

# КВАНТОВАЯ МАГНОНИКА

Ю. М. Буньков\*

Российский квантовый центр  
143025, Сколково, Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 января 2020 г.,  
после переработки 29 марта 2020 г.  
Принята к публикации 30 марта 2020 г.

Одно из замечательных открытий, связанных с именем Андрея Станиславовича Боровика-Романова — это открытие спиновой сверхтекучести в антиферромагнитном сверхтекучем  ${}^3\text{He}$ . Спустя 30 лет квантовые эффекты для газа магнонов, такие как магнонный бозе-эйнштейновский конденсат и спиновая сверхтекучесть стали весьма актуальными. Мы рассмотрим аналогии между спиновой сверхтекучестью и сверхпроводимостью. Только что были опубликованы результаты квантовых вычислений с использованием 53-битного программируемого сверхпроводящего процессора [1]. Они показали превосходство использования квантового алгоритма вычислений в этом процессоре над классическим для некоторых типов вычислений. Мы рассматриваем возможности создания во многом аналогичного процессора на основе спиновой сверхтекучести.

*Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию А. С. Боровика-Романова*

DOI: 10.31857/S0044451020070032

## 1. СВЕРХТЕКУЧИЙ АНТИФЕРРОМАГНИТНЫЙ ${}^3\text{He}$

Эта статья посвящена памяти моего наставника — Андрея Станиславовича Боровика-Романова. Судьба подарила мне возможность быть посвященным в тайны физической науки этим замечательным человеком.

В 1972 г. в Америке была открыва сверхтекучесть в  ${}^3\text{He}$  при температуре 0.002 К. При переходе в сверхтекучее состояние в  ${}^3\text{He}$  нарушаются спиновая и орбитальная вращательные симметрии. Поэтому кроме сверхтекучести  ${}^3\text{He}$  обладает также свойствами антиферромагнитного жидкого кристалла. Это уникальное сочетание нарушенных симметрий сделало  ${}^3\text{He}$  образцовым экземпляром для экспериментального исследования многих явлений природы и, в частности, даже квантовой теории поля [2].

В нашей лаборатории в Институте физических проблем мы создали уникальный криостат ядерного размагничивания меди [3] и получили первый в Советском Союзе сверхтекучий  ${}^3\text{He}$ . Уже в первых экс-

периментах был обнаружен необычный сигнал спиновой индукции [4]. Этот сигнал индукции сначала убывал в соответствии с пространственной неоднородностью магнитного поля, но затем восстанавливался и длился на порядки дольше, чем следовало из неоднородности поля. Это спонтанное восстановление когерентности прецессии намагниченности явилось первым наблюдением бозе-конденсации квазичастиц — магнонов. Эффект был объяснен теоретически Игорем Фоминым как сверхтекучее перетекание компонент отклоненной намагниченности в минимум магнитного поля и образование магнитного домена с однородной, когерентной прецессией намагниченности [5]. Данная теория была тут же подтверждена прямым экспериментом, в котором отклоненная намагниченность «всплывала» в сильном градиенте магнитного поля [6]. Спиновый сверхтекучий ток можно представить как противоток двух компонент сверхтекучего  ${}^3\text{He}$  с противоположными магнитными моментами, возникающий за счет градиента фазы прецессии в неоднородном поле [7].

Однако это явление можно описать и на языке неравновесных магнонов [7, 8]. В этом случае сверхтекучие свойства  ${}^3\text{He}$  уже не используются, а эффект объясняется антиферромагнитным упорядочением  ${}^3\text{He}$ , которое возникает одновременно со сверхтекучестью. Отклоненная намагниченность в дан-

\* E-mail: y.bunkov@rsc.ru

ном рассмотрении представляется в виде возбуждения неравновесных магнонов. Это более общее описание применимо уже ко всем магнитоупорядоченным системам. В данном формализме непосредственно проявляются квантовые свойства магнонов при их большой концентрации — бозе-концентрация магнонов и спиновая сверхтекучесть. При этом было показано, что для получения явления магнитной сверхтекучести необходимо отталкивающее взаимодействие между магнонами, которое стабилизирует когерентный ток намагниченности. В случае притяжения между магнонами этот ток, а также однородная прецессия намагниченности неустойчивы.

В большом цикле экспериментальных работ с различными фазами сверхтекучего  $^3\text{He}$  были получены все магнитные аналоги известных сверхтекучих и сверхпроводящих эффектов, таких как сверхтекучий спиновый ток в канале и проскальзывание фазы при достижении его критического значения [9, 10], спин-токовый эффект Джозефсона [11], образование квантовых вихрей при круговом токе намагниченности [12], голдстоуновские моды колебаний [13–15] и т. д.

Также были проведены исследования динамики магнонного бозе-конденсата в условиях притяжения между магнонами [16]. В этом случае спиновая сверхтекучесть не образуется. Следует отметить, что эти явления являются свойствами магнитного упорядочения и не связаны напрямую с массовой сверхтекучестью в  $^3\text{He}$ , т. е. они могут также наблюдаться и в твердотельных магнетиках! Главным отличием  $^3\text{He}$  является рекордно большие времена жизни возбужденных магнонов, что связано с абсолютной чистотой  $^3\text{He}$  и очень малой концентрацией фононов при столь низких температурах. Поэтому  $^3\text{He}$  является эталонным образцом для исследования свойств неравновесных магнонов, их бозе-конденсации и сверхтекучести.

## 2. СПИНОВАЯ СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ И МАГНОННАЯ БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ

Когерентное квантовое состояние вещества, обладающее эффектом сверхтекучести, было открыто в 1938 г. П. Л. Капицей в жидком  $^4\text{He}$  при температуре 2.17 К [17]. Первое теоретическое объяснение этого состояния было сделано Ф. Лондоном. Он предположил, что сверхтекучесть может быть связана с бозе-эйнштейновской-конденсацией (БЭК) атомов [18]. В теории БЭК Эйнштейна рассматривается когерентное состояние невзаимодействующих

частиц, подчиняющихся статистике Бозе [19]. Недавно эта теория была успешно применена для описания экспериментов в разреженных атомарных газах при сверхнизких температурах [20, 21]. Однако эта теория оказалась не применима для систем с сильным взаимодействием, таких как жидкий  $^4\text{He}$ . В 1941 г. Л. Д. Ландау предположил феноменологическую теорию, в которой рассматривались состояния атомов, модифицированные межатомным взаимодействием. Эта теория успешно описала свойства сверхтекучести в  $^4\text{He}$  [22]. Главным достижением теории явилось то, что она объяснила большую плотность сверхтекучей компоненты жидкости, доходящую до 100 % при сверхнизких температурах, в то время как плотность бозе-конденсата остается на уровне порядка 10 %. Тем не менее явление БЭК является ключевым механизмом сверхтекучести в жидком  $^4\text{He}$ . Сверхтекучее состояние является квантовым состоянием конденсированного вещества, описываемым единой волновой функцией. Сверхтекучее состояние может существовать без БЭК, как при переходе Березинского–Костерлица–Таулесса в двумерных материалах [23]. И наоборот, БЭК может существовать, но не приводит к сверхтекучему переносу. Это происходит в случае, когда нет энергетической щели в спектре возбуждений. В этом случае кинетическая энергия тока разрушает когерентное состояние и критический ток равен нулю. Таким образом, говорить о сверхтекучем состоянии магнонов при их положительном потенциале взаимодействия не приходится.

Другой сверхтекучей системой являются электроны в некоторых металлах, обладающие свойством сверхпроводимости. Это явление нашло свое применение в различных приложениях, и недавно с использованием этого эффекта был построен процессор для квантового компьютера [1].

