

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Э. А. Саметов, Е. А. Лисин*, О. С. Ваулина**

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 8 августа 2019 г.,
после переработки 8 августа 2019 г.
Принята к публикации 26 сентября 2019 г.

Представлены результаты аналитического и численного исследований спектральных характеристик стохастического (теплового) движения для двух заряженных частиц в анизотропном электрическом поле ловушки. Предложены аналитические соотношения для спектральной плотности смещений в такой системе с однородными и неоднородными тепловыми источниками, включая спектральные плотности для каждой из частиц, а также для суммарных и взаимных смещений частиц. Полученные соотношения проверены путем численного моделирования задачи.

DOI: 10.31857/S0044451020030165

1. ВВЕДЕНИЕ

Стохастическое (тепловое) движение в системах взаимодействующих частиц широко распространено в природе и наблюдается, например, в биологических и полимерных коллоидных растворах, в плазме продуктов сгорания, в атмосфере Земли и т. д. [1–6]. Исследование такого движения представляет интерес в различных областях науки и техники. Отдельный круг задач связан с условиями энергетического баланса в системах заряженных частиц с пространственно-неоднородными тепловыми источниками, которые обычно приводят к неравномерному распределению стохастической кинетической энергии в исследуемой системе.

Основной источник неравномерного распределения стохастической кинетической энергии для заряженных частиц плазмы связан с ее неоднородными параметрами во внешних электрических полях [7, 8]. Что касается комплексной (пылевой) плазмы, то помимо неоднородных условий значительное влияние

на пространственное распределение температур пылевых частиц оказывают изменения их зарядов, вызванные случайной природой ионных и электронных токов, заряжающих эти частицы [9–14]. Источниками неравномерного нагрева системы пылевых частиц также могут являться неоднородное распределение температуры окружающего газа, лазерное излучение, используемое для диагностики, протекание химических реакций и т. д. Перераспределение стохастической энергии в системах с такими тепловыми источниками исследовалось теоретически для кластеров заряженных частиц в работах [9, 10].

Экспериментальный, теоретический и численный анализы теплового движения взаимодействующих пылевых частиц в протяженных и ограниченных ансамблях, формирующихся в газоразрядной плазме, представлен в работах [15–21]. Отметим, что в обычных тлеющих разрядах в центре газоразрядных камер наблюдается некоторое превышение концентрации ионов плазмы над концентрацией ее электронной компоненты [22]. Данное обстоятельство приводит к формированию эффективных ловушек для отрицательно заряженных частиц пыли [5, 6].

Для анализа особенностей теплового движения взаимодействующих частиц можно воспользоваться

* E-mail: ealisin@yandex.ru

** E-mail: olga.vaulina@bk.ru

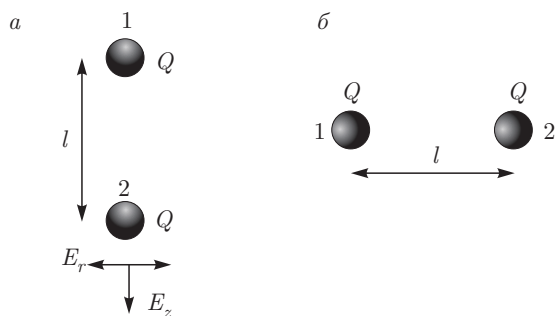


Рис. 1. Вертикальная (а) и горизонтальная (б) конфигурации двух взаимодействующих частиц в электрическом поле ловушки $E = E(z, r)$ с цилиндрической симметрией

спектральной характеристикой случайных процессов, а именно, спектральной плотностью смещений частиц. В общем случае спектральная плотность определяется как преобразование Фурье от корреляционной функции для физической характеристики анализируемого процесса, а для случайного процесса является косинус-преобразованием Фурье для соответствующей корреляционной функции [23–25]. Следует отметить, что в отличие от других характеристик системы (параметра неидеальности, коэффициентов тепло- и массопереноса и т. д.) информация о спектральной плотности тепловых смещений частиц позволяет анализировать спектр частот собственных колебаний в исследуемых системах. Это, в свою очередь, дает возможность оценить реакцию системы на кратковременные или периодические внешние возмущения, а также позволяет определить характер и тип потенциала взаимодействия между частицами среды [15–17, 26–28].

Несмотря на большое количество работ по исследованию теплового движения заряженных частиц в электрических полях различных ловушек, вопрос о спектральной плотности смещений для отдельных частиц в неидеальных системах остается не выясненным.

В настоящей работе рассмотрена спектральная плотность смещений двух идентичных частиц в среде с различными тепловыми источниками в поле силы тяжести, скомпенсированном электрическим полем $E(r, z)$ цилиндрической ловушки с радиальной $E_r = \alpha r$ и вертикальной $E_z = E_z^0 + \beta z$ составляющими, см. рис. 1. Здесь $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$ — радиальная координата, z — вертикальная координата (по оси, параллельной силе тяжести), α и β — величины градиентов электрического поля, а значение E_z^0 определяется балансом сил, действующих в системе. Численные исследования устойчивости верти-

кальных и горизонтальных конфигураций частиц в такой системе при разных типах межчастичных взаимодействий проводились в работах [28–30]. Различные эксперименты с двумя пылевыми частицами в газоразрядной плазме описаны в работах [31–39].

