

# УЧЕТ ВРАЩЕНИЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ФОРМЫ ЕЕ ТЕНИ В РАСШИРЕННЫХ МОДЕЛЯХ ГРАВИТАЦИИ

С. О. Алексеев<sup>a,b</sup>, В. А. Прокопов<sup>a,c\*</sup>

<sup>a</sup> Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119234, Москва, Россия

<sup>b</sup> Кафедра квантовой теории и физики высоких энергий, Физический факультет,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119234, Москва, Россия

<sup>c</sup> Кафедра астрофизики и звездной астрономии, Физический факультет,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119234, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 ноября 2019 г.,  
после переработки 26 ноября 2019 г.  
Принята к публикации 23 декабря 2019 г.

С получением изображения тени сверхмассивной черной дыры в центре галактики М87 открылась новая эра в наблюдениях компактных объектов, а улучшение разрешения подобных наблюдений позволит использовать их для проверки расширенных теорий гравитации на масштабах горизонта событий. Мы усовершенствовали метод учета вращения для вычисления параметров тени черной дыры с учетом поправок от расширенных теорий гравитации. Показано, что тень черной дыры с диаметром, меньшим  $4R_{Sw}$  шварцшильдовского радиуса ( $R_{Sw} = 2M$ ), невозможно описать только в рамках метрики Керра–Ньюмана, поэтому обнаружение тени такого размера покажет необходимость учета следующих членов разложения, что даст новые указания о теории гравитации, реализующейся на рассматриваемом пространственно-временном масштабе.

DOI: 10.31857/S0044451020050041

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общая теория относительности (ОТО), являясь общепризнанной теорией гравитации, предоставляет корректное описание широчайшего спектра гравитационных явлений [1, 2]. В то же время, существование таких феноменов, как темная материя и темная энергия, дает основание полагать, что ОТО корректно описывает гравитационные явления лишь в ограниченном диапазоне пространственно-временных масштабов [3–5]. Поэтому в настоящее время в литературе широко обсуждаются базовые физические принципы, которые можно положить в основу модификации ОТО [6, 7]. Таким образом, спектр таких модифицированных теорий включает в себя разнообразные мо-

дели  $f(R)$  гравитации, скалярно-тензорные теории, включая модели Хорндески [8–10].

Модель модифицированной гравитации стоит рассматривать как альтернативу ОТО в случае лучшего описания ею гравитационных явлений, хотя бы на каком-то одном пространственно-временном масштабе. Вследствие этого, особый интерес представляют модели, удовлетворяющие, прежде всего, гравитационным тестам в Солнечной системе, а именно, модели, чьи постньютоновские (а также посткеплеровские) параметры согласуются с эмпирическими данными [1, 7, 11]. С получением изображения тени сверхмассивной черной дыры (ЧД) в центре галактики М87 [12] открывается новая возможность для проверки расширенных теорий гравитации на масштабах горизонтов событий. Существует надежда обнаружить на таких масштабах эффекты поправок к ОТО, быстро ослабевающие с расстоянием [13, 14].

Метрику Шварцшильда (как самую простую модель) можно расширить, учтя приливный заряд,

\* E-mail: slaprok777@gmail.com

являющийся эффективным проявлением дополнительных измерений [15]. Таким образом, метрика Рейснера – Нордстрёма приобретет дополнительный смысл, так как знак приливного заряда может быть противоположен знаку электромагнитного [16]. Само расширение выглядит как добавление в метрическую функцию следующего члена разложения по  $1/r$ . Поэтому в самом общем случае для любой модифицированной теории гравитации компоненту  $g_{00}$  можно представить в виде бесконечного ряда (фактически, это ряд Тейлора), численные коэффициенты которого будут заданы теорией. Например, в случае модели эффективного действия струнной гравитации с поправками второго порядка по кривизне — модель Гаусса – Боне [17, 18] — численное решение аппроксимировано именно таким полиномом. Ранее [19] мы исследовали влияние такого расширения на форму тени для невращающейся ЧД и радиус ее последней устойчивой орбиты. В настоящей работе мы обобщим эти результаты на случай вращения ЧД. Здесь необходимо отметить, что вращение искажает форму тени, превращая фотонную сферу в набор различных орбит, благодаря чему каждая точка края тени становится уникальной пробой потенциала ЧД, т.е. по форме тени можно определить или существенно ограничить параметры разложения в ряд метрики ЧД.