Открытая в 1984 г. спиновая сверхтекучесть магнонов обладает более широким спектром различных эффектов, так как, в отличие от атомов и электронов, имеет векторную природу. Магноны — квантовые возбуждения магнитоупорядоченного вещества, имеют большое разнообразие свойств и когерентных квантовых состояний в силу разнообразия их взаимодействия в различных магнетиках. В условиях теплового равновесия плотность магнонов всегда ниже критической плотности, необходимой для бозе-конденсации магнонов. Однако их плотность можно увеличить вплоть до числа Авагадро методами магнитного резонанса. Газ неравновесных магнонов может существовать гораздо дольше времен установления квазиравновесного распределения

магнонов. За это время в магнном газе спонтанно устанавливается когерентное состояние, которое сохраняется и во время релаксации плотности магнонов. В сверхтекучем  $^3\text{He-B}$  параметр Гильберта, характеризующий скорость релаксации магнонов, достигает  $10^{-8}$ , в то время как времена установления квазиравновесного распределения магнонов составляют порядка нескольких времен соударения квазичастиц. В твердотельных магнетиках параметр  $\alpha$  редко достигает величины  $10^{-5}$ , и поэтому время жизни когерентного состояния гораздо меньше, с чем связана трудность его наблюдения.

Строго говоря, магнная бозе-конденсация и спиновая сверхтекучесть являются различными состояниями когерентной системы магнонов. Магнный БЭК возникает «автоматически», как только плотность неравновесных магнонов превысит критическую и установится их квазиравновесное распределение. При этом достаточно установления равновесного распределения магнонов только в части их спектра! Оценка критической плотности неравновесных магнонов для различных магнитных систем проведена в работе [24]. Напротив, явление сверхтекучего переноса является кинетическим эффектом и возникает только тогда, когда пространственный ток намагниченности стабилизируется магнным взаимодействием и характеризуется критической скоростью и длиной когерентности Гинзбурга–Ландау.

Сверхтекучее состояние характеризуется недиагональным дальним порядком (ODLRO) [25]. В сверхтекучем  $^4\text{He}$  и в когерентных атомарных системах операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом  $\mathbf{p} = 0$  имеют зависящие от времени значения:

$$\langle \hat{a}_0 \rangle = \mathcal{N}_0^{1/2} e^{i\mu t + i\alpha}, \quad (1)$$

где  $\mathcal{N}_0$  — число частиц в когерентном состоянии,  $\mu$  и  $\alpha$  — соответственно химический потенциал и фаза волновой функции.

Аналогию между спиновой прецессией и ODLRO в сверхтекучих состояниях хорошо видно, если сравнить оператор рождения  $\hat{a}_0^+$  частицы с оператором рождения  $\hat{S}^+$  магнонов:

$$\langle \hat{S}^+ \rangle = \mathcal{S}_x + i\mathcal{S}_y = \sqrt{\mathcal{S} - \mathcal{S}_z} e^{i\omega t + i\alpha}. \quad (2)$$

Из этой аналогии следует, что при когерентной прецессии намагниченности роль числа частиц  $\mathcal{N}$  играет проекция полного спина на направление внешнего магнитного поля,  $\mathcal{S}_z$  [26, 27], а роль химического потенциала — частота прецессии. Важно отметить,

что энергия Зеемана должна быть включена в химический потенциал, поскольку она может изменяться в пространстве в случае неоднородности магнитного поля.

Уравнения Гамильтона для канонически сопряженных переменных  $\mathcal{N}$  и  $\alpha$  имеют вид

$$\dot{\alpha} = \frac{\delta F}{\delta \mathcal{N}}, \quad \dot{\mathcal{N}} = -\frac{\delta F}{\delta \alpha} \quad (3)$$

и являются гидродинамическими уравнениями для сверхтекучего тока магнонов. Здесь  $F$  — функционал свободной энергии Гинзбурга–Ландау [28]. В системе координат, вращающейся с частотой  $\omega$ , они имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F} - \mu \mathcal{N} &= \\ &= \int d^3r \left\{ \frac{|\nabla \Psi|^2}{2m} + [\omega_L(\mathbf{r}) - \omega] |\Psi|^2 + F_{so}(|\Psi|^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\omega_L(\mathbf{r}) = \gamma H(\mathbf{r})$  является локальной ларморовской частотой, которая играет роль внешнего потенциала  $U(\mathbf{r})$  в атомных конденсатах. Последний член  $F_{so}(|\Psi|^2)$  содержит нелинейность, возникающую из-за спин-орбитального взаимодействия. Он аналогичен члену четвертого порядка в атомном БЭК, который описывает взаимодействие между атомами. Это взаимодействие может иметь положительное либо отрицательное значение и описывать притяжение либо отталкивание между неравновесными магнонами:

$$F_{so}(|\Psi|^2) = a|\Psi|^2 + b|\Psi|^4 + \dots \quad (5)$$

И если квадратичный член изменяет потенциал  $U$  в свободной энергии Гинзбурга–Ландау, то следующий член описывает взаимодействие между магнонами. Мы можем представить уравнение (4) в более общей форме [27]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} - \mu \mathcal{N} &= \\ &= \int d^3r \left\{ \frac{|\nabla \Psi|^2}{2m} + [\omega_0(r) - \omega] |\Psi|^2 + b|\Psi|^4 \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\omega_0(r) = \omega_L(r) + a(r)$  — частота прецессии при малом возбуждении, а  $m$  — масса магнонов. Плотность  $N$  неравновесных магнонов определяется углом отклонения прецессирующей намагниченности,  $\beta$ ,

$$N = |\Psi|^2 = M(1 - \cos \beta), \quad (7)$$

где  $M$  — величина намагниченности. Соответственно, частота прецессии отклоненной намагниченности есть

$$\omega_S(r) = \omega_0(r) + 2b[1 - \cos(\beta(r))]. \quad (8)$$

В случае пространственной неоднородности магнитного поля возникает пространственный градиент фазы прецессии  $\alpha$ , который непосредственно связан с фазой волновой функции магнонов и приводит к сверхтекучему спиновому току магнонов [28]

$$\mathbf{J} = \mathcal{N} \nabla \alpha. \tag{9}$$

Перенос магнонов и, соответственно, продольной намагниченности на большие расстояния был исследован в специально поставленных экспериментах, описанных в работах [29–31]. В них было подтверждено, что критический ток соответствует градиенту критической фазы, который является обратным значение длины когерентности Гинзбурга–Ландау  $\xi_{GL}$ :

$$\nabla \alpha_c = \frac{1}{\xi_{GL}} = \frac{\sqrt{\omega_0(\omega_S - \omega_0)}}{c_{SW}}, \tag{10}$$

где  $c_{SW}$  — скорость спиновых волн а  $\omega_S - \omega_0$  — сдвиг частоты прецессии относительно локальной лармовской частоты. Длина когерентности Гинзбурга–Ландау определяется конкуренцией между энергией отталкивающего взаимодействия (третий член в уравнении (6)) и кинетической энергией потока (первый член в уравнении (6)). Обратите внимание на то, что при притягивающем взаимодействии коэффициент  $b$  отрицателен и, следовательно, сверхтекучее состояние неустойчиво и сверхтекучий перенос намагниченности невозможен.