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим систему линейаризованных уравнений движения, описывающих отклонения двух взаимодействующих идентичных частиц с зарядами Q и массой M от их положения равновесия (ξ_1, ξ_2) для выбранной степени свободы в поле внешних сил под действием случайной силы $F_{b1(2)}$, которая является источником стохастической (тепловой) энергии частиц:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = -\nu \frac{d\xi_1}{dt} - a\xi_1 + b\xi_2 + \frac{F_{b1}}{M}, \quad (1a)$$

$$\frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = -\nu \frac{d\xi_2}{dt} - a\xi_2 + b\xi_1 + \frac{F_{b2}}{M}. \quad (1b)$$

Здесь ν — коэффициент трения пылевых частиц за счет их столкновений с нейтралами окружающего газа, а коэффициенты a, b зависят от физики решаемой задачи и рассматриваемой степени свободы смещений частиц. Для случая $\alpha > \beta$ реализуется вертикальная конфигурация двух частиц, в обратном случае — их горизонтальная конфигурация (см. рис. 1) [29, 30].

Здесь мы остановимся на случае вертикальной конфигурации двух частиц, см. рис. 1а. (Все решения для горизонтальной конфигурации будут аналогичными.) Тогда для вертикальных смещений частиц $\xi_{1(2)} = z_{1(2)}$ выполняется равенство $Q\beta = 2F/l$, а коэффициенты $a = (Q\beta - F')/M$ и $b = -F'/M$, где F — сила взаимодействия между двумя частицами, l — расстояние между ними, F' — производная силы взаимодействия в направлении оси z . Для радиальных смещений частиц $\xi_{1(2)} = r_{1(2)}$ коэффициенты $a = (Q\alpha - F/l)/M$ и $b = F/lM$.

В этом случае движение центра масс системы, $(\xi_1 + \xi_2)/2 = \xi_+/2$, и взаимные смещения частиц, $\xi_1 - \xi_2 = \xi_-$, относительно их положения равновесия описываются следующими уравнениями:

$$\frac{d^2(\xi_1 + \xi_2)}{dt^2} = -\nu \frac{d(\xi_1 + \xi_2)}{dt} - \omega_+^2(\xi_1 + \xi_2) + \frac{F_{b1} + F_{b2}}{M}, \quad (2a)$$

$$\frac{d^2(\xi_1 - \xi_2)}{dt^2} = -\nu \frac{d(\xi_1 - \xi_2)}{dt} - \omega_-^2(\xi_1 - \xi_2) + \frac{F_{b1} - F_{b2}}{M}, \quad (2b)$$

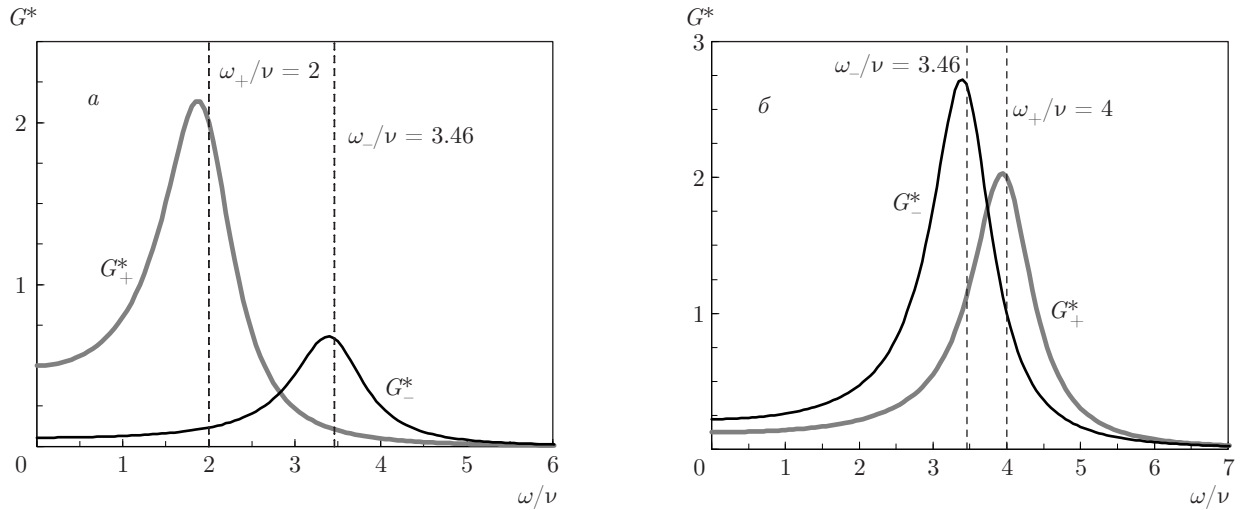


Рис. 2. Нормированные спектральные плотности G^* для суммарных, G_+ , и взаимных, G_- , смещений двух частиц в вертикальном (а) и радиальном (б) направлениях при $\alpha/\beta = 4$. Здесь $G_+(\omega) = G_+(\omega)(\omega_+^2\nu)M/(T_1^0 + T_2^0)$, $G_-(\omega) = G_-(\omega)(\omega_-^2\nu)M/(T_1^0 + T_2^0)$, где для смещений частиц в вертикальном направлении $\omega_+^2 = Q\beta/M$, $\omega_+/\nu = 2$ и $\omega_-/\nu \approx 3.46$, а для их радиальных смещений $\omega_+^2 = Q\alpha/M$, $\omega_+/\nu = 4$ и $\omega_-/\nu \approx 3.46$