В разд. 2 мы обсудим метод генерации вращающегося решения из невращающегося, разд. 3 посвящен построению тени для вращающейся ЧД, в разд. 4 мы обсудим полученные формы теней, а разд. 5 посвящен сделанным нами выводам.

Все расчеты представлены в планковской системе единиц ( $G = c = \hbar = 1$ ).

## 2. МЕТРИКА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Для получения метрики вращающейся ЧД воспользуемся методом, предложенным в [20] и развитым нами в [21]. Итак, с помощью алгоритма Ньюмана – Яниса [22] из метрики вида

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1)$$

можно получить описание пространства-времени следующей структуры:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4m(r)ar \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{2m(r)a^2 r \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2)$$

где

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta(r) = r^2 - 2m(r)r + a^2, \quad (3)$$

$a = J/M$  — угловое ускорение ЧД,  $M$  — ее масса, а  $J$  — угловой момент. Положив

$$m(r) = M - \frac{Q^2}{2r}, \quad (4)$$

где  $Q$  — электрический заряд, получим, что этот алгоритм превращает метрику Рейснера – Нордстрёма в метрику Керра – Ньюмана [22, 23]. Для ЧД с приливным зарядом

$$m(r) = M - \frac{q}{2r}, \quad (5)$$

где  $q$  — это приливный заряд. Еще раз напомним, что, в отличие от электрического заряда, параметр  $q$  может быть как положительным, так и отрицательным.

Далее необходимо отметить, что метрики Шварцшильда, Рейснера – Нордстрёма, Керра – Ньюмана не всегда являются точными решениями в расширенной теории гравитации, часто играя роль лишь первого приближения. Итак, если в невращающемся случае метрическая функция представима как бесконечный ряд Тейлора по  $1/r$ , то ( $\Delta = g_{00}$ )

$$\Delta = 1 - \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C_3}{r^3} + \dots \quad (6)$$

Под  $C_1$  можно понимать удвоенную Массу ЧД, под  $C_2$  — какой-либо из ее зарядов. Если помимо этих членов в разложении следующие коэффициенты не равны нулю, то их вклад сильнее ослабевает с расстоянием. Примером наблюдений, в которых возможно их обнаружить, является сильное гравитационное линзирование и его предельный случай — тень ЧД [12], для которой уже получены первые изображения. Однако разрешения пока недостаточно для анализа формы тени, поэтому мы оценим необходимую точность наблюдений для определения последующих членов разложения.

Применяя алгоритм Ньюмана – Яниса к метрической функции (6), получаем метрику (2)

$$m(r) = M - \frac{q}{2r} - \frac{C_3}{2r^2} - \dots - \frac{C_n}{2r^{n-1}} - \dots, \quad (7)$$

где мы ограничимся анализом  $C_3$ .

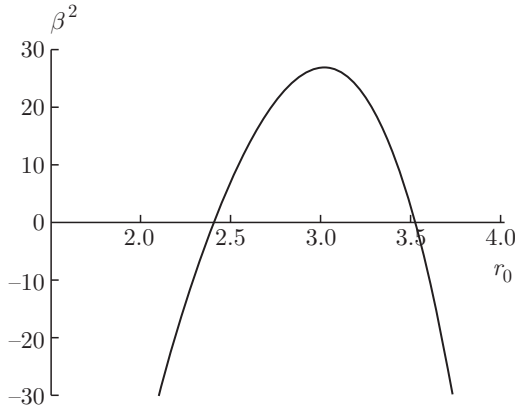


Рис. 1. Диапазон значений  $r_0$ , в котором  $\beta^2 > 0$

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ ТЕНИ В СЛУЧАЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Согласно методу [20] для построения тени вращающейся ЧД необходимо получить функции

$$\begin{aligned} \xi_- &= \frac{4m_0r_0^2 - (r_0 + f_0m_0)(r_0^2 + a_0^2)}{a(r_0 - f_0m_0)}, \\ \eta_- &= \frac{r_0^3[4(2-f_0)a^2m_0 - r_0(r_0 - (4-f_0)m_0)^2]}{a^2(r_0 - f_0m_0)^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$f_0 = 1 + \frac{m'(r_0)r_0}{m(r_0)}, \quad (9)$$

