

МОРФОЛОГИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ ПУЗЫРЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ РОСТА. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

А. С. Черноскотов^а, Л. М. Мартюшев^{а,б}*

^а *Уральский государственный технический университет
620002, Екатеринбург, Россия*

^б *Институт промышленной экологии Уральского отделения Российской академии наук
620219, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 11 ноября 2019 г.,
после переработки 11 ноября 2019 г.
Принята к публикации 28 ноября 2019 г.

Проведен линейный анализ на морфологическую устойчивость круглого пузыря, нестационарно растущего в двумерной жидкости. Изменением температуры и вязкостью пренебрегается, среды считаются несжимаемыми, а давление внутри пузырька считается постоянным. Начиная с некоторого критического размера (кинетической спинодали), наблюдается переход от устойчивого к неустойчивому росту, что является принципиальным отличием от известного решения для трехмерного случая. Получено приближенное уравнение для расчета спинодали.

DOI: 10.31857/S0044451020040057

1. ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивые процессы в двухфазных средах очень распространены в природе, в частности при кристаллизации, кипении, течении жидкостей [1–6]. Важной характеристикой подобных процессов является форма движущейся границы раздела фаз и ее морфологическая устойчивость. Если поверхность раздела оказывается морфологически не устойчивой, то возникает переход от одной ее формы к другой (часто существенно более сложной). Подобные переходы относят к кинетическим (морфологическим, неравновесным) фазовым переходам. Интересно отметить, что, как и для равновесных фазовых переходов, здесь наблюдаются переходы разного рода, вводится понятие спинодали и бинодали, а также существует неравновесный потенциал, описывающий морфологический переход. Эти примеры можно найти в многочисленных работах (см., например, [5–17]).

подавляющее большинство анализов на морфологическую устойчивость границ раздела выполне-

но либо для наиболее практически важных трехмерных случаев (в частности, при кристаллизации [4, 7–10], кипении [15–17]), либо для квазидвумерных случаев (в частности, при вытеснении одной жидкости другой в ячейке Хеле–Шоу [2, 3, 11–14]). Расчеты морфологической устойчивости фазовой границы для двумерных неравновесных систем практически нет. Авторы знают лишь одно направление работ, в котором изучается морфологическая устойчивость при кристаллизации в квазистационарных условиях изначально круглой частицы [7, 10]. При этом никаких новых эффектов в результате решения данной задачи по сравнению с трехмерным случаем не было обнаружено. Имелись лишь некоторые количественные отличия. Одной из причин этого являлось рассмотренное квазистационарное приближение. Вместе с тем, как известно из физики классических (равновесных) фазовых переходов, пространственная размерность системы имеет очень важное значение для фазового перехода. В частности, для ряда широко используемых моделей (в частности, модели Изинга) при изменении размерности системы переход может вообще исчезнуть [18, 19]. Теоретически интересно найти подобный пример в случае неравновесных (кинетических) морфологических переходов. Здесь необходимо так-

* E-mail: leonidmartyushev@gmail.com

же отметить, что рассмотрение эволюции формы межфазной границы двумерных систем при неравновесных условиях не только имеет академический интерес, но и приобретает в настоящее время особое практическое значение в связи огромным вниманием к двумерным материалам.

В данной работе рассматривается морфологическая устойчивость растущего газового пузырька в жидкости в динамическом (инерционном) режиме роста. Ранее данная задача неоднократно в разных приближениях решалась в трехмерном случае для сферического пузыря [1, 15–17]. В рамках линейного анализа морфологической устойчивости было обнаружено, что поверхность подобного пузыря в нестационарном приближении асимптотически всегда морфологически устойчива по отношению к бесконечно малым гармоническим возмущениям поверхности. Таким образом, для трехмерной системы отсутствует неравновесный морфологический переход при наличии бесконечно малых воздействий (другими словами, отсутствует кинетическая спинопаль). Изменится ли принципиально решение этой задачи, если рассмотреть двумерный случай (рост круглого пузырька)? Этот вопрос является интересным с теоретической точки зрения и в литературе рассмотрен не был. Поэтому, целью данной работы стало аналитическое решение подобной двумерной задачи в нестационарном приближении.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется двумерная система с круговой симметрией. Система размера \mathfrak{R}_∞ заполнена жидкостью, в центре имеется круглый газовый пузырек. Размеры пузыря относительно малы, $\mathfrak{R}_c \ll \mathfrak{R} \ll \mathfrak{R}_\infty$, где \mathfrak{R}_c — некоторый минимальный радиус пузыря. Будем считать, что плотность жидкости ρ значительно выше плотности газа. Рассматривается так называемое динамическое приближение [15–17], т. е. пренебрегается изменениями температуры и вязкостью в газе и жидкости, эти среды считаются несжимаемыми, а давление внутри пузырька считается постоянным p_0 . Это приближение в литературе, связанной с парообразованием при кипении, иногда называют инерционным [1]. Давление в жидкости π изменяется и на расстоянии \mathfrak{R}_∞ от пузырька равно π_∞ ($\pi_0 > \pi_\infty$). Движение предполагается безвихревым (потенциальным).

