее расстояние между центральными частицами системы, а $l_o = l_{12} \equiv l_{45}$ — среднее расстояние между двумя частицами на пе-

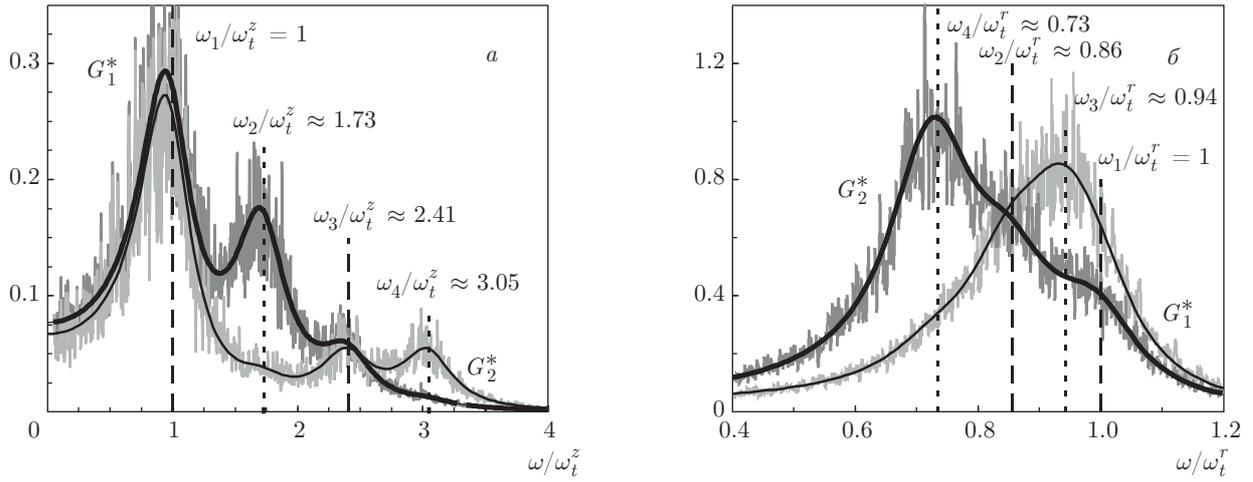


Рис. 7. Функции $G_i^*(\omega)$ для вертикальных (а) и радиальных (б) смещений частиц при $\beta^r/\beta^z = 9$, $\omega_t^z = 10 \text{ с}^{-1}$, $\omega_t^r = 30 \text{ с}^{-1}$ и $\nu = 5 \text{ с}^{-1}$. Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми — результаты численного моделирования