а  $r_0$  — радиус фотонной орбиты, соответствующий краю тени. Каждой точке края тени вращающейся ЧД соответствует свой  $r_0$ . Аналогично [20] эти функции можно перевести в координаты  $[\alpha, \beta]$  картинной плоскости следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi_-}{\sin \theta_i}, \\ \beta &= \pm \sqrt{\eta_- + (a - \xi_-)^2 - \left(a \sin \theta_i - \frac{\xi_-}{\sin \theta_i}\right)^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\theta_i$  — угол наклона оси вращения ЧД к лучу зрения. Знак «+» соответствует верхней части тени, а «-» — нижней. Чтобы получить диапазон  $r_0$ , соответствующий всем точкам края тени, необходимо решить следующее уравнение:

$$\beta^2 = 0, \quad (11)$$

выбрав те корни, между которыми  $\beta^2 > 0$  (рис. 1). В настоящей работе это сделано с использованием численных методов.

Итак, для метрики (2) с учетом (7) функции  $\xi_-$  и  $\eta_-$  выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_- &= \frac{4r_0^2\xi_A - (r_0^2 + a^2)\xi_B}{a\xi_C}, \\ \eta_- &= \frac{r_0^3[\eta_A a^2 - r_0\eta_B^2]}{a^2\eta_C^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

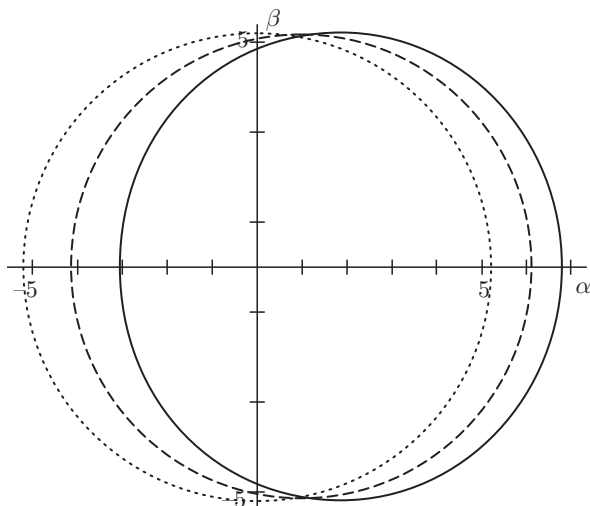
где

$$\begin{aligned} \xi_A &= M - \frac{q}{2r_0} - \frac{C_3}{2r_0^2} - \dots - \frac{C_n}{2r_0^{n-1}} - \dots, \\ \xi_B &= r_0 + M + \frac{C_3}{2r_0^2} + \dots + \frac{(n-2)C_n}{2r_0^{n-1}} + \dots, \\ \xi_C &= r_0 - M - \frac{C_3}{2r_0^2} - \dots - \frac{(n-2)C_n}{2r_0^{n-1}} - \dots, \\ \eta_A &= 4M - \frac{4q}{r_0} - \frac{6C_3}{r_0^2} - \dots - \frac{2nC_n}{r_0^{n-1}} - \dots, \\ \eta_B &= r_0 - 3M + \frac{2q}{r_0} + \frac{5C_3}{2r_0^2} + \dots + \frac{(n+2)C_n}{2r_0^{n-1}} + \dots, \\ \eta_C &= r_0 - M - \frac{C_3}{2r_0^2} - \dots - \frac{(n-2)C_n}{2r_0^{n-1}} - \dots \end{aligned}$$