### 3. КОГЕРЕНТНАЯ ПРЕЦЕССИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Пространственные градиенты волновой функции в квантовых жидкостях приводят к процессам переноса, которые протекают до тех пор, пока не образуется пространственно-однородное состояние. Для сверхпроводимости этот процесс известен как эффект Мейснера, при котором сверхпроводящий ток «выдавливает» магнитное поле из образца. Аналогичный процесс происходит и при спиновой сверхтекучести и приводит к образованию области с когерентной прецессией намагниченности (КПН) даже в сильнонеоднородном магнитном поле. Его также называют «однородно прецессирующим доменом», но, по-моему, важно отметить именно когерентность прецессии, так как данное явление имеет квантовую природу. В силу важности этого состояния для современных исследований и приложений, рассмотрим его более подробно.

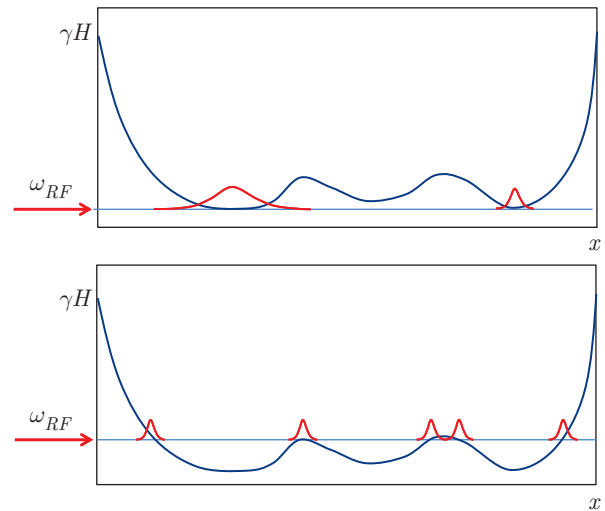


Рис. 1. (В цвете онлайн) Схематически показано неоднородное распределение эффективного магнитного поля. Слабое РЧ-поле возбуждает магнитный резонанс в областях, где поле соответствует частоте накачки

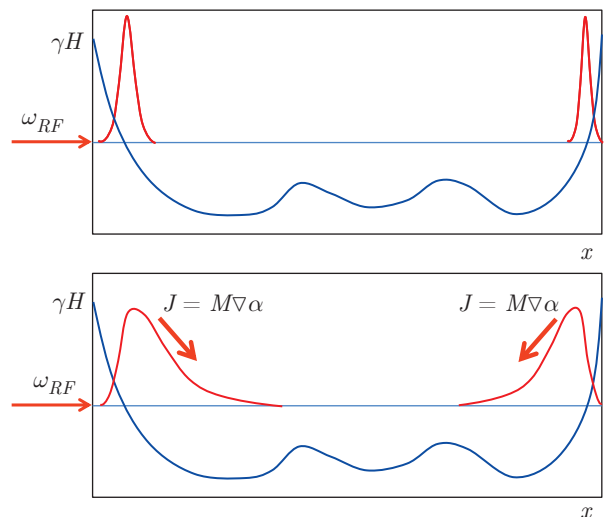
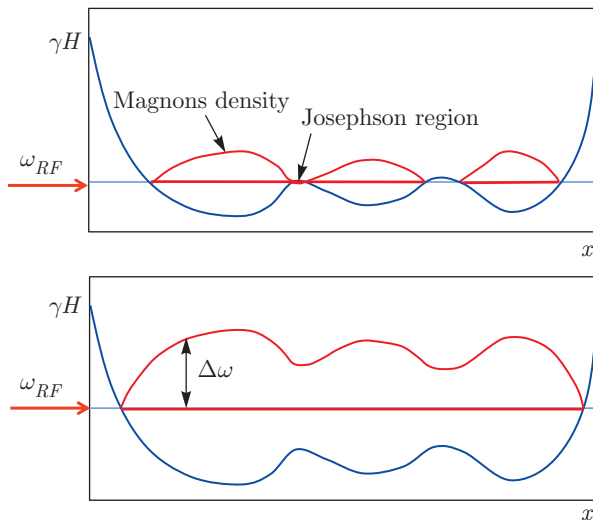


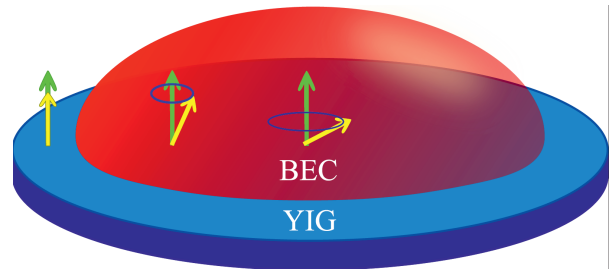
Рис. 2. (В цвете онлайн) При увеличении амплитуды возбуждающего РЧ-поля плотность магнонов в области резонанса достигает критической плотности образования БЭК (вверху). Возникает сверхтекучий спиновый ток, который переносит магноны в область меньших полей (внизу)

На рис. 1 схематически показано пространственное распределение эффективного магнитного поля в магнитоупорядоченном образце. Допустим, что оно увеличивается на краях, как это имеет место, например, в пленке железо-иттриевого граната (ЖИГ), намагниченной перпендикулярно поверхности. Схематически показана также возможная неоднородность эффективного магнитного поля. В линей-



**Рис. 3.** (В цвете онлайн) В результате пространственного переноса магнонов последние заполняют всю область, в которой поле меньше, чем  $\omega/\gamma$ . Сдвиг частоты за счет взаимодействия магнонов компенсирует неоднородность магнитного поля. На верхнем рисунке показано образование трех областей с КПН, причем две из них соприкасаются. В области соприкосновения возможно наблюдать эффект Джозефсона. На нижнем рисунке показано образование односвязной области КПН

ном приближении, при малой мощности возбуждения, линия магнитного резонанса будет соответствовать спектральному распределению намагниченности, как показано на рис. 1 красными линиями. При увеличении мощности концентрация магнонов в точке резонанса может превысить критическую плотность бозе-конденсации магнонов, как показано на рис. 2. В градиенте магнитного поля образуется градиент фазы прецессии, который связан с градиентом волновой функции магнонов. Образуется сверхтекучий ток магнонов, который переносит их в область меньших полей. Если между магнонами происходит отталкивание, то частота локальной прецессии увеличивается с увеличением локальной плотности магнонов. Этот процесс останавливается только тогда, когда динамический сдвиг частоты сконденсировавшихся магнонов компенсирует пространственную неоднородность магнитного поля. В области, в которой  $\omega/\gamma$  больше, чем локальное магнитное поле, отклоненная намагниченность начинает прецессировать пространственно-когерентно (рис. 3). Могут образоваться несколько областей с КПН, как показано на верхнем рисунке. Например, можно создать ситуацию, в которой два домена с КПН интерферируют через область их перекрытия. Эффект Джозефсона между такими областями



**Рис. 4.** (В цвете онлайн) Схематическое представление капли сверхтекучей магнонной жидкости, образовавшейся в диске ЖИГ, намагниченном перпендикулярно поверхности. Магнитная потенциальная яма образована полем размагничивания, которое убывает к краям диска. Неоднородность эффективного магнитного поля компенсируется динамическим сдвигом частоты за счет больших углов отклонения намагниченности в центральной части образца

ми был продемонстрирован экспериментально [11]. При дальнейшем увеличении частоты накачки КПН занимает всю область магнитной ловушки. Именно образование такой капли спинового сверхтекучего состояния было недавно обнаружено в пленке ЖИГ, намагниченной перпендикулярно поверхности [32]. Она появляется в потенциальной яме, образованной эффективным полем за счет того, что поле размагничивания уменьшается на краях пленки. Схематически капля сверхтекучего магнонного конденсата показана на рис. 4. Ее образование недавно было подтверждено в импульсных экспериментах, в которых наблюдалась динамика уменьшения капли при релаксации плотности магнонов с соответствующей перестройкой частоты прецессии намагниченности. В данном эксперименте также был обнаружен новый тип долгоживущего когерентного состояния, механизм образования которого требует дальнейших исследований [33].