где $\omega_+^2 = Q\beta/M$, $\omega_-^2 = (Q\beta - 2F')/M$ для смещений в вертикальном направлении и $\omega_+^2 = Q\alpha/M$, $\omega_-^2 = (Q\alpha - 2F/l)/M \equiv Q(\alpha - \beta)/M$ для радиальных смещений частиц.

Для вычисления спектральной плотности смещений частиц обычно используют преобразование Фурье для среднеквадратичного отклонения частиц от их начального положения: $\langle \Delta_{1(2)}^2(t) \rangle = \langle (\xi_{1(2)}(t) - \xi_{1(2)}(0))^2 \rangle$, где угловые скобки описывают усреднение по всем отрезкам времени равным t [23, 24]. Тогда уравнения (1а), (1б) могут быть преобразованы к виду

$$\frac{d^2\Delta_1^2}{dt^2} = -\nu \frac{d\Delta_1^2}{dt} - a\Delta_1^2 + b\Delta_2^2 + \frac{2T_1}{M}, \quad (3a)$$

$$\frac{d^2\Delta_2^2}{dt^2} = -\nu \frac{d\Delta_2^2}{dt} - a\Delta_2^2 + b\Delta_1^2 + \frac{2T_2}{M}, \quad (3b)$$

где $T_{1(2)} = M\langle V_{1(2)}^2 \rangle$ — удвоенная кинетическая энергия стохастического движения частиц, $V_{1(2)} = d\xi_{1(2)}/dt$ — скорости частиц на одну степень свободы.

Связь между величиной $T_{1(2)}$ и температурой тепловых источников $T_{1(2)}^0$ в точке среды, возникающих за счет действия случайной силы $F_{b1(2)}$, задается соотношением $T_{1(2)} = T_{1(2)}^0 - \delta T_{1(2)}$, где величина $\delta T_{1(2)}$ подчиняется условию энергетического баланса в системе (1а), (1б). При условии $T_1^0 \neq T_2^0$ происходит перераспределение стохастической кинетической энергии между частицами [9, 10], см. Приложение А:

$$\delta T_{1(2)} = \frac{b^2(T_1^0 - T_2^0)}{2b^2 + \nu^2 a}. \quad (4)$$

Следует отметить, что $T_1 + T_2 = T_1^0 + T_2^0$, т. е. полная кинетическая энергия системы, не изменяется.

Для уравнений (2а), (2б) можно записать

$$\frac{d^2\Delta_+^2}{dt^2} = -\nu \frac{d\Delta_+^2}{dt} - \omega_+^2\Delta_+^2 + \frac{2(T_1 + T_2)}{M}, \quad (5a)$$

$$\frac{d^2\Delta_-^2}{dt^2} = -\nu \frac{d\Delta_-^2}{dt} - \omega_-^2\Delta_-^2 + \frac{2(T_1 + T_2)}{M}, \quad (5b)$$

где $\langle \Delta_{+(-)}^2(t) \rangle = \langle (\xi_{+(-)}(t) - \xi_{+(-)}(0))^2 \rangle$.

Таким образом, спектральная плотность для суммарных, G_+ , и взаимных, G_- , смещений двух частиц аналогична спектральной плотности классического затухающего осциллятора и может быть записана как [23, 24]

$$G_{+(-)}(\omega) = \frac{2\nu(T_1^0 + T_2^0)/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_{+(-)}^2)\omega^2 + \omega_{+(-)}^4}, \quad (6)$$

где для вертикальных смещений частиц $\omega_+^2 = Q\beta/M$, $\omega_-^2 = (Q\beta - 2F')/M$; для их радиальных смещений $\omega_+^2 = Q\alpha/M$, $\omega_-^2 = (Q\alpha - 2F/l)/M \equiv Q(\alpha - \beta)/M$; а $T_1^0 + T_2^0 = T_1 + T_2$.