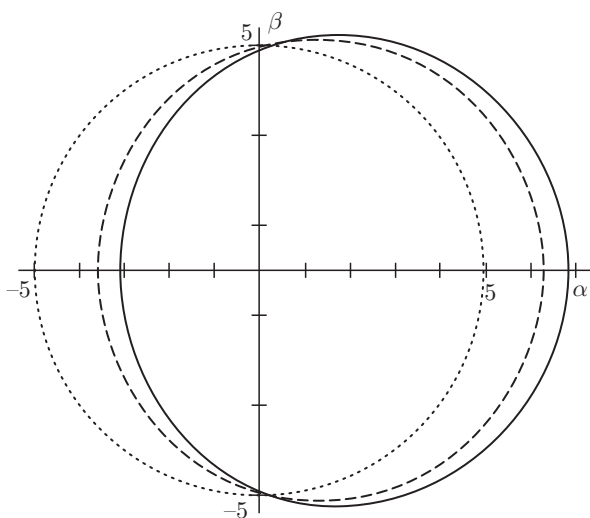
Для удобства можно нормализовать полученную модель на массу ЧД  $M$ , тогда величины  $r$  и  $a$  будут измеряться в единицах  $M$ , а коэффициенты разложения  $C_n$  в единицах  $M^n$ .

### 4. АНАЛИЗ ТЕНЕЙ

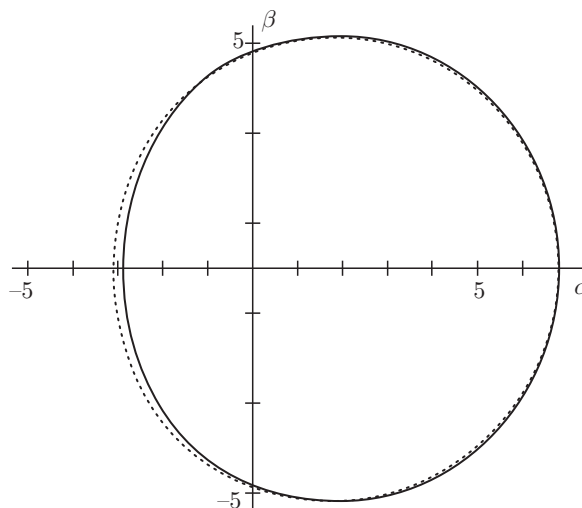
Под размером тени будем понимать ее диаметр вдоль оси вращения. Таким образом, если угол наклона  $\theta_i$  равен  $\pm\pi/2$ , размеры теней вращающейся и покоящейся ЧД совпадут (рис. 2). Далее, как видно на рис. 3, при уменьшении угла наклона тень также уменьшается. В предельном случае  $\theta_i = 0$  тень станет симметрично круглой (как и у невращающейся ЧД), но сжатой из-за вращения. Ранее [19] мы показали, что один и тот же размер тени может соответствовать разным невращающимся ЧД. Например, у ЧД с параметрами  $q = 0.17, C_3 = -0.5$  тень совпадет со шварцшильдовским случаем. Поэтому необходимо несколько разных наблюдений ЧД для точного определения ее параметров. Далее, каждая точка края тени вращающейся ЧД может быть использована как уникальная проба потенциала ЧД (7), так как ей соответствует свой радиус фотонной орбиты  $r_0$ . Чем шире диапазон  $r_0$ , тем легче найти различия в потенциале ЧД. Именно поэтому наилучшей точкой обзора является угол наклона  $\theta_i = \pm\pi/2$ . В случае  $\theta_i = 0$  уже невозможно отличить уменьшение размера тени за счет заряда, спина или параметров разложения, не используя другие наблюдения ЧД.



**Рис. 2.** Зависимость формы теней черной дыры от момента вращения. Черная дыра видна под углом  $\theta_i = -\pi/2$  при значениях приливного заряда и третьей поправки, равных, соответственно,  $q = 0.17, C_3 = -0.5$ . Пунктир соответствует невращающемуся случаю ( $a = 0$ ), штриховая линия — среднему значению отношения момента вращения к массе, равному  $a = 0.5$ , сплошная — быстрому вращению с  $a = 0.9$ . Ось вращения направлена вдоль оси  $\beta$