Устойчивость когерентной прецессии обеспечивается сверхтекучим протеканием магнонов при образовании градиентов фазы прецессии. Этот механизм приводит к образованию голдстоуновских мод колебаний, аналогичных второму звуку в  $^4\text{He}$ . Существование этих волн является прямым доказательством квантовой природы КПН. Данный эффект был детально исследован в сверхтекучем  $^3\text{He}$  [13–15] и в антиферромагнетиках с динамическим сдвигом частоты [34, 35]. Недавно голдстоуновские моды колебаний были обнаружены нами и в ЖИГ, что подтверждает сверхтекучую природу магнонного конденсата.

Данное состояние образуется при непрерывной накачке магнонов. Однако оно является собствен-

ным состоянием магнетонного газа при данной плотности и химическом потенциале магнетонов, определяемом частотой РЧ-накачки. Роль РЧ-накачки заключается в возбуждении новых магнетонов взамен испаряющихся в процессе релаксации. При этом новые магнетоны рождаются непосредственно в состоянии БЭК в соответствии с правилами рождения бозе-частиц в присутствии конденсата [36] даже в случае шумовой (расфазированной) РЧ-накачки.

В случае выключения РЧ-накачки плотность магнетонов начинает уменьшаться вследствие их «испарения». При этом когерентное сверхтекучее состояние сохраняется, но его химический потенциал и, соответственно, частота уменьшаются. Это состояние излучает долгоживущий сигнал индукции, наблюдение которого и стало доказательством сверхтекучего состояния магнетонного конденсата [4]. В сверхтекучем  $^3\text{He-B}$  процесс релаксации КПП может достигать несколько минут [37, 38]. В пленках ЖИГ это время составляет порядка нескольких микросекунд [33]. Однако этого времени вполне достаточно для того, чтобы образовалось сверхтекучее состояние магнетонов. Следует отметить, что процессу релаксации также подвержен и атомарный БЭК в ловушке за счет испарения атомов. Время жизни атомарного БЭК составляет порядка секунды [20, 21]. Поэтому критические возражения относительно конечного времени жизни магнетонов относятся также и к атомарному БЭК. Таким образом, конечное время существования не является препятствием для образования БЭК и сверхтекучего состояния.

#### 4. ЖЕЛЕЗО-ИТТРИЕВЫЙ ГРАНАТ В СРАВНЕНИИ СО СВЕРХТЕКУЧИМ $^3\text{He}$

В настоящее время уделяется большое внимание исследованиям динамических свойств газа магнетонов в пленках ЖИГ, который обладает сильными нелинейными свойствами. Это связано с тем, что ЖИГ рассматривается как перспективный материал для магнетонной обработки сигналов и создания магнетонных приборов [39]. В случае продольной намагниченности пленки магнетоны испытывают притяжение, и поэтому их однородная прецессия неустойчива. Напротив, при перпендикулярном намагничивании магнетоны расталкиваются. Их однородная прецессия и спиновая сверхтекучесть стабилизируются. Ситуация аналогична свойствам магнетонов в сверхтекучем  $^3\text{He}$ , в котором в состоянии  $^3\text{He-A}$  магнетоны притягиваются, а в  $^3\text{He-B}$  — отталкиваются.

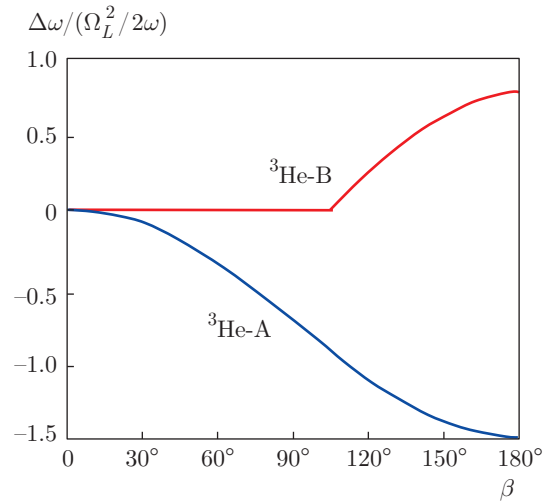
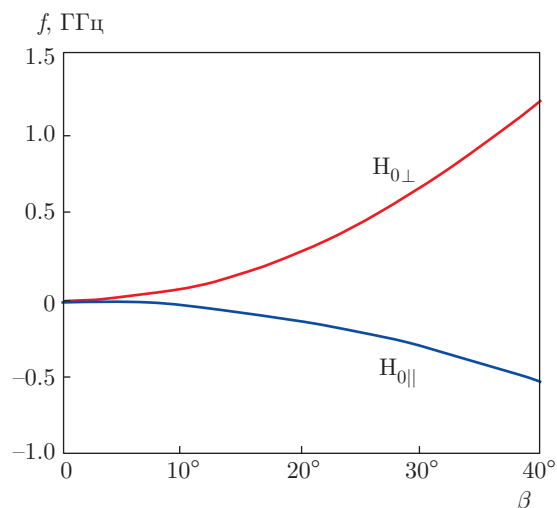


Рис. 5. Динамический сдвиг частоты в сверхтекучих состояниях  $^3\text{He}$  как функция угла отклонения прецессирующей намагниченности.  $\Omega_L$  — частота Леггета порядка сотни кГц,  $\omega$  — ларморовская частота

Согласно уравнению (3), частота прецессии намагниченности определяется производной свободной энергии по числу магнетонов. Отталкивание магнетонов приводит к положительному сдвигу частоты при увеличении угла отклонения. На рис. 5 показаны динамические сдвиги частоты прецессии для сверхтекучих состояний  $^3\text{He-A}$  и  $^3\text{He-B}$  без учета взаимодействия со стенками камеры. В первом случае мы имеем притяжение между магнетонами. Было показано экспериментально, что в этом случае однородная прецессия быстро распадается на пространственно-неоднородные структуры [16, 40], размер которых определяется граничными условиями на стенке камеры [41]. Во втором случае ситуация более интересная. Для углов отклонения до  $104^\circ$  взаимодействие между магнетонами отсутствует, несмотря на их плотность, сравнимую с числом Авагадро. В этом случае мы имеем уникальный случай классического магнетонного бозе-конденсата без взаимодействия! При этом собственные процессы релаксации также отсутствуют, т. е. магнетоны являются бесконечно живущими возбуждениями. Однако граничные условия и градиенты магнитного поля приводят к сдвигу частоты и, соответственно, к процессам релаксации и магнитного переноса. Положительный сдвиг частоты и формирование сверхтекучего состояния начинаются при углах отклонения более  $104^\circ$ .

На рис. 6 показан сдвиг частоты для однородной прецессии намагниченности в пленке ЖИГ, намагниченной в плоскости пленки и по нормали к ней. В



**Рис. 6.** Динамический сдвиг частоты в пленке ЖИГ, намагниченной в плоскости пленки и перпендикулярно к ней как функция угла отклонения прецессирующей намагниченности в поле  $6 \text{ кЭ}$

первом случае мы видим отрицательный сдвиг частоты, как и в  $^3\text{He-A}$ , а во втором случае — положительный сдвиг частоты. Соответственно, в первом случае развивается пространственная неустойчивость прецессии, которая заканчивается образованием пространственной текстуры прецессирующей намагниченности. Такая структура наблюдалась в экспериментах [42]. Попытка объяснения устойчивости такой текстуры была дана в работе [43].