Нормированные спектральные плотности G^* для суммарных, G_+ , и взаимных, G_- , смещений двух частиц в вертикальном и радиальном направлениях при $\alpha/\beta = 4$ для различных отношений $\omega_{+(-)}/\nu$ представлены на рис. 2. Следует отметить, что при

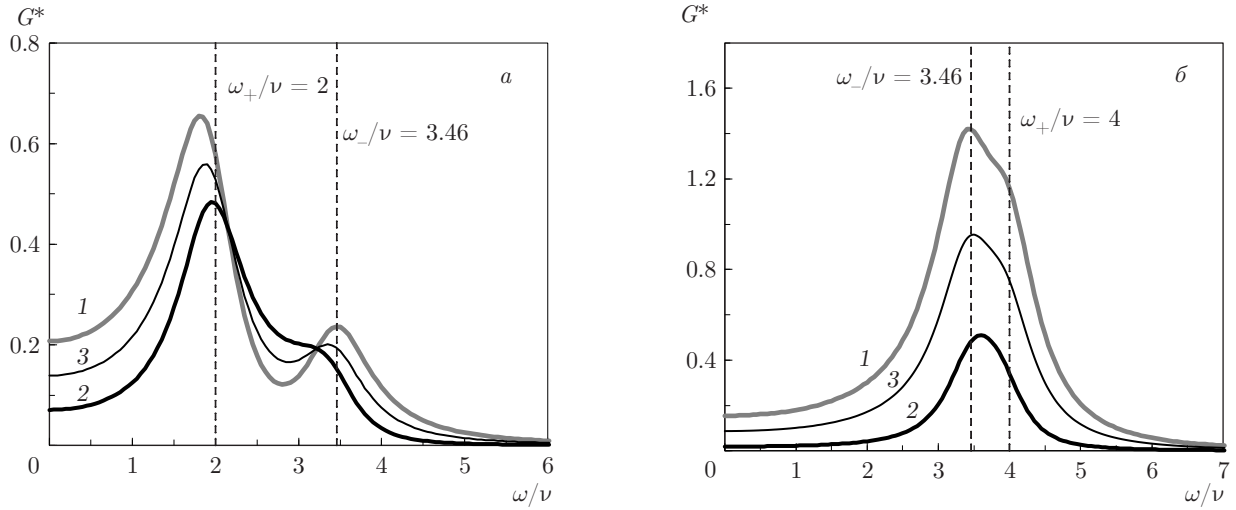


Рис. 3. Нормированные спектральные плотности G^* для смещений отдельных частиц системы, G_1 и G_2 , в вертикальном (а) и радиальном (б) направлениях при $\alpha/\beta = 4$: 1 – $G_1^*(\omega) = G_1(\omega)(\omega_1^2\nu)M/(T_1^0 + T_2^0)$, $T_1^0/T_2^0 = 10$; 2 – $G_2^*(\omega) = G_2(\omega)(\omega_2^2\nu)M/(T_1^0 + T_2^0)$, $T_1^0/T_2^0 = 10$; 3 – $G_1^*(\omega) \equiv G_2^*(\omega) = G^*(\omega)$, $T_1^0/T_2^0 = 1$. Здесь для смещений частиц в вертикальном направлении $\omega_i^2 = Q\beta/M$, $\omega_+/ \nu = 2$ и $\omega_- / \nu \approx 3.46$, а для их радиальных смещений $\omega_i^2 = Q\alpha/M$, $\omega_+ / \nu = 4$ и $\omega_- / \nu \approx 3.46$

$(\omega_{+(-)}/\nu)^2 \gg 1$ максимум функций $G_{+(-)}(\omega)$ хорошо соответствует значениям $\omega_{+(-)}/\nu$. С уменьшением отношения $\omega_{+(-)}/\nu$ максимум функций $G_{+(-)}(\omega)$ смещается в сторону более низких частот [23, 24].

Перейдем к спектральной плотности для смещений отдельных частиц системы. Отметим, что корни характеристического уравнения для задачи (1а), (1б) можно записать в виде

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\nu}{2} \pm \left(\frac{\nu^2}{4} - \omega_1^2\right)^{1/2} = 0, \quad (7a)$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{\nu}{2} \pm \left(\frac{\nu^2}{4} - \omega_2^2\right)^{1/2} = 0, \quad (7b)$$

где $\omega_1^2 = a + b \equiv \omega_+^2$, $\omega_2^2 = a - b \equiv \omega_-^2$.

При этом любое решение $F(t)$ для задачи (1а), (1б) можно представить в виде суперпозиции

$$F(t) = C_0 + \sum_{i=1}^4 C_i \exp(\lambda_i t), \quad (8)$$

где коэффициенты C_0 и C_i определяются граничными условиями. Коэффициенты C_0 и C_i представлены в Приложении В. Фурье-преобразование для этого случая дает для спектральной плотности смещений G_1 (для частицы 1) и G_2 (для частицы 2)

$$G_{1(2)}(\omega) = \frac{2\nu\{T_{1(2)}^0((\omega^2 - a)^2 + \nu^2\omega^2) + T_{2(1)}^0 b^2\}/M}{\{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4\}\{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_2^2)\omega^2 + \omega_2^4\}}. \quad (9)$$

Особо отметим, что при выводе формулы (9) использовалось уравнение энергетического баланса (4).