Для описания роста пузыря достаточно рассмотреть задачу о движении лишь жидкости, ограниченной поверхностью пузыря. Исходя из постановки

задачи, это движение описывается уравнением Бернулли, которое совместно с уравнением непрерывности в безразмерном виде имеет вид

$$\int dp = \frac{\partial \phi}{\partial R} \dot{R} - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2, \tag{2.1}$$

$$\nabla^2 \phi = 0, \tag{2.2}$$

где $\dot{R} = dR/dt$ — скорость роста пузыря, R — радиус пузыря, t — время, ϕ — потенциал безразмерной скорости ($\mathbf{v} = -\nabla \phi$), который на большом расстоянии от пузырька удовлетворяет выражению $\phi|_{R_\infty} = 0$. Для приведения к безразмерному виду использовались \mathfrak{R}_c , ρ и поверхностное натяжение σ между двумя средами:

$$R = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_c}, \quad p = \frac{\mathfrak{R}_c}{\sigma} \pi, \quad R_\infty = \frac{\mathfrak{R}_\infty}{\mathfrak{R}_c}, \quad \mathfrak{R}_c = \frac{\sigma}{\pi_0 - \pi_\infty}.$$

Отметим, что в двумерной среде размерности σ , π и ρ соответственно [Н], [Н·м⁻¹] и [кг·м⁻²].

Рассмотрим возмущение круглой фазовой границы бесконечно малым гармоническим возмущением моды n . Уравнение для возмущенной поверхности r_s в полярной системе координат (r, φ) и безразмерном виде запишется в виде

$$r_s = R + \delta \cos(n\varphi), \tag{2.3}$$

где δ — амплитуда возмущения.

В этом случае потенциал скоростей удовлетворяет следующему граничному условию:

$$-\left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{r_s} = \dot{R} + \frac{\partial \delta}{\partial R} \dot{R} \cos(n\varphi), \tag{2.4}$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности.

Можно показать, что в линейном порядке [12]

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{r_s} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r_s} + \frac{\delta n}{r^2} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right|_{r_s} \delta \sin(n\varphi). \tag{2.5}$$

Перепад давления на границе раздела удовлетворяет граничному условию [18]

$$p_0 - p|_{r_s} = K, \tag{2.6}$$

где K — кривизна поверхности в плоскости движения, которая в линейном порядке имеет вид [12]

$$K = \frac{1}{R} + \frac{\delta}{R^2} (n^2 - 1) \cos(n\varphi). \tag{2.7}$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МОРФОЛОГИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Представим давление и потенциал скоростей степенным рядом, ограничившись первым порядком по δ :

$$\phi(r, \varphi) = \phi^0(r) + \delta\phi^1(r, \varphi), \quad (3.1)$$

$$p(r, \varphi) = p^0(r) + \delta p^1(r, \varphi). \quad (3.2)$$

Подставим (3.1), (3.2), (2.5), (2.7) в (2.1), (2.2), (2.4), (2.6) и разложим в ряд Тейлора каждое слагаемое вблизи R . Приравнявая коэффициенты в полученных выражениях при нулевом и при первом порядке по δ , получим две системы уравнений для вычисления ϕ^0 , p^0 и ϕ^1 , p^1 :

$$\nabla^2 \phi^0 = 0, \quad (3.3)$$

$$p^0 = p_\infty^0 + \frac{\partial \phi^0}{\partial R} \dot{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^0}{\partial r} \right)^2 \quad (3.4)$$