Таким образом, можно констатировать аналогию между поведением магнного газа в сверхтекучих состояниях  $^3\text{He}$ , в системах со связанной ядерно-электронной прецессией, в антиферромагнетиках и в пленках ЖИГ. Во всех случаях магнный газ характеризуется сильным взаимодействием, которое модифицирует его спектральные свойства.

## 5. МАГНОНИКА В ПРОДОЛЬНО-НАМАГНИЧЕННОЙ ПЛЕНКЕ ЖИГ

Спектр магнонов в продольно-намагниченной пленке ЖИГ имеет нетривиальную особенность. При волновом векторе  $k = 0$  профиль энергии магнонов имеет седловую точку. Энергия магнонов, бегущих вдоль направления магнитного поля, понижается и достигает минимума при некоторой конечной величине  $k$ . При сильной параметрической накачке магнонов была обнаружена большая концентрация неравновесных магнонов в этом минимуме

энергии. Это явление было интерпретировано как новый вид бозе-конденсации магнонов [44]. Однако в этих экспериментах был обнаружен обычный дрейф всего магнного газа в область меньших полей и энергий, а когерентность отсутствовала в силу того, что оптическое детектирование магнонов не дает необходимого спектрального разрешения. Как было показано в работе [45], для доказательства когерентности необходимо подтвердить спонтанное фазирование сигнала от магнного конденсата. И такой результат уже был получен за 20 лет до этих экспериментов, как мы показали в первой части статьи. В сверхтекучем  $^3\text{He}$  было получено не только когерентное состояние магнонов, но и их конденсация в магнное сверхтекучее состояние и продемонстрирован весь набор сверхтекучих эффектов, включая сверхтекучий ток на большие расстояния.

Когерентное распространение магнонов — спиновые волны — нашло свое применение в новой отрасли физики — магنونике. Были созданы, в частности, вычислительные алгоритмы, в которых используются свойства спиновых волн. Обычная бинарная логика, основанная на частицах — электронах, — занимает большой объем и рассеивает значительную мощность. Современное развитие вычислительной техники столкнулось с этими недостатками, которые ограничивают ее миниатюризацию и конечную производительность. Обойти эти проблемы можно путем реализации новой логической парадигмы, основанной на использовании волн. В этом случае информация кодируется не только амплитудой, но и фазой волны и, таким образом, обеспечивает дополнительную степень свободы при обработке данных [46]. Это позволяет уменьшить количество обрабатываемых элементов, проводить параллельную обработку данных [47] и использовать небулевы вычислительные алгоритмы [48]. Кроме того, ток магнонов не включает в себя движение электронов и, следовательно, не генерирует тепловой джоулев нагрев.

Таким образом, появляется надежда преодолеть тепловой предел миниатюризации компьютерных устройств, что позволяет создавать устройства с гораздо меньшим занимаемым объемом и рассеиваемой мощностью по сравнению с обычной двоичной (CMOS) логикой, которые могут предложить очень продвинутые логические возможности [39]. Фактически речь идет об использовании интерференции спиновых волн для аналогового моделирования таких вычислений, как, например, фурье-преобразование. Спиновые волны имеют множество ярко выраженных нелинейных эффектов, которые мож-

но использовать для реализации магнонных транзисторов и формирования интегральных магнонных цепей. Задача преобразования прототипов этих устройств в промышленно-применяемые технологии давно назрела, равно как и исследование новых направлений для будущих реализаций, таких как вычисления на терагерцевых частотах и параллельные вычисления. Поэтому большой интерес представляет цикл работ по наблюдению динамики бегущих магнонов и их нетривиальной бозе-конденсации при ненулевом волновом векторе [49, 50]. При распаде БЭК в этих работах наблюдалось образование потока магнонов, который распространяется на большие расстояния.

В магнонных вычислениях логические данные могут быть закодированы в амплитуду спиновой волны (максимальная амплитуда спиновой волны принимается за «1», а нулевой амплитуде соответствует «0»). С другой стороны, можно использовать фазу спиновой волны для оцифровки информации вместо амплитуды [51]. Такой подход допускает тривиальное использование логического элемента «НЕ» в магнонных схемах путем простого изменения положения считывающего устройства на расстояние  $\lambda/2$ . (В современной технологии CMOS он требует использование двух транзисторов.) Более того, такой подход открывает доступ к реализации мажоритарного вентиля в форме многоканального спин-волнового сумматора [47]. Спин-волновой мажоритарный вентиль состоит из трех или большего числа входных волноводов, в которых спиновые волны смешиваются и направляются в выходной волновод. В нем спиновая волна принимает фазу большинства. Таким образом может осуществляться логическая операция «Большинство». Мажоритарный вентиль может выполнять не только мажоритарную операцию, но также операции «И» и «ИЛИ» (а также операции NAND и NOR, если использовать половину длины волны), если один из его входов используется в качестве управляющего входа [52].

Преимущество мажоритарного вентиля заключается также в том, что полный сумматор (используется в электронике для суммирования трех битов) может быть построен с использованием только трех мажоритарных вентилях, в то время как в традиционных схемах используется несколько десятков транзисторов. Еще одно преимущество мажоритарного вентиля заключается в том, что он может работать со спиновыми волнами разных длин волн одновременно, осуществляя параллельные вычисления [47].

Таким образом, векторные вычисления на базе магноники имеют очень важные перспективы применения. Однако гораздо более глубокие перспективы открываются при использовании в квантовых компьютерах сверхтекучих магнонных состояний.

## 6. КВАНТОВАЯ МАГНОНИКА

Явление суперпозиции перепутанных состояний является одной из основных неклассических особенностей квантовой физики. Оно заключается в том, что состояния квантовых систем нельзя разложить на комбинации составляющих состояний. БЭК и, в частности, сверхтекучие и сверхпроводящие состояния являются такими макроскопическими квантовыми состояниями [53]. Можно ли использовать квантовые свойства магнонной сверхтекучести для квантовых вычислений? На первый взгляд — нет, так же как и сверхпроводящее состояние, которое состоит из макроскопического числа куперовских пар, в результате чего его квантовые свойства «усреднены».

Магнонный БЭК, так же как и сверхпроводимость, обладает квантовыми свойствами. В этом случае, в отличие от стандартных одночастичных кубитов, квантовая информация дублируется в большом количестве идентичных бозонных частиц. Поэтому ее можно считать макроскопическим кубитом. Дублирование квантовой информации делает их потенциально более устойчивыми, чем обычные кубиты, где вся квантовая информация теряется с одной ошибкой. Такие ансамбли могут использоваться многими способами, так же как и стандартный кубит: они могут быть визуализированы на сфере Блоха и могут управляться аналогично стандартным кубитам. С другой стороны, кубиты на основе БЭК обычно слабо взаимодействуют друг с другом. Однако, как будет показано ниже, этот процесс можно осуществить с помощью РЧ-резонатора, который позволяет кубитам эффективно взаимодействовать друг с другом для передачи информации и создания запутанности.

Как и в случае со сверхпроводящими кубитами, для работы с магнонными кубитами предполагается существенная миниатюризация образцов. Недавно была создана платформа для квантовых вычислений в виде двумерного массива из 53 микроскопических сверхпроводящих элементов, расположенных в виде квадратной решетки [1]. Взаимодействие между элементами посредством управляемой РЧ-связи позволило создать систему



управляемых и программируемых кубитов. На этой платформе было продемонстрировано квантовое превосходство для определенного типа вычислений.