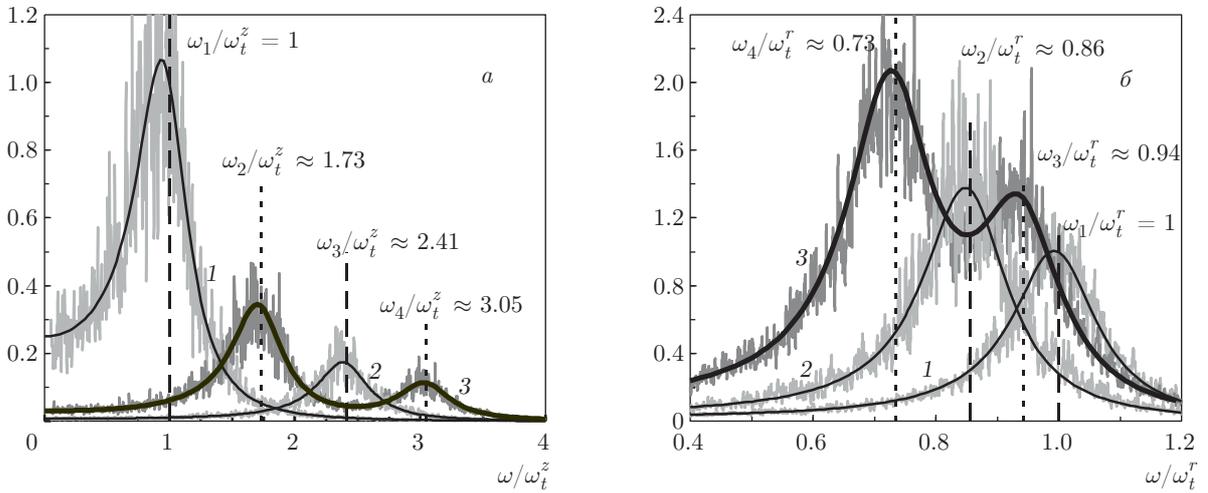


Рис. 8. Функции $S_{nk}^*(\omega) = S_{nk}(\omega)/B$ при $\beta^r/\beta^z = 9$, $\omega_t^z = 10 \text{ с}^{-1}$, $\omega_t^r = 30 \text{ с}^{-1}$ и $\nu = 5 \text{ с}^{-1}$ для вертикальных (а) и радиальных (б) смещений частиц: 1 — $S_{\eta 1}^*/4 = S_1^*$, 2 — $S_{\eta 2}^*/4 = S_2^*$, 3 — $(S_{\eta 3}^* + S_{\eta 4}^*)/2 \equiv S_3^* + S_4^*$. Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми — результаты численного моделирования

риферии. Здесь $F_{s1} \equiv F_{23} + F_{24} + F_{25} - F_{12}$, $F_{s2} \equiv F_{12} + F_{13} + F_{14} + F_{15}$. Совместное решение уравнений (18а), (18б) позволяет найти равновесные значения l_o , l_d и величину β^z . Для систем с кулоновским взаимодействием

$$F_{12} = \frac{Q^2}{l_o^2}, \quad F_{13} = \frac{Q^2}{(l_d + l_o)^2},$$

$$F_{14} \equiv F_{25} = \frac{Q^2}{(2l_d + l_o)^2}, \quad F_{15} = \frac{Q^2}{(2l_d + 2l_o)^2},$$

$$F_{23} = \frac{Q^2}{l_d^2}, \quad F_{24} = \frac{Q^2}{4l_d^2}.$$

Исследование динамики системы сводится к анализу системы уравнений (1) для $i = 1 \div 5$. Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных: $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$, $\eta_2 = \xi_1 - \xi_5$, $\eta_3 = \xi_2 - \xi_4$, $\eta_4 = 2\xi_3 - (\xi_1 + \xi_5)$, $\eta_5 = 2\xi_3 - (\xi_2 + \xi_4)$. С учетом указанной замены преобразуем систему уравнений движения (1) при $F_{bi} = 0$ к виду

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = -\nu\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{Q\beta}{M}\eta_1, \quad (19a)$$

$$\frac{d^2\eta_2}{dt^2} = -\nu\frac{d\eta_2}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 2b_{15} - b_{12} - b_{13} - b_{14}\right)\eta_2 + (b_{14} - b_{12})\eta_3, \quad (19b)$$

$$\frac{d^2\eta_3}{dt^2} = -\nu\frac{d\eta_3}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 2b_{24} - b_{12} - b_{13} - b_{14}\right)\eta_3 + (b_{14} - b_{12})\eta_2, \quad (19c)$$

$$\frac{d^2\eta_4}{dt^2} = -\nu\frac{d\eta_4}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 3b_{13} - b_{12} - b_{14}\right)\eta_4 + (2b_{23} - b_{12} - b_{14})\eta_5, \quad (19d)$$

$$\frac{d^2\eta_5}{dt^2} = -\nu\frac{d\eta_5}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 3b_{23} - b_{12} - b_{14}\right)\eta_5 + (2b_{13} - b_{12} - b_{14})\eta_4. \quad (19e)$$

В случае вертикальных смещений частиц $\beta = \beta^z$, $b_{12} = F'_{12}$, $b_{13} = F'_{13}$, $b_{14} = F'_{14}$, $b_{15} = F'_{15}$, $b_{23} = F'_{23}$, $b_{24} = F'_{24}$, где F' — первая производная соответствующей силы взаимодействия, а в случае их радиальных смещений $\beta = \beta^r$, $b_{12} = F_{12}/l_o$, $b_{13} = F_{13}/(l_d + l_o)$, $b_{14} = F_{14}/(2l_d + l_o)$, $b_{15} = F_{15}/(2l_d + 2l_o)$, $b_{23} = F_{23}/l_d$, $b_{24} = F_{24}/2l_d$.