Для случая $T_1^0 = T_2^0 \equiv T$ величина $\delta T_{1(2)} = 0$, см. (4), и, соответственно, $G_1(\omega) \equiv G_2(\omega) = G(\omega)$. Тогда уравнение (9) для спектральной плотности смещений частиц можно представить в виде суперпозиции спектральных плотностей для двух осцилляторов как

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^2 \frac{\nu T/M}{\{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_i^2)\omega^2 + \omega_i^4\}}. \quad (10)$$

Нормированные спектральные плотности G^* для смещений отдельных частиц системы, G_1 и G_2 , в вертикальном и радиальном направлениях при $\alpha/\beta = 4$ для различных отношений $\omega_{+(-)}/\nu$ и T_1^0/T_2^0 представлены и на рис. 3.

В заключение данного раздела отметим, что для диагностики параметров ограниченных и протяженных систем в лабораторных экспериментах зачастую используется анализ поведения среднего квадрата отклонений частиц от их начального положения $\langle x(t)^2 \rangle$ [15–17]. Однако при наличии двух или более гармоник (характерных частот) в исследуемой

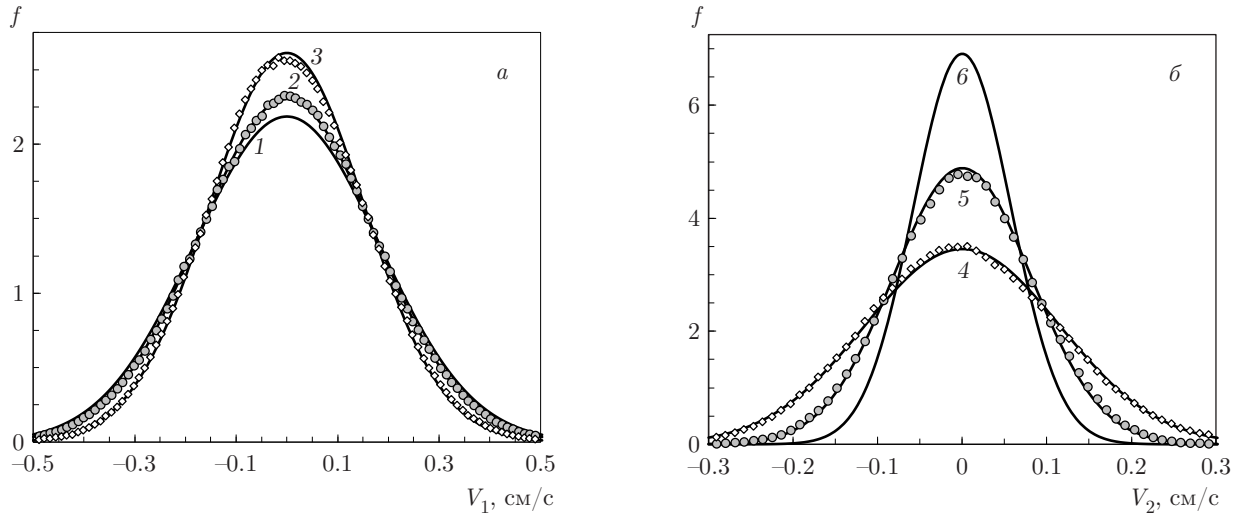


Рис. 4. Функции распределения скоростей для смещений отдельных частиц системы $f_1(V_1)$ (а) и $f_2(V_2)$ (б) в вертикальном и радиальном направлениях при $\alpha/\beta = 4$. Символами обозначены результаты численного моделирования, сплошными линиями — функции Максвелла с температурами: $T_1^0 = 2.08$ эВ (1); $T_1^r \approx 1.87$ эВ (2); $T_1^v \approx 1.46$ эВ (3); $T_2^v \approx 0.83$ эВ (4); $T_2^r \approx 0.416$ эВ (5); $T_2^0 = 0.208$ эВ (6)

системе простой анализ функций $\langle x(t)^2 \rangle$ может оказаться затруднительным [23]. Тем не менее, исследование спектральных характеристик анализируемой системы позволяет легко решить данную задачу. Так, на основе измерения и анализа спектральных плотностей G_+ и G_- (6), G_1 и G_2 (9) может базироваться простая и удобная техника для восстановления характерных частот в реальных экспериментах.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное исследование стохастического движения в системе из двух заряженных частиц с неоднородными тепловыми источниками выполнялось методом молекулярной динамики Ланжевена. Техника моделирования подробно описана в работе [4]. Шаг интегрирования составлял от $\Delta t \cong (40 \max[\omega_i; \nu])^{-1}$ до $\Delta t \cong (100 \max[\omega_i; \nu])^{-1}$ в зависимости от начальных условий задачи. Время расчетов t_c после установления равновесия в моделируемых системах варьировалось от $\sim 10^3 / \min[\omega_i; \nu]$ до $\sim 10^4 / \min[\omega_i; \nu]$. Температура тепловых источников (T_1^0, T_2^0) задавалась при помощи случайной силы $F_{b1(2)}$ [5]. Отношение T_1^0/T_2^0 изменялось от 1 до 10. Значение параметра $\xi = \omega_i/\nu$ варьировалось от ~ 1 до ~ 10 . (Напомним, что для смещений частиц в вертикаль-

ном направлении $\omega_i^2 = Q\beta/M$, а для их радиальных смещений $\omega_i^2 = Q\alpha/M$.)