с граничными условиями

$$-\frac{\partial \phi^0}{\partial r} \Big|_{r=R} = \dot{R}, \quad (3.5)$$

$$p^0 - p_\infty^0 \Big|_{r=R} = 1/R, \quad (3.6)$$

$$p^0 \Big|_{r=R_\infty} = p_\infty, \quad (3.7)$$

$$\phi^0 \Big|_{r=R_\infty} = 0 \quad (3.8)$$

и

$$\nabla^2 \phi^1 = 0, \quad (3.9)$$

$$p^1 = p_\infty^1 + \frac{\partial \phi^1}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial \delta}{\partial R} \frac{\dot{R} \phi^1}{\delta} - \frac{\partial \phi^0}{\partial r} \frac{\partial \phi^1}{\partial r} \quad (3.10)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial r^2} \Big|_{r=R} \cos(n\varphi) + \frac{\partial \phi^1}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \\ &= -\frac{\partial \delta}{\partial R} \frac{\dot{R}}{\delta} \cos(n\varphi), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^0}{\partial r} \Big|_{r=R} \cos(n\varphi) + p^1 \Big|_{r=R} &= \\ &= -\frac{n^2 - 1}{R^2} \cos(n\varphi), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$p^1 \Big|_{r=R_\infty} = 0, \quad (3.13)$$

$$\phi^1 \Big|_{r=R_\infty} = 0. \quad (3.14)$$

Решение (3.3)–(3.8) приводит к следующему двумерному аналогу уравнения Рэлея–Плессета для нахождения R :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{R_\infty}{R} \right) \left(\dot{R}^2 + R\ddot{R} \right) - \frac{1}{2} R^2 \dot{R}^2 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_\infty^2} \right) = \\ = 1 - \frac{1}{R}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где учтено, что согласно принятой процедуре приведения к безразмерному виду $p_0 - p_\infty = 1$.

Решение (3.9)–(3.14) приводит к амплитудному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta}{\partial R^2} \dot{R}^2 + \frac{\partial \delta}{\partial R} \left(\ddot{R} + 2 \frac{\dot{R}^2}{R} \right) - \\ - \delta \left(\frac{\ddot{R}}{R} (n-1) - \frac{(n^2-1)n}{R^3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Согласно (3.15), принимая во внимание начальные условия $R(0) = 1$ и $\dot{R}(0) = \omega$ (где ω – некоторая скорость в начальный момент), в приближении $R \ll R_\infty$, получим

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{f(R)}{R \ln(R_\infty/R)}}, \quad (3.17)$$

где $f(R) = ((1-R)^2 + \omega^2 \ln R_\infty)/R$.

Отметим, что в рассматриваемом двумерном случае зависимость скорости невозмущенного пузыря от его размера описывается достаточно сложной функцией (рис. 1). В трехмерном случае скорость в рамках рассматриваемых приближений оказывается постоянной (т. е. зависимость размера пузыря от времени являлась линейной функцией) [1, 17, 20].

Используя (3.17), из (3.16) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta}{\partial R^2} + \frac{\partial \delta}{\partial R} \left(g(R) + \frac{2}{R} \right) - \\ - \delta \left(\frac{n-1}{R} g(R) - \frac{n(n^2-1)}{R^2 f(R)} \ln \left(\frac{R_\infty}{R} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где

$$g(R) = \frac{1}{R} \left(\frac{R-1-f(R)}{f(R)} + \frac{1}{2 \ln(R_\infty/R)} \right).$$

Решение (3.18) будем проводить с использованием стандартных начальных условий [17]:

$$\delta(R_0) = \delta_0, \quad \frac{\partial \delta}{\partial R} \Big|_{R=R_0} = 0, \quad (3.19)$$

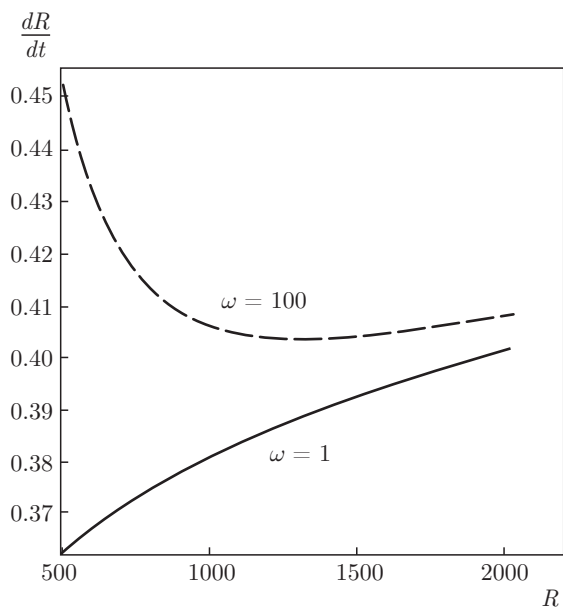


Рис. 1. Зависимость изменения скорости роста пузыря от его размера при различных начальных скоростях роста ω , $R_\infty = 10^6$