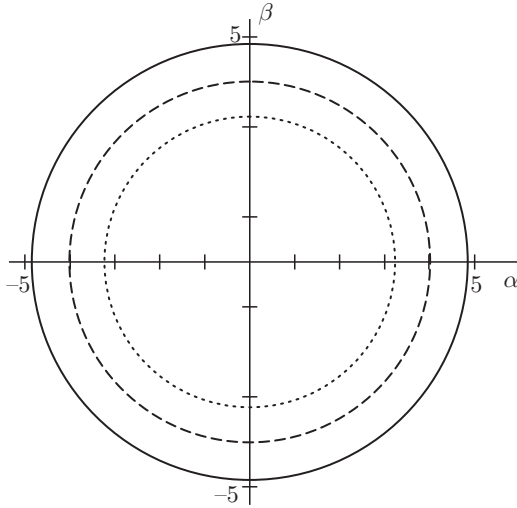
**Рис. 3.** Зависимость формы теней черной дыры от угла, под которым ее наблюдают. Черная дыра имеет значения приливного заряда, третьей поправки и отношения момента вращения к массе, равные соответственно  $q = 0.17, C_3 = -0.5, a = 0.9$ . Пунктиром обозначена тень, видимая под углом  $\theta_i = 0$ , штриховая линия —  $\theta_i = -\pi/4$ , сплошная линия —  $\theta_i = -\pi/2$ . Ось вращения ЧД направлена вдоль оси  $\beta$



**Рис. 4.** Сравнение теней черных дыр с одинаковым значением отношения момента вращения к массе, равным  $a = 0.9$ , но с различающимися значениями приливного заряда и третьей поправки. Пунктиром обозначена тень от черной дыры с приливным зарядом и третьей поправкой, равными соответственно  $q = 0.17, C_3 = -0.5$ . Сплошной линией обозначена тень от черной дыры с приливным зарядом и третьей поправкой, равными соответственно  $q = 0, C_3 = 0$ . Ось вращения черной дыры направлена вдоль оси  $\beta$ , угол наклона равен  $\theta_i = -\pi/2$

Для оценки необходимой точности наблюдений сравним тени ЧД с разными параметрами, но имеющие одинаковый размер при наблюдении с  $\theta_i = -\pi/2$ . Например, керровскую ( $q = 0, C_3 = 0$ ) и с ( $q = 0.17, C_3 = -0.5$ ). При отсутствии вращения их тени совпадут, но с увеличением скорости вращения расстояние между двумя соответствующими точками тени будет увеличиваться. Для наблюдения из экваториальной плоскости место с наибольшим расхождением находится со стороны, где тень наиболее сжата из-за вращения. При среднем значении отношения момента к массе, равном 0.5, это расстояние порядка  $0.05M$ , что составляет всего 0.5% от размера тени. Для быстро вращающейся ЧД с отношением момента к массе, равным 0.9, это расстояние станет  $0.2M$  (рис. 4), что составляет 2% от размера тени (порядка  $1 \mu\text{as}$  для Sag A\* и M87\*). Поэтому ЧД с более быстрым вращением лучше подходят для оценки или ограничения ее параметров по форме ее тени.

Наименее удачная позиция для наблюдения тени вращающейся ЧД — это  $\theta_i = 0$ . Однако существуют пределы, до которых тень можно «уменьшить» посредством «изменения» вращения и заряда, не превращая объект в голую сингулярность. В случае



**Рис. 5.** Минимальные размеры теней черных дыр с вращением и разными значениями приливного заряда, видимых под углом наклона, равным  $\theta_i = 0$ . Сплошная линия соответствует минимальному размеру тени керровской черной дыры (значения приливного заряда, третьей поправки и отношения момента вращения к массе, равны соответственно  $q = 0$ ,  $C_3 = 0$ ,  $a = 1$ ). Штриховая линия соответствует минимальному размеру черной дыры Керра–Ньюмана (значения приливного заряда, третьей поправки и отношения момента вращения к массе, равны соответственно  $q = 1$ ,  $C_3 = 0$ ,  $a = 0$ ). Пунктир соответствует черной дыре, метрика которой включает третью поправку (значения приливного заряда, третьей поправки и отношения момента вращения к массе равны соответственно  $q = 1.4$ ,  $C_3 = -0.5$ ,  $a = 0.5$ )

ЧД Керра–Ньюмана минимальный размер достигается при критическом заряде  $q = 1$  и равен  $4R_{Sw}$  шварцшильдовским радиусам ( $R_{Sw} = 2M$ ) (рис. 5). При учете следующих поправок можно построить сколь угодно малую тень ЧД [19]. Считаю чрезвычайно важным подчеркнуть, что тень ЧД с размером, меньшим  $4R_{Sw}$ , невозможно описать метрикой Керра–Ньюмана, поэтому обнаружение тени такого размера покажет необходимость учета следующих членов разложения, что даст новые указания о теории гравитации, реализующейся на рассматриваемом пространственно-временном масштабе.