Рассматриваемая система имеет пять характерных частот: $\omega_1^2 = Q\beta/M$, $\omega_2^2 = c_1 + d_1$, $\omega_3^2 = c_1 - d_1$, $\omega_4^2 = c_2 - d_2$, $\omega_5^2 = c_2 + d_2$. Здесь

$$c_1 = \frac{Q\beta}{M} - b_{14} - b_{15} - b_{24} - b_{12} - b_{13},$$

$$c_2 = \frac{Q\beta}{M} - b_{12} - b_{14} - \frac{3(b_{13} + b_{23})}{2},$$

$$d_1 = \{(b_{15} - b_{24})^2 + (b_{14} - b_{12})^2\}^{1/2},$$

$$d_2 = \left\{ \frac{9(b_{13} - b_{23})^2}{4} + (2b_{23} - b_{12} - b_{14})(2b_{13} - b_{12} - b_{14}) \right\}^{1/2}.$$

Нормированные спектральные плотности $G_i^*(\omega) = G_i(\omega)/B$, полученные в результате моделирования системы из пяти частиц с кулоновским взаимодействием при их смещениях в вертикальном и радиальном направлениях, представлены на рис. 9 при $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$ и $\beta^r/\beta^z = 16$. Там же показаны результаты определения спектральной плотности для системы (1) при $F_{bi} = 0$. Легко увидеть, что с ростом частоты ловушки ω_i^r экспериментальный анализ спектра частот для отдельных частиц с целью определения основных характеристик системы (ω_k, ν) становится затруднительным.

Здесь мы не приводим аналитических решений для $G_i(\omega)$, поскольку данные решения совпадают с результатами определения спектральной плотности для системы (1) при $F_{bi} = 0$ и имеют те же недостатки, которые были перечислены выше.

Необходимо отметить, что уравнение (9) не описывает решение системы (19d), (19e) для η_4 и η_5 , поскольку в ней отсутствует подкачка энергии ($\delta T_i = 0$, $T_i = T_i^0 \equiv T$). Тем не менее задачу можно решить способом, описанным в разд. 3. При этом для системы уравнений (19d), (19e) $A_3 = 12\nu T/M$, а $C_0 \equiv A_1 = 2\langle\eta_4^2\rangle$ или $C_0 \equiv A_1 = 2\langle\eta_5^2\rangle$ в зависимости от смещений «квазичастиц». (Здесь под «квазичастицей» рассматривается совокупность частиц и их взаимных смещений η_4 и η_5 .) Значения $\langle\eta_4^2\rangle$ и $\langle\eta_5^2\rangle$ также подчиняются уравнению (4с) с учетом температур «квазичастиц», $T_{\eta_4} = T_{\eta_5} \equiv 6T$, и корреляционной функции их скоростей,

$$\langle V_{\eta_4} V_{\eta_5} \rangle = 4T \equiv \frac{6T(a_{21} - a_{12})}{M(a_{11} - a_{22})},$$

где

$$a_{11} = Q\beta/M - 3b_{13} - b_{12} - b_{14},$$

$$a_{22} = Q\beta/M - 3b_{23} - b_{12} - b_{14}, \quad a_{12} = 2b_{23} - b_{12} - b_{14},$$

$$a_{21} = 2b_{13} - b_{12} - b_{14},$$

см. (19d), (19e).

Спектральные плотности $S_{\eta_k}(\omega)$ для рассматриваемых смещений η_k ($k = 1 \div 5$) связаны с функциями $S_k(\omega)$ следующими соотношениями:

$$S_{\eta_1} = 5S_1, \quad (20a)$$

$$S_{\eta_3} + S_{\eta_4} = 2(S_3 + S_4), \quad (20b)$$

$$S_{\eta_4} + S_{\eta_5} = 6(C_1 S_4 + C_2 S_5), \quad (20c)$$

где $C_1 = 2/3$, $C_2 = 4/3$ для вертикальных смещений частиц и $C_1 = 4/3$, $C_2 = 2/3$ для их радиальных смещений.