Моделирование выполнялось для частиц с кулоновским взаимодействием, находящихся в электростатической ловушке с параметрами $\alpha/\beta = 4$. При этом наблюдалась вертикальная конфигурация частиц, см. рис. 1а.

Во всех рассмотренных случаях моделируемые системы являлись устойчивыми. Функции распределения частиц по скоростям соответствовали распределению Максвелла. Разность $\delta T_{1(2)} = T_{1(2)}^0 - T_{1(2)}$ между фиксируемыми температурами, $T_{1(2)}$, и температурами заданных тепловых источников, $T_{1(2)}^0$, находилась в согласии с условием энергетического баланса (4) как для вертикальных, так и для радиальных смещений частиц, см. рис. 4. А при $t \rightarrow \infty$ значения среднеквадратичного смещения каждой из частиц от их начального положения соответствовали $\langle \Delta_{1(2)}^2(t) \rangle \cong 2 \langle \xi_{1(2)}^2 \rangle$, см. Приложения А и В.

Вычисления спектральной плотности проводились на основе численных расчетов смещений $x(t), y(t)$ и $z(t)$ при помощи процедуры «N-D fast Fourier transform» в пакете прикладных программ MATLAB.

Нормированные спектральные плотности G^* для суммарных, G_+ , и взаимных, G_- , смещений двух частиц в вертикальном и радиальном направлениях, полученные путем численного моделирования зада-

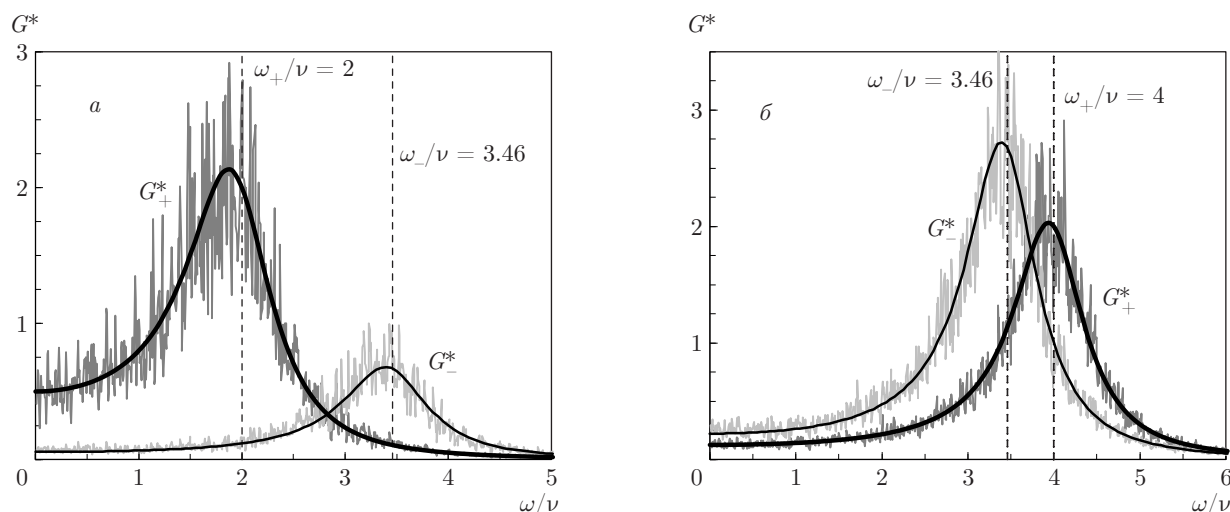


Рис. 5. Нормированные спектральные плотности G^* для суммарных, G_+ , и взаимных, G_- , смещений двух частиц в вертикальном (а) и радиальном (б) направлениях при $\alpha/\beta = 4$. Здесь $G_+^*(\omega) = G_+(\omega)(\omega_i^2\nu)M/(T_1^0 + T_2^0)$, $G_-^*(\omega) = G_-(\omega)(\omega_i^2\nu)M/(T_1^0 + T_2^0)$, где для смещений частиц в вертикальном направлении $\omega_i^2 = Q\beta/M$, $\omega_+/\nu = 2$ и $\omega_-/\nu \approx 3.46$, а для их радиальных смещений $\omega_i^2 = Q\alpha/M$, $\omega_+/\nu = 4$ и $\omega_-/\nu \approx 3.46$. Серыми линиями обозначены результаты численного моделирования, черными — аналитические соотношения