Аналогичные платформы для квантовых вычислений разрабатываются и на основе других квантовых систем [54]. В частности, большой интерес представляют различные спиновые системы, в которых магнитные возбуждения — магноны — связаны с фотонами РЧ-резонатора [55–57]. Образование магнонно-фотонных связанных колебаний было продемонстрировано в рассматриваемых здесь системах с динамическим сдвигом частоты [56]. Гибридные системы магнон–фотон сочетают возможности управляемой передачи информации между кубитами и достаточно большими временами когерентности магнонов [58, 59]. Они также могут представлять собой когерентные квантовые состояния.

В работе [59] было проведено сравнение когерентных свойств кубитов, созданных на основе различных квантовых систем. Так, для сверхпроводящего кубита время когерентности на частоте 10 ГГц оценивалось величиной порядка 100 мс, в то время как для магнонного кубита оно было в 10 раз меньше при той же частоте. Однако для этой оценки была использована величина неоднородного уширения линии, которое исчезает в случае спиновой сверхтекучести.

Кроме того, процессы спиновой сверхтекучести подавляют и основной источник спин-спиновой релаксации — пространственную неоднородность прецессирующей намагниченности. В результате сигнал магнитной индукции может убывать медленнее сигнала, полученного методами спинового эха. В работах по исследованию спин-решеточной релаксации были получены времена в 50 раз больше приведенных в таблице, представленной в работе [60].

Таким образом, в случае формирования состояния со спиновой сверхтекучестью в оптимально приготовленном образце ЖИГ следует ожидать времена когерентности порядка 20 мс, что существенно превысит времена когерентности сверхпроводящего кубита.

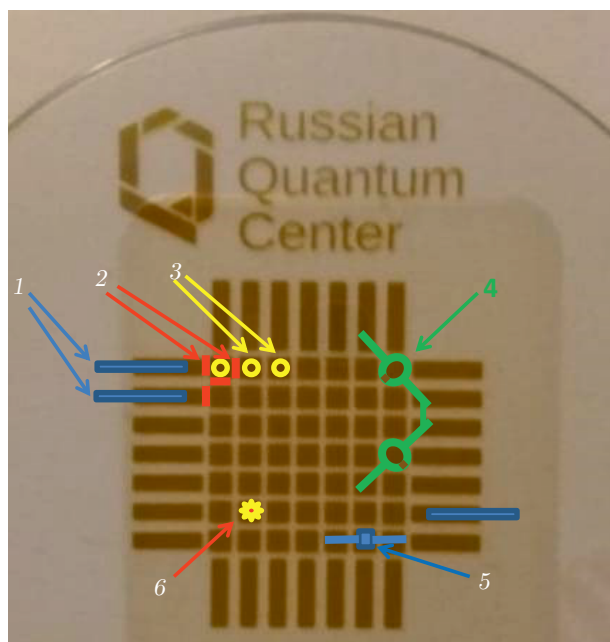
Другим важным достоинством магнонного кубита является его диэлектрические свойства. Дело в том, что основное шумовое воздействие внешней среды возникает за счет электромагнитных волн. Отсутствие электронов проводимости в магнонных кубитах резко увеличивает их помехоустойчивость.

Недавно была предложена новая методика квантовых вычислений, основанная на свойствах так называемых временных кристаллов [61]. Временными кристаллами были названы системы, излучающие

долгоживущий сигнал индукции, т. е. обладающие упорядочением во временном домене. Одной из наиболее перспективных в этом отношении оказалась система сверхтекучего  $^3\text{He}$  в топологической ловушке, названной «Кубол» [37, 62, 63]. Данное направление возможно развить путем создания системы с несколькими магнонными кубитами на основе пленок ЖИГ, помещенных в единый резонатор [64]. Подобные эксперименты дают возможность развить новые подходы к квантовым вычислениям.

В данной работе мы рассматриваем возможность использования спиновой сверхтекучести для построения кубитов, во многом аналогичных сверхпроводящим кубитам. Естественно, для создания различных квантовых состояний необходима существенная миниатюризация образцов до нанометровых размеров. Однако принципы их работы целесообразно исследовать на классических макроскопических образцах с последующей их миниатюризацией. Макроскопический прототип такой системы показан на рис. 7. Предложенная конструкция использует массив элементов из пленки ЖИГ, намагниченной перпендикулярно плоскости. Центральные элементы имеют форму квадратов, а периферийные — прямоугольников. В центральных элементах образуется капля сверхпроводящего спинового состояния, описанная в первых разделах статьи. Периферийные элементы могут быть использованы для ввода–вывода информации при помощи сверхтекучего потока магнонов. Они связаны с полосковыми линиями, соединенными с РЧ-генераторами и приемниками.

В рассматриваемой системе, базирующейся на сверхтекучих свойствах магнонного газа, есть две различные возможности для конструирования кубитов. Во-первых, само явление магнетизма является квантовым. Так, атом со спином  $1/2$  в принципе является идеальным кубитом с его двумя состояниями, основным и возбужденным. Его смешанные квантовые состояния могут быть описаны точками на так называемой сфере Блоха, полюсы которой соответствуют основному и возбужденному состояниям [65]. Магнитоупорядоченные системы являются макроскопическим ансамблем магнитных атомов и после усреднения по всем атомам могут быть описаны в рамках классической физики. Коллективные возбуждения этого состояния, магноны, вновь являются квантовым объектом, представляемым с помощью преобразования Хольштейна – Примакова. При их большой концентрации исчезают недиагональные элементы в матрице плотности, и они представляют собой объект классической физики — спиновые волны. Однако ансамбль неравновесных маг-



**Рис. 7.** Прототип программируемого квантового процессора на основе спинового сверхтекучего состояния. Процессор состоит из матрицы с 49 элементами пленки ЖИГ квадратной формы и 28 прямоугольной формы. Прямоугольные элементы используются для накачки когерентных потоков магнонов в матрицу с заданными параметрами амплитуды и фазы через полосковые линии 1, а также для считывания информации. Программирование квантовых вычислений может осуществляться через соединения с эффектом Джозефсона, управляемые током, который изменяет профиль магнитного поля в области соединения 2. Программирование может осуществляться также путем изменения локального поля на каждом элементе 3. Накачка магнонов и считывание информации могут проводиться также в каждом элементе через резонаторы типа разрезное кольцо 4. Эти резонаторы могут быть также соединены в электронную сеть, что дает возможность связать между собой произвольные элементы. Накачка магнонов и считывание информации с каждого элемента может проводиться также через спиновое взаимодействие с электронами проводимости в пленке металла 5, напыленной на ЖИГ. Обычно для этих целей используется платина. И, наконец, считывание информации может проводиться с помощью лазерного луча 6

нонов достаточной плотности может образовывать БЭК с дальним порядком недиагональных элементов, т.е. являться когерентным квантовым состоянием [66]. В случае взаимодействия отталкивания между магнонами образуется потенциал, который стабилизирует сверхтекучий ток магнонов, что следует из уравнения (6) и продемонстрировано на рис. 1–3.

При каких условиях спиновая сверхтекучесть может быть использована для квантовых вычислений? Здесь напрашивается полная аналогия со сверхпроводимостью. В моделях сверхпроводящих кубитов самым простым является зарядовый кубит [65]. В этом кубите за основное и возбужденное состояния принимаются состояния с числом куперовских пар  $n$  и  $n + 1$  в образце малых размеров. При этом важно, что разница энергий этих состояний различима. В случае спиновой сверхтекучести можно создать аналогичный кубит [67]. Допустим, образец пленки ЖИГ, намагниченной перпендикулярно, имеет размеры порядка  $10^{-14}$  см<sup>3</sup>, как, например, образец в работе [68]. Плотность атомов в ферромагнитной подрешетке ЖИГ составляет величину  $N \sim 10^{22}$  см<sup>-3</sup>. Сдвиг частоты магнитного резонанса в пленке ЖИГ, намагниченной перпендикулярно плоскости, равен приблизительно

$$\Delta\omega(n) = \omega_0(1 + n/3N) \quad (11)$$

за счет возбуждения  $n$  неравновесных магнонов (формула (8)), где  $n = N(1 - \cos\beta)$ . Таким образом, в спектре магнонов появляется ангармоничность, существование которой необходимо для проведения операций с кубитами, состоящими из разного числа магнонов в образце. Следовательно, создание зарядового кубита на магнонной сверхтекучести в принципе возможно.