Нормированные функции $S_{\eta_k}^*(\omega) = S_{\eta_k}(\omega)/B$ для системы из пяти частиц с кулоновским взаимодействием представлены на рис. 10 при $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$ и $\beta^r/\beta^z = 16$. Еще раз подчеркнем, что измерение смещений η_k в ходе реальных экспериментов с последующим вычислением их спектральных плотностей $S_{\eta_k}(\omega)$ позволяет определить и коэффициент трения частиц ν , и основные гармоники системы ω_k .

4.4. Обсуждение результатов

По результатам настоящей работы можно предположить, что для случая ограниченной цепочки,

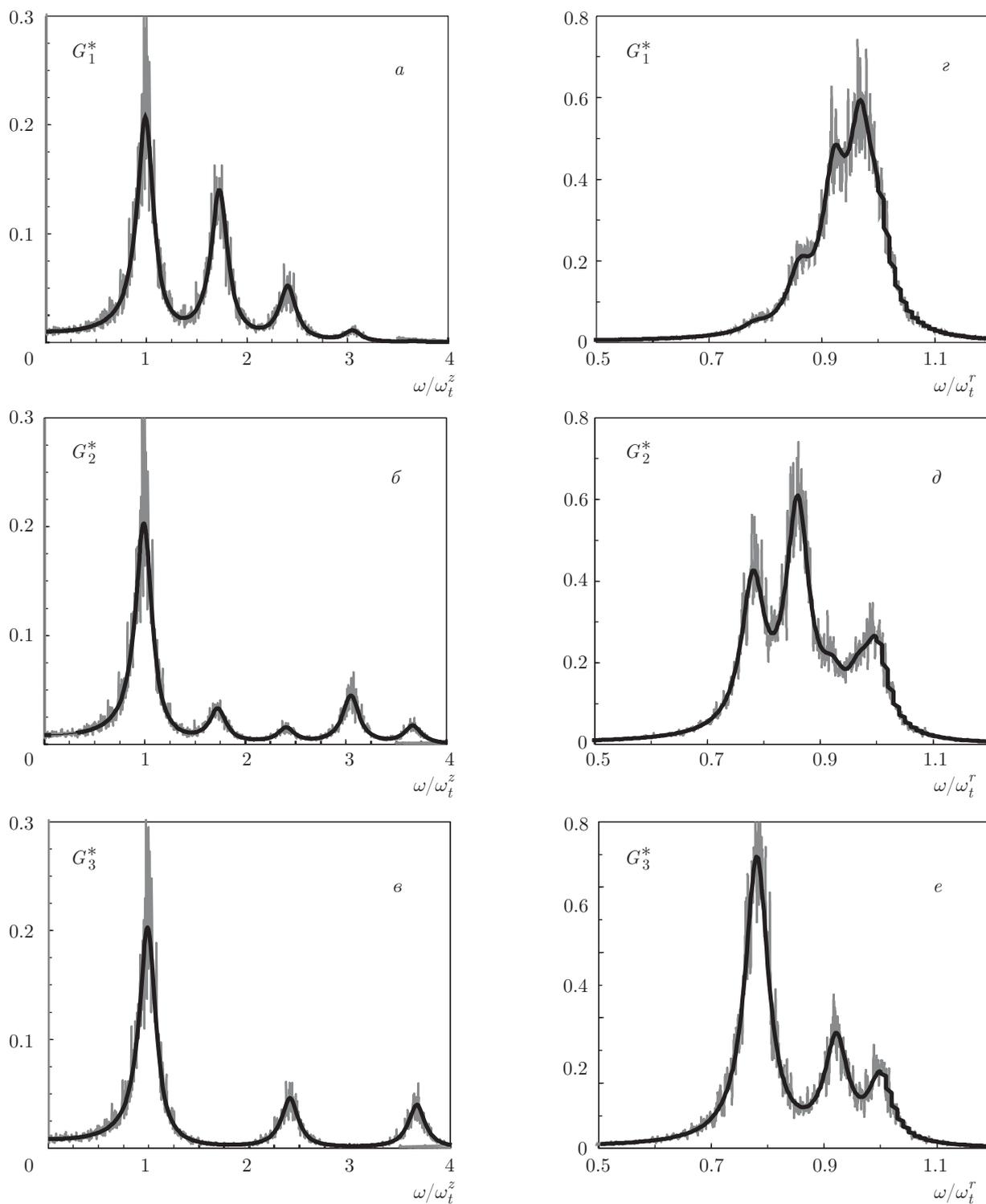


Рис. 9. Функции $G_i^*(\omega)$ для вертикальных (а-в) и радиальных (г-е) смещений частиц при $\beta^r/\beta^z = 16$, $\omega_t^z = 10 \text{ c}^{-1}$, $\omega_t^r = 40 \text{ c}^{-1}$ и $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$. Черными линиями показаны результаты определения спектральной плотности для системы (1) при $F_{bi} = 0$, серыми — результаты численного моделирования