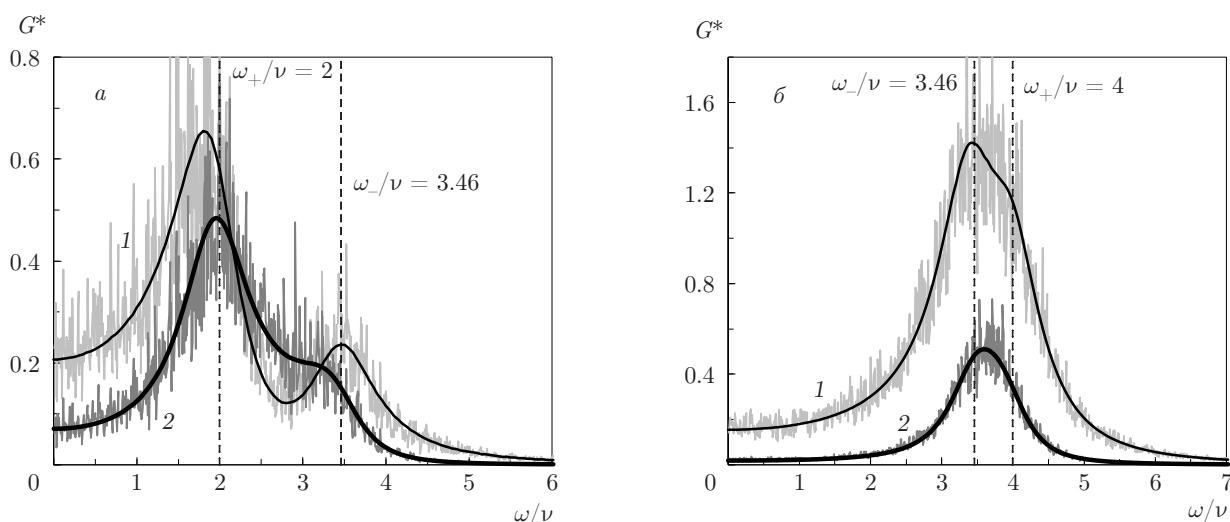


Рис. 6. Нормированные спектральные плотности G^* для смещений отдельных частиц системы, G_1 и G_2 , в вертикальном (а) и радиальном (б) направлениях при $\alpha/\beta = 4$: 1 — $G_1^*(\omega) = G_1(\omega)(\omega_i^2\nu)M/(T_1^0 + T_2^0)$, $T_1^0/T_2^0 = 10$; 2 — $G_2^*(\omega) = G_2(\omega)(\omega_i^2\nu)M/(T_1^0 + T_2^0)$, $T_1^0/T_2^0 = 10$; 3 — $G_1^*(\omega) \equiv G_2^*(\omega) = G^*(\omega)$, $T_1^0/T_2^0 = 1$. Здесь для смещений частиц в вертикальном направлении $\omega_i^2 = Q\beta/M$, $\omega_+/\nu = 2$ и $\omega_-/\nu \approx 3.46$, а для их радиальных смещений $\omega_i^2 = Q\alpha/M$, $\omega_+/\nu = 4$ и $\omega_-/\nu \approx 3.46$. Серыми линиями обозначены результаты численного моделирования, черными — аналитические соотношения

чи, при $\alpha/\beta = 4$ для различных отношений $\omega_{+(-)}/\nu$ представлены на рис. 5. Нормированные спектральные плотности G^* для смещений отдельных частиц системы, G_1 и G_2 , в вертикальном и радиальном направлениях, полученные при $\alpha/\beta = 4$ и $T_1^0/T_2^0 = 10$, для различных отношений $\omega_{+(-)}/\nu$ представлены на

рис. 6.

Численные исследования показали хорошее соответствие между результатами моделирования и предлагаемыми аналитическими соотношениями (6), (9).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено аналитическое и численное исследование динамики двух заряженных частиц в анизотропном электрическом поле ловушки. Получены спектральные характеристики их стохастического движения. Моделирование выполнялось для систем частиц с кулоновским взаимодействием в широком диапазоне их параметров (T_1^0/T_2^0 и ω_i/ν).

Предложены аналитические соотношения для спектральной плотности смещений в такой системе с однородными и неоднородными тепловыми источниками, включая спектральные плотности для каждой из частиц, а также для суммарных и взаимных смещений частиц.

Результаты настоящей работы применимы для систем при любом типе попарных взаимодействий, а также могут быть легко адаптированы для случая непопарных (невзаимных) потенциалов. Полученные результаты могут быть полезны для разработки новых методов диагностики физических свойств пылевой плазмы.

Финансирование. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 18-38-20175), а также Программой Президиума РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для поиска корреляторов скоростей и смещений частиц в системе, заданной уравнениями (1), (2), отметим, что корреляторы случайной силы $F_{b1(2)}$ подчиняются уравнениям

$$\langle F_{b1} \rangle = \langle F_{b2} \rangle \equiv 0, \quad \langle F_{b1} F_{b2} \rangle = 0,$$

$$\langle F_{b1} V_2 \rangle = \langle F_{b2} V_1 \rangle \equiv 0, \quad \langle F_{b1} \xi_2 \rangle = \langle F_{b2} \xi_1 \rangle \equiv 0,$$

$$\langle F_{b1} \xi_1 \rangle = \langle F_{b2} \xi_2 \rangle \equiv 0, \quad \langle F_{b1} V_2 \rangle = \langle F_{b2} V_1 \rangle \equiv 0,$$