## 5. ВЫВОДЫ

С ростом разрешения инструментов, используемых для наблюдений теней черных дыр, станет возможным прямое использование этих наблюдательных данных для проверки и селекции расширенных теорий гравитации. Разрешение,

достигнутое в наблюдении M87, составило около половины размера тени ( $20 \mu\text{as}$ ) [12], что является недостаточным даже для определения момента вращения. При значительном улучшении разрешения такие наблюдения можно будет использовать и для измерения и/или селекции расширенных теорий гравитации, создав на основе этих данных аналог ППН формализма [1]. Однако возможен уникальный случай, когда, как и в невращающемся случае, размер тени окажется менее  $4R_{Sw}$ , при этом для моделирования тени недостаточно лишь метрики Керра–Ньюмана или учета других процессов (например, [24, 25]). Обнаружение подобного размера тени сразу покажет необходимость учета расширенных теорий гравитации.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ «Ведущая научная школа *Физика звезд, релятивистских объектов и галактик*».

## ЛИТЕРАТУРА

1. C. V. Will, Living Rev. Rel. **17**, 4 (2014).
2. D. H. Abbott и др. (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **116**, 221101 (2016).
3. S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 123 (1989).
4. D. Clowe, M. Bradac, A. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones, and D. Zaritsky, Astrophys. J. **648**, L109 (2006).
5. P. A. R. Ade и др. (Planck Collaboration), Astron. Astrophys. **594**, A13 (2006).
6. S. Capozziello and M. De Laurentis, Phys. Rep. **509**, 167 (2011).
7. E. Berti и др., Class. Quant. Grav. **32**, 243001 (2015).
8. T. P. Sotiriou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010).
9. A. De Felice and S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010).
10. C. Charmousis, E. J. Copeland, A. Padilla, and P. M. Saffin, Phys. Rev. Lett. **108**, 051101 (2012).
11. P. I. Dyadina, N. A. Avdeev, and S. O. Alexeyev, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **483**, 947 (2019).
12. K. Akiyama и др. (Event Horizon Telescope), Astrophys. J. **875**, L1 (2019).
13. A. F. Zakharov, Phys. Rev. D **90**, 062007 (2014).

14. A. F. Zakharov, *Eur. Phys. J. C* **78**, 689 (2018).
15. N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, and V. Rezanian, *Phys. Lett. B* **487**, 1 (2000).
16. С. О. Алексеев, Д. А. Стародубцева, *ЖЭТФ* **138**, 652 (2010).
17. S. Alexeev and M. Pomazanov, *Phys. Rev. D* **55**, 2110 (1997).
18. С. О. Алексеев, К. А. Ранну, *ЖЭТФ* **141**, 463 (2012).
19. С. О. Алексеев, Б. Н. Латош, В. А. Прокопов, Е. Д. Емцова, *ЖЭТФ* **155**, 847 (2019).
20. N. Tsukamoto, *Phys. Rev. D* **97**, 064021 (2018).
21. V. Prokopov and S. Alexeyev, *Int. J. Mod. Phys. A* **35** (2020).
22. E. T. Newman and A. I. Janis, *J. Math. Phys.* **6**, 915 (1965).
23. E. T. Newman, R. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, *J. Math. Phys.* **6**, 918 (1965).
24. V. Perlick, O. Tsupko, and G. S. Bisnovatyi-Kogan, *Phys. Rev. D* **92**, 104031 (2015).
25. G. S. Bisnovatyi-Kogan and O. Tsupko, *Phys. Rev. D* **98**, 084020 (2018).