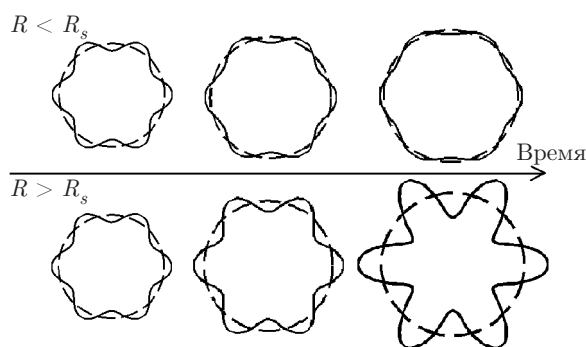


Рис. 2. Зависимость изменения амплитуды возмущения от времени. (Штриховыми линиями показана невозмущенная граница раздела фаз)

где R_0, δ_0 — соответственно некоторые начальные радиус и амплитуда ($1 \ll R_0 \ll R_\infty$).

Точное аналитическое решение (3.18), (3.19) найти не удастся. Численный анализ показывает, что при определенном $R_0 = R_s$ скорость роста амплитуды возмущения меняет знак с отрицательного на положительный. Другими словами, амплитуда возмущения с некоторого момента начинает возрастать, и движущаяся граница газ–жидкость становится морфологически неустойчивой. Это схематично продемонстрировано на рис. 2.

Значение R_s назовем критическим размером (радиусом). Так как амплитуда возмущения при расче-

тах предполагалась бесконечно малой, то, если пользоваться терминологией равновесной теории фазовых переходов, R_s является спинодалью морфологического перехода. Примеры поведения изменения амплитуды в процессе роста пузыря вблизи критического радиуса показаны на рис. 3. Важно отметить, что в классическом трехмерном случае [15–17] спинодаль отсутствует: рост всегда был морфологически устойчивым. Качественное различие между решениями, по-видимому, может быть объяснено ролью поверхностного натяжения, отвечающего за морфологическую устойчивость поверхности пузыря. При трехмерном росте по сравнению с двумерным отношение площади границы к объему больше и, как следствие, роль стабилизирующего фактора также оказывается больше. Это количественное различие приводит в рассматриваемой нестационарной задаче к наблюдаемому эффекту.

Найдем уравнение для R_s . Поскольку нас интересует начальная стадия потери устойчивости (т. е. в непосредственной близости от R_0), это позволяет существенно упростить анализ уравнения (3.18). Представим решение в виде ряда и примем во внимание (3.19):

$$\delta(R) = \delta_0(R_0) + \left. \frac{\partial \delta}{\partial R} \right|_{R_0} (R - R_0) + \dots \approx \delta_0. \quad (3.20)$$

Подставив (3.20) в (3.18), получим выражение для приближенного определения R_s :

$$2n(n + 1) \ln^2 \left(\frac{R_\infty}{R_s} \right) - 2 \ln \left(\frac{R_\infty}{R_s} \right) (R_s - 1) + f(R_s) \ln \left(\frac{R_\infty}{R_s} \right) + f(R_s) = 0. \quad (3.21)$$

На рис. 4 видно, что найденное на основе (3.21) значение R_s является очень хорошим приближением. Действительно, расхождение между R_s , численно определенным на основе приближенного (3.21), и точного (3.18) уравнений составляет не более 0.2%. Согласно результатам расчета (рис. 4), можно заключить, что критический размер устойчивости пузыря увеличивается с увеличением моды возмущения и размера среды, в которой происходит его вытеснение. Это поведение качественно совпадает с результатами работ [7, 8, 12], в которых проводился линейный морфологический анализ границы раздела фаз при кристаллизации и при вытеснении несмешивающихся жидкостей.