Аналогично можно предположить и создание фазовых кубитов с использованием джозефсоновского перехода [65]. Спиновое сверхтекучее состояние является квантовым состоянием, описываемым макроскопической волновой функцией (уравнение (2)). Оно характеризуется макроскопической длиной когерентности (уравнение (10)). В нем также был обнаружен магнонный эффект Джозефсона [11]. Кроме того, в идущих сейчас экспериментах нам удалось получить магнонный эффект Джозефсона в перемычке между двумя кристаллами ЖИГ.

На основе циркуляции сверхтекучего магнонного потока возможно изготовить магнонные кубиты, аналогичные фазовому и потоковому кубитам для сверхпроводящих квантовых цепей с применением магнонных сверхтекучих контуров и магнонных джозефсоновских контактов. Поточковый сверхпроводящий кубит основан на эффекте Ааронова–Бома, когда фаза волновой функции электронов завязана с вектор-потенциалом поля. Аналогичный эффект, называемый эффектом Ааронова–Кашера [69] существует также и для потока магнонов. В этом случае электрический ток, пересекающий замкнутый магнонный сверхтекучий контур, при-

водит к изменению набега фазы волновой функции. Соответственно, магنونный СКВИД может измерять электрический ток, пересекающий его контур, а разность фаз на джозефсоновском контакте, соответственно, управляться этим током. Кроме того, разность фаз на магنونном джозефсоновском переходе может меняться за счет изменения электрического поля. Можно предположить, что создание электротехнического резонансного контура, в конденсаторе которого расположены магنونные СКВИДы, настроенные на одинаковую частоту, создаст совершенно новый прибор с уникальными возможностями, рассмотрение свойств которого выходит за рамки данной статьи.

Другим подходом к созданию магنونного кубита является помещение магнитного образца и сверхпроводящего СКВИДа в высокочастотный резонатор. В работе [58] было проведено наблюдение единичного магнона в ферримагнитном кристалле с квантовой эффективностью до 0.71. В ней в качестве квантового датчика был использован сверхпроводящий кубит на эффекте Джозефсона. Было обнаружено запутывание между магностатической модой и сверхпроводящим кубитом. Конечно, задача создания магنونных кубитов находится на начальном этапе. Однако из сказанного выше видно, что перед данным направлением исследований открываются большие перспективы.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная в этой статье спиновая сверхтекучесть была открыта А. С. Боровиком-Романовым с соавторами 35 лет назад, но только сейчас это открытие имеет возможность стать основой для спиновых квантовых суперкомпьютеров. Данное явление детально исследовано низкотемпературным сообществом физиков. К сожалению, магнитное сообщество оставалось слабоинформированным об этом открытии из-за безвременного ухода от нас Андрея Станиславовича. И сейчас, когда возник большой интерес к физике магнонов, даже ведущие теоретики не понимают, что магноны в сверхтекучем  $^3\text{He}$  и в ряде магнетиков описываются одинаковым гамильтонианом и, следовательно, имеют одинаковые свойства. И поэтому спиновая система сверхтекучего  $^3\text{He}$  является прекрасной моделью для исследования свойств магنونики и спиновой сверхтекучести в твердых телах. И, соответственно, разница во взаимодействии магнонов в пленке ЖИГ, намагниченной в плоскости и перпендикулярно ей, приводит к

совершенно различным явлениям. Именно эту фундаментальную разницу мы и рассмотрели в начале данной статьи.

Итак, векторные вычисления с использованием потока магнонов сейчас исследуются в системах с притяжением магнонов. Однако данная система имеет мало общего со сверхтекучим когерентным состоянием. Напротив, состояние спиновой сверхтекучести в системах с отталкиванием магнонов обладает всеми свойствами сверхтекучести. Это первое сверхтекучее состояние, существующее при комнатных температурах, если не считать ядерную материю в пульсарах.

Бозе-конденсация магнонов и спиновая сверхтекучесть могли бы быть обнаружены гораздо раньше в антиферромагнетиках со связанной ядерно-электронной прецессией, так как в них наблюдались эффекты-предвестники. Это — захватное эхо [70], которое образуется на частоте РЧ-возбуждения, а не на частоте линейного резонанса. Кроме того, наблюдался резкий рост времени жизни магнонов при увеличении их концентрации при сильном параметрическом возбуждении [71]. И сейчас стоит вопрос о быстром развитии этой области физики, в истоке которой стоял замечательный физик и человек Андрей Станиславович Боровик-Романов.

**Благодарности.** Я считаю подарком судьбы возможность работать под руководством Андрея Станиславовича. Я также благодарен всем коллегам, с которыми проводились исследования спиновой сверхтекучести и продолжают сейчас в Российском квантовом центре.

**Финансирование.** Исследования и данная работа поддержаны Российским научным фондом (грант № 19-12-00397).

## ЛИТЕРАТУРА

1. F. Arute, K. Arya, R. Babbush et al., *Nature* **574**, 505 (2019).
2. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford (2003).
3. А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, В. В. Дмитриев, Ю. М. Мухарский, Г. К. Твалашвили, ПТЭ № 3, 185 (1985).
4. А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, В. В. Дмитриев, Ю. М. Мухарский, Письма в ЖЭТФ **40**, 256 (1984).