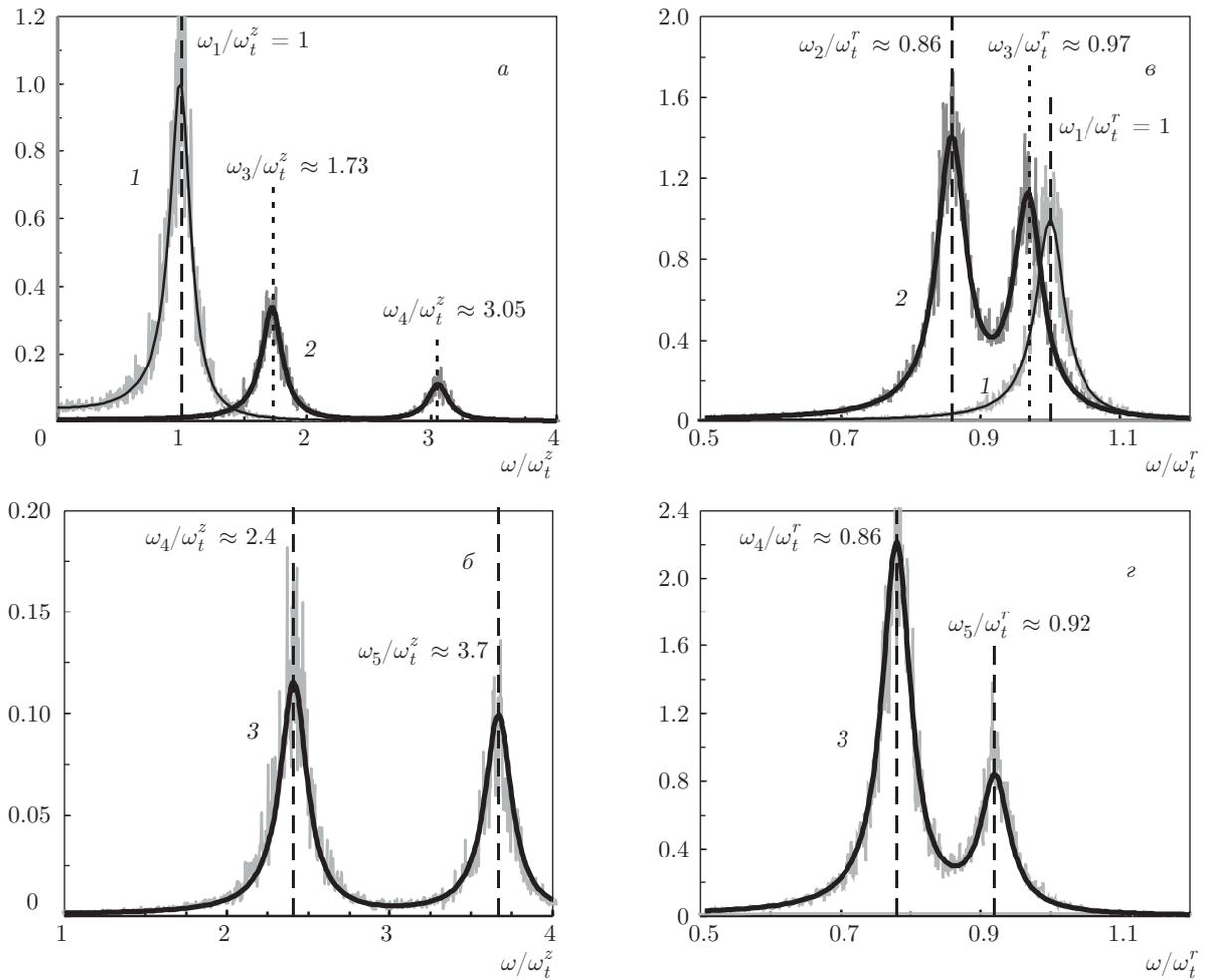


Рис. 10. Функции $S_{\eta_k}^*(\omega) = S_{\eta_k}(\omega)/B$ при $\beta^r/\beta^z = 16$, $\omega_t^z = 10 \text{ с}^{-1}$, $\omega_t^r = 40 \text{ с}^{-1}$ и $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$ для вертикальных (а, б) и радиальных (в, г) смещений частиц: 1 — $S_{\eta_1}^*/5 = S_1^*$, 2 — $(S_{\eta_2}^* + S_{\eta_3}^*)/2 \equiv S_2^* + S_3^*$, 3 — $(S_{\eta_4}^* + S_{\eta_5}^*)/6 \equiv C_1 S_4^* + C_2 S_5^*$. Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми — результаты моделирования

состоящей из идентичных частиц с попарным взаимодействием, процедуру вычисления спектральной плотности для смещений каждой из частиц $G_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) можно свести к определению суперпозиции спектральных плотностей $S_k = S_k(\omega, \nu, \omega_k)$ для отдельных гармоник системы ω_k :

$$G_i(\omega) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_k^2)\omega^2 + \omega_k^4} \equiv \sum_{k=1}^N A_k S_k, \quad (21)$$

где A_k — некоторые коэффициенты, N — число частиц.

При этом для такой системы коэффициент трения частиц ν и частоту ловушки $\omega_t = \omega_t^{z(r)} \equiv$

$\equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$ (а, соответственно, и величины градиентов внешнего поля, β^z и β^r) в реальном эксперименте легко определить из измерений спектральной плотности для суммы их смещений, $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$, которая пропорциональна смещению центра масс системы. Для определения других гармоник системы, $\omega_k \neq \omega_t$, можно использовать как измерения спектральных плотностей для отдельных частиц $G_i(\omega)$, так и измерения спектральных плотностей для их взаимных смещений $\xi_i - \xi_j$; здесь $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$ и $i \neq j$. Последняя процедура является предпочтительней, поскольку с ростом коэффициента трения частиц ν или радиальной частоты ловушки ω_t^r экспериментальный анализ спектра частот для отдельных частиц, $G_i(\omega)$, становится затруднительным.