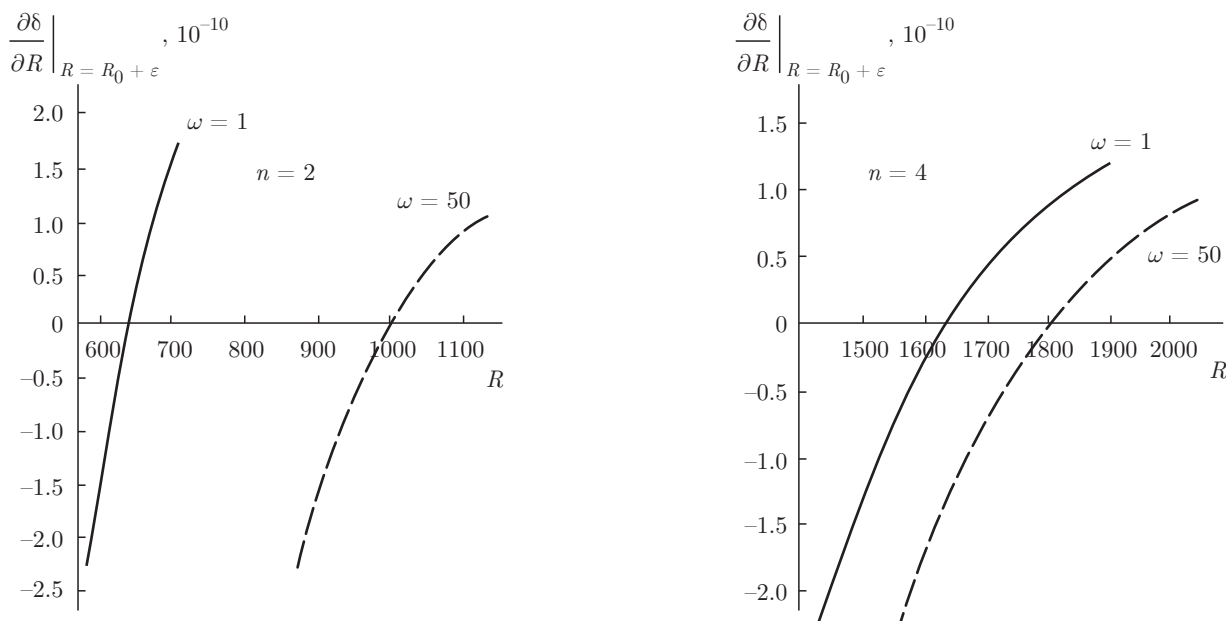


Рис. 3. Зависимость скорости роста амплитуды возмущения от размера пузыря вблизи критического радиуса R_s . Данные зависимости получены при численном решении (3.18) и (3.19) для $n = 2, 4$ и $\omega = 1, 50$, а также $\delta_0 = 1, \varepsilon = 0.01, R_\infty = 10^6$