5. И. А. Фомин, Письма в ЖЭТФ **40**, 260 (1984).
6. А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, В. В. Дмитриев, Ю. М. Мухарский, К. Флахбарт, ЖЭТФ **88**, 2025 (1985).
7. Yu. M. Bunkov, J. Magn. Magn. Mater. **310**, 1476 (2007).
8. Yu. M. Bunkov and G. E. Volovik, J. Low Temp. Phys. **150**, 135, (2008).
9. А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, В. В. Дмитриев, Ю. М. Мухарский, Письма в ЖЭТФ **45**, 98 (1987).
10. A. S. Borovik-Romanov, Yu. M. Bunkov, V. V. Dmitriev, Yu. M. Mukharskiy, D. A. Sergatskov, Phys. Rev. Lett. **62**, 1631 (1989).
11. А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, А. де Вард, В. В. Дмитриев, В. Макроциева, Ю. М. Мухарский, Д. А. Сергацков, Письма в ЖЭТФ **47**, 400 (1988).
12. A. S. Borovik-Romanov, Yu. M. Bunkov, V. V. Dmitriev, Yu. M. Mukharskiy, and D. A. Sergatskov, Physica B **165**, 649 (1990).
13. Ю. М. Буньков, В. В. Дмитриев, Ю. М. Мухарский, Письма в ЖЭТФ **43**, 131 (1986).
14. Yu. M. Bunkov, V. V. Dmitriev, and Yu. M. Mukharskiy, Physica B **178**, 196 (1992).
15. M. Kupka and P. Skyba, Phys. Rev. B **85**, 184529 (2012).
16. А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, В. В. Дмитриев, Ю. М. Мухарский, Письма в ЖЭТФ **39**, 390 (1984).
17. P. L. Kapitza, Nature **3558**, 74 (1938).
18. F. London, *Superfluids*, Vol. II, Wiley, New York (1954).
19. A. Einstein, Sber. Preuss. Akad. Wiss. **22**, 261 (1924); **1**, 3 (1925).
20. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).
21. K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrewes, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
22. L. D. Landau, J. Phys. USSR **5**, 71 (1941).
23. M. G. Vasin, V. N. Ryzhov, and V. M. Vinokur, arXiv:1712.00757 (2018).
24. Yu. M. Bunkov and V. L. Safonov, J. Magn. Magn. Mater. **452**, 30 (2018).
25. C. N. Yang, Rev. Mod. Phys. **34**, 694 (1962).
26. Yu. M. Bunkov and G. E. Volovik, J. Phys.: Condens. Matter **22**, 164210 (2010).
27. Yu. M. Bunkov and G. E. Volovik, J. Low Temp. Phys. **150**, 135 (2008).
28. Yu. M. Bunkov and G. E. Volovik, in *Novel Superfluids*, Ch. 4, ed. by Bennemann and Ketterson, Oxford Univ. Press, Oxford (2013).
29. Yu. M. Bunkov, Jpn. J. Appl. Phys **26**, 1809 (1987).
30. А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, В. В. Дмитриев, Ю. М. Мухарский, Письма в ЖЭТФ **45**, 98 (1987).
31. Yu. M. Bunkov, Spin **9**, 1940005 (2019).
32. Yu. M. Bunkov, A. Farhutdinov, A. N. Kuzmichev, T. R. Safin, P. M. Vetoshko, V. I. Belotelov, and M. S. Tagirov, arXiv:1911.03708 (2019).
33. Ю. М. Буньков, П. М. Ветошко, А. Н. Кузьми-чѐв, Г. В. Мамин, С. Б. Орлинский, Т. Р. Сафин, В. И. Белогелов, М. С. Тагиров, Письма в ЖЭТФ **111**, 52 (2020).
34. Ю. М. Буньков, А. В. Клочков, Т. Р. Сафин, К. Р. Сафиуллин, М. С. Тагиров, Письма в ЖЭТФ **109**, 43 (2019).
35. Ю. М. Буньков, А. В. Клочков, Т. Р. Сафин, К. Р. Сафиуллин, М. С. Тагиров, Письма в ЖЭТФ **106**, 646 (2017).
36. R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Basic Books (2011).
37. S. Autti, V. B. Eltsov, and G. E. Volovik, Phys. Rev. Lett. **120**, 215301 (2018).
38. S. N. Fisher, G. R. Pickett, P. Skyba, and N. Suramlishvili, Phys. Rev. B **86**, 024506 (2012).
39. A. V. Chumak, A. A. Serga, and B. Hillebrands, J. Phys. D: Appl. Phys. **50**, 244001 (2017).
40. Ю. М. Буньков, В. В. Дмитриев, Ю. М. Мухарский, ЖЭТФ **88**, 1218 (1985).
41. И. А. Фомин, Письма в ЖЭТФ **39**, 387 (1984).
42. P. Nowik-Boltyk, O. Dzyapko, V. E. Demidov, N. G. Berloff, and S. O. Demokritov, Sci. Rep. **2**, 482 (2012).
43. C. Sun, T. Nattermann, and V. L. Pokrovsky, J. Phys. D: Appl. Phys. **50**, 143002 (2017).

44. S. O. Demokritov, V. E. Demidov, O. Dzyapko, G. A. Melkov, A. A. Serga, B. Hillebrands, and A. N. Slavin, *Nature* **443**, 430 (2006).
45. D. Snoko, *Nature* **443**, 403 (2006).
46. T. Fischer, M. Kewenig, D. A. Bozhko, A. A. Serga, I. I. Syvorotka, F. Ciubotaru, C. Adelman, B. Hillebrands, and A. V. Chumak, *Appl. Phys. Lett.* **110**, 152401 (2017).
47. A. Khitun, *J. Appl. Phys.* **111**, 054307 (2012).
48. A. Bérut, A. Arakelyan, A. Petrosyan, S. Ciliberto, R. Dillenschneider, and E. Lutz, *Nature* **483**, 187 (2012).
49. D. A. Bozhko, A. J. E. Kreil, H. Yu. Musiienko-Shmarova, A. A. Serga, A. Pomyalov, V. S. L'vov, and B. Hillebrands, *Nature Comm.* **10**, 2460 (2019).
50. V. Tiberkevich, I. V. Borisenko, P. Nowik-Boltyk, V. E. Demidov, A. B. Rinkevich, S. O. Demokritov, and A. N. Slavin, *Sci. Rep.* **9**, 9063 (2019).
51. M. Krawczyk and D. Grundler, *J. Phys.: Condens. Matter* **26**, 123202 (2014).
52. S. Klingler, P. Pirro, T. Brächer, B. Leven, B. Hillebrands, and A. V. Chumak, *Appl. Phys. Lett.* **106**, 212406 (2015).
53. C. Simon, *Phys. Rev. A* **66**, 052323 (2002).
54. T. S. Humble, H. Thapliyal, E. Munoz-Coreas, F. A. Mohiyaddin, and R. S. Bennink, arXiv:1804.10648 (2018).
55. B. Bhoi, T. Cliff, I. S. Maksymov, M. Kostylev, R. Aiyar, N. Venkataramani, S. Prasad, and R. L. Stamps, *J. Appl. Phys.* **116**, 243906 (2014).
56. L.V. Abdurakhimov, D. Konstantinov, and Yu. Bunkov, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 226402 (2015).
57. J. W. Rao, S. Kaur, B. M. Yao, E. R. J. Edwards, Y. T. Zhao, X. Fan, D. Xue, T. J. Silva, Y. S. Gui, and C. M. Hu, *Nature Comm.* **10**, 2934 (2019).
58. D. Lachance-Quirion, S. P. Wolski, Y. Tabuchi, S. Kono, K. Usami, and Y. Nakamura, *Science* **367**, 425 (2020).
59. D. Lachance-Quirion, Y. Tabuchi, A. Gloppe, K. Usami, and Y. Nakamura, arXiv:1902.03024 (2019).
60. G. Dionne and G. Fitch, *J. Appl. Phys.* **87**, 4963 (2000).
61. C. H. Wu, *Int. J. Eng. Sci. Invention* **8**, 5, 1 (2019).
62. Yu. M. Bunkov and G. E. Volovik, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 265302 (2007).
63. S. Autti, Yu. M. Bunkov, V. B. Eltsov et al., *Phys. Rev. Lett.* **108**, 145303 (2012).
64. M. X. Bi, X. H. Yan, Y. Xiao, and C. J. Dai, *J. Appl. Phys.* **126**, 173902 (2019).
65. A. F. Kockum and F. Nori, arXiv:1908.09558 (2019).
66. G. E. Volovik, *J. Low Temp. Phys.* **153**, 266 (2008).
67. S. N. Andrianov and S. A. Moiseev, *Phys. Rev. A* **90**, 042303 (2014).
68. Y. Li, V. V. Naletov, O. Klein, J. L. Prieto, M. Munoz, V. Cros, P. Bortolotti, A. Anane, C. Serpico, and G. de Loubens, *Phys. Rev. X* **9**, 041036 (2019).
69. E. N. Bogachek and U. Landman, *Phys. Rev. B* **50**, 2678 (1994).
70. Ю. М. Буньков, Б. С. Думеш, *ЖЭТФ* **68**, 1161 (1975).
71. В. В. Кведер, Б. Я. Котюжанский, Л. А. Прозорова, *ЖЭТФ* **63**, 2205 (1972).