Добавим также, что измерение вертикальных и радиальных смещений в цепочке заряженных частиц дает информацию о силах межчастичного взаимодействия $F_{ij} = F(l_{ij})$ и их производных F'_{ij} , что, в свою очередь, позволяет определить характер и тип потенциала взаимодействия между частицами системы. Расстояние между частицами как в численных, так и в реальных экспериментах легко измеряется и в случае численного моделирования полностью соответствует аналитическим уравнениям баланса сил, см. (15), (18).

Еще раз отметим, что значения характерных частот частиц, ω_k , и спектральной плотности их смещений, $G_i(\omega, \nu, \omega_k)$, в системе из любого количества N взаимодействующих частиц можно получить численно на основе существующих программных пакетов, которые используют различные методики для вычисления указанных спектральных характеристик для уравнений (1) при $F_{bi} = 0$. Однако использование простых аналитических соотношений существенно сокращает время, необходимое для обращения экспериментальных данных.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты аналитических и численных исследований спектральных характеристик стохастического движения для малоразмерных цепочечных структур (состоящих из нескольких частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом) в анизотропном электрическом поле ловушки. Предложены соотношения для спектральной плотности смещений частиц в таких системах. Рассмотрены характерные частоты частиц и способ их аналитического вычисления.

Результаты настоящей работы применимы для систем при любом типе попарных взаимодействий, а также могут быть адаптированы для случая непопарных (невзаимных) потенциалов. Полученные результаты могут быть полезны для разработки новых методов диагностики физических свойств пылевой плазмы.