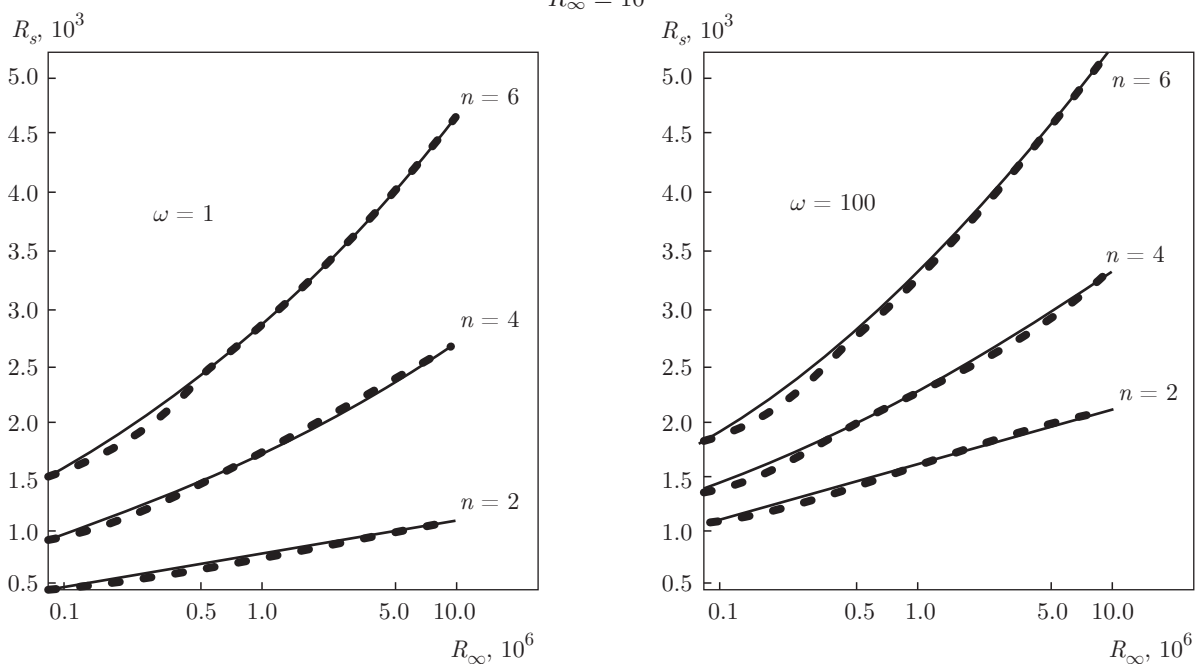


Рис. 4. Зависимость критического радиуса R_s от R_∞ при различных значениях возмущающих мод n и ω . Численные решения (3.18) и (3.21) показаны соответственно точками и сплошными линиями

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе решена задача о морфологической устойчивости движущейся двумерной двухфазной границы газ–жидкость в динамическом (инерционном) приближении. Задача рассмотре-

на в нестационарной постановке. Обнаружено, что в отличие от трехмерного случая существует критический размер, до которого движение морфологически устойчиво, а после — не устойчиво. Таким образом, показано, что для неравновесных морфологических переходов, как и для равно-

весных, размерность задачи существенна для возникновения перехода.

Финансирование. Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке гранта №1.4539.2017/8.9 и в рамках контракта №02.A03.21.0006.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. E. Brennen, *Cavitation and Bubble Dynamics*, Oxford Univ. Press, NY, Oxford (1995).
2. D. Bensimon, L. P. Kadanoff, S. Liang et al., *Rev. Mod. Phys.* **58**, 977 (1986).
3. G. M. Homsy, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19**, 271 (1987).
4. D. A. Kessler, J. Koplik, and H. Levin, *Adv. Physics* **37**, 255 (1988).
5. E. Ben-Jacob and P. Garik, *Nature* **343**, 523 (1990).
6. A. Hill, *Nature* **348**, 426 (1990).
7. Л. М. Мартюшев, В. Д. Селезнев, И. Е. Кузнецова, *ЖЭТФ* **118**, 149 (2000).
8. Л. М. Мартюшев, И. Е. Кузнецова, В. Д. Селезнев, *ЖЭТФ* **121**, 363 (2002).
9. Л. М. Мартюшев, Е. М. Сальникова, Е. А. Червонцева, *ЖЭТФ* **125**, 1128 (2004).
10. L. M. Martyushev, in *Beyond the Second Law. Entropy Production and Non-equilibrium Systems*, ed. By R. C. Dewar, C. H. Lineweaver, R. K. Niven, and K. Regenauer-Lieb, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2014), p. 383.
11. L. Paterson, *J. Fluid Mech.* **113**, 513 (1981).
12. L. M. Martyushev and A. I. Birzina, *J. Phys. Condens. Matter* **20**, 045201 (2008).
13. Л. М. Мартюшев, А. И. Бирзина, *Письма в ЖЭТФ* **99**, 516 (2014).
14. Л. М. Мартюшев, Р. Д. Бандо, Е. А. Червонцева, *Письма в ЖЭТФ* **108**, 35 (2018).
15. M. S. Plesset, *J. Appl. Phys.* **25**, 96 (1954).
16. M. S. Plesset and T. P. Mitchell, *Quart. Appl. Math.* **12**, 419 (1956).
17. L. M. Martyushev, A. I. Birzina, and A. S. Soboleva, *Physica A* **499**, 170 (2018).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, Часть 1*, Наука, Москва (1995).
19. Г. Стенли, *Фазовые переходы и критические явления*, Мир, Москва (1973).
20. N. A. Kudryashov and D. I. Sinelshchikov, *Phys. Lett. A* **379**, 798 (2014).