Финансирование. Работа частично поддерживается Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 18-38-20175), а также Программой Президиума Российской академии наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, В. Е. Фортгов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, *Пылевая плазма (эксперимент и теория)*, Физматлит, Москва (2009).
2. *Complex and Dusty Plasmas*, ed. by V. E. Fortov and G. E. Morfill, CRC Press (2010).
3. A. Ivlev, G. Morfill, H. Lowen, and C. P. Royall, *Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids*, World Sci., Singapore (2012).
4. *Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy*, ed. by H. Z. Cummins and E. R. Pike, Plenum, New York (1974).
5. R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley Interscience, Chichester (1975).
6. А. А. Овчинников, С. Ф. Тимашев, А. А. Белый, *Кинетика диффузионно-контролируемых химических процессов*, Химия, Москва (1986).
7. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, ЖЭТФ **133**, 1091 (2008).
8. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, О. Ф. Петров, В. Е. Фортгов, ЖЭТФ **134**, 367 (2008).
9. E. A. Lisin, R. A. Timirkhanov, O. S. Vaulina, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, *New J. Phys.* **15**, 053004 (2013).
10. O. S. Vaulina and E. A. Lisin, *Phys. Plasmas* **16**, 113702 (2009).
11. В. Е. Фортгов, О. Ф. Петров, О. С. Ваулина, К. Г. Косс, Письма в ЖЭТФ **97**, 366 (2013).
12. G. A. Hebner, M. E. Riley, and K. E. Greenberg, *Phys. Rev. E* **66**, 046407 (2002).
13. O. S. Vaulina and I. E. Drangevski, *Phys. Scripta* **73**, 577 (2006).
14. Ю. П. Райзер, *Физика газового разряда*, Наука, Москва (1987).
15. W.-T. Juan, Z.-H. Huang, J.-W. Hsu, Y.-J. Lai, and L. I, *Phys. Rev. E* **58**, 6947 (1998).
16. O. Ishihara, T. Kamimura, K. I. Hirose, and N. Sato, *Phys. Rev. E* **66**, 046406 (2002).
17. M. Klindworth, A. Melzer, A. Piel, and V. A. Schweigert, *Phys. Rev. B* **61**, 8404 (2000).
18. A. Melzer, M. Klindworth, and A. Piel, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 115002 (2001).
19. A. V. Ivlev, J. Bartnick, M. Heinen, C. R. Du, V. Nosenko, and H. Löwen, *Phys. Rev. X* **5**, 011035 (2015).
20. О. С. Ваулина, И. И. Лисина, К. Г. Косс, *Физика плазмы* **39**, 455 (2013).
21. I. I. Lisina and O. S. Vaulina, *Europhys. Lett.* **103**, 55002 (2013).

22. A. K. Mukhopadhyay and J. Goree, *Phys. Rev. E* **90**, 013102 (2014).
23. О. С. Ваулина, Э. А. Саметов, *ЖЭТФ* **154**, 407 (2018).
24. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1982).
25. А. А. Воронов, *Теория автоматического управления*, ч. 2, Высш. школа, Москва (1986).
26. Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, *ЖЭТФ* **142**, 1077 (2012).
27. Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, *ЖЭТФ* **151**, 791 (2017).
28. Э. А. Саметов, Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, *ЖЭТФ* **157**, 552 (2020).
29. Э. А. Саметов, Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, *Вестник ОИВТ* **2**, 33 (2019).
30. J. B. Pieper and J. Goree, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3137 (1996).
31. A. Noman, A. Melzer, and A. Piel, *Phys. Rev. E* **59**, 3835 (1996).
32. K. Qiao, Z. Ding, J. Kong, M. Chen, L. S. Matthews, and T. W. Hyde, arXiv:1810.07173 (2018).
33. R. Yousefi, M. Chen, L. S. Matthews, and T. W. Hyde, arXiv:1607.03177 (2016).
34. О. С. Ваулина, Е. А. Лисин, А. В. Гавриков, О. Ф. Петров, В. Е. Фортгов, *ЖЭТФ* **137**, 751 (2010).
35. Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, and О. Ф. Петров, *Phys. Plasmas* **25**, 013702 (2018).
36. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*, Наука, Москва (1986).
37. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, И. Е. Дранжевский, *Физика плазмы* **31**, 612 (2005).
38. О. С. Ваулина, И. И. Лисина, Е. А. Лисин, *Физика плазмы* **44**, 229 (2018).
39. О. С. Ваулина, *Phys. Plasmas* **24**, 023705 (2017).
40. О. С. Ваулина, *ЖЭТФ* **151**, 982 (2017).