где $V_{1(2)} = d\xi_{1(2)}/dt$ — скорости частиц на одну степень свободы. (Здесь и далее в Приложении А угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение по времени при $t \rightarrow \infty$.) Учитывая, что при движении частиц по замкнутым траекториям $\langle \xi_1 V_1 \rangle = \langle \xi_2 V_2 \rangle \equiv 0$ и $\langle V_{1(2)} F_{b1(2)} \rangle = \nu T_{1(2)}^0$, где $T_{1(2)}^0$ — температура тепловых источников, уравнения для корреляторов скоростей и смещений частиц можно представить в виде [9, 10]

$$-\frac{\nu \delta T_{1(2)}}{M} + b \langle V_{1(2)} \xi_{2(1)} \rangle = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$-a \langle (\xi_{1(2)})^2 \rangle + b \langle \xi_1 \xi_2 \rangle + \frac{T_{1(2)}}{M} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$-\nu \langle V_{1(2)} \xi_{2(1)} \rangle - a \langle \xi_1 \xi_2 \rangle + b \langle (\xi_{2(1)})^2 \rangle + \langle V_1 V_2 \rangle = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$-2\nu \langle V_1 V_2 \rangle - a \langle \xi_1 V_2 \rangle - a \langle \xi_2 V_1 \rangle = 0. \quad (\text{A.4})$$

Здесь $\delta T_{1(2)} = T_{1(2)}^0 - T_{1(2)}$, а $T_{1(2)} = M \langle V_{1(2)}^2 \rangle$ — удвоенная кинетическая энергия стохастического движения частиц.

Решение системы уравнений (A.1)–(A.4) дает уравнение энергетического баланса в системе (1a), (1b), который возникает при $T_1^0 \neq T_2^0$ и приводит к перераспределению стохастической кинетической энергии между частицами [9, 10]:

$$\delta T_{1(2)} = \frac{b^2(T_1^0 - T_2^0)}{2b^2 + \nu^2 a}, \quad (\text{A.5})$$

а также соотношения для корреляторов скоростей и смещений частиц:

$$\langle V_1 V_2 \rangle = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle = \frac{(2a^2 - b^2)T_{1(2)} + b^2 T_{2(1)}}{2a(a^2 - b^2)M}, \quad (\text{A.7})$$

$$\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = \frac{ab(T_1 + T_2)}{2a(a^2 - b^2)M}, \quad (\text{A.8})$$

$$\langle \xi_2 V_1 \rangle \equiv -\langle \xi_1 V_2 \rangle = -\frac{b(T_1 - T_2)}{2\nu a M}. \quad (\text{A.9})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Любое решение $F(t)$ для задачи (1), (2) можно представить в виде суперпозиции

$$F(t) = C_0 + \sum_{i=1}^4 C_i \exp(\lambda_i t). \quad (\text{B.1})$$

При этом для функции $\langle \Delta_{1(2)}^2(t) \rangle$ величина $C_0 \equiv \equiv A_1 = 2 \langle \xi_{1(2)}^2 \rangle$ (см. Приложение А, формула (A.7) и [23]). Для поиска коэффициентов C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) используются начальные условия задачи: $F(0) = 0$, $dF(0)/dt = 0$, $d^2 F(0)/dt^2 \equiv A_2 = 2T_{1(2)}/M$,

$d^3F(0)/dt^3 \equiv A_3 = 2\nu T_{1(2)}^0/M$ [4]. Тогда для коэффициентов C_i можно записать следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^4 C_i = -A_1, \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i C_i = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 C_i = A_2, \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i^3 C_i = -A_3. \quad (\text{B.5})$$

Отсюда имеем

$$C_1 = -\frac{A_3 + A_2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - A_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}, \quad (\text{B.6})$$

$$C_2 = \frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) - A_1\lambda_1\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}, \quad (\text{B.7})$$

$$C_3 = -\frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4) - A_1\lambda_1\lambda_2\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}, \quad (\text{B.8})$$

$$C_4 = \frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - A_1\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)}. \quad (\text{B.9})$$

С учетом корней характеристического уравнения систему (B.6)–(B.9) можно записать как

$$C_1 = -\frac{A_3 - A_2\nu + \lambda_2(A_2 - A_1\omega_2^2)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)b}, \quad (\text{B.10})$$

$$C_2 = \frac{A_3 - A_2\nu + \lambda_1(A_2 - A_1\omega_2^2)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)b}, \quad (\text{B.11})$$

$$C_3 = \frac{A_3 - A_2\nu + \lambda_4(A_2 - A_1\omega_1^2)}{2(\lambda_3 - \lambda_4)b}, \quad (\text{B.12})$$

$$C_4 = -\frac{A_3 - A_2\nu + \lambda_3(A_2 - A_1\omega_1^2)}{2(\lambda_3 - \lambda_4)b}. \quad (\text{B.13})$$

В случае равенства температур частиц $T_1^0 = T_2^0 \equiv T$ и $T_{1(2)} = T_{1(2)}^0$. Следовательно,

$$C_1 = -\frac{2\nu T \lambda_2(1 - a/\omega_1^2)}{M(\lambda_1 - \lambda_2)b}, \quad (\text{B.14})$$

$$C_2 = \frac{2\nu T \lambda_1(1 - a/\omega_1^2)}{M(\lambda_1 - \lambda_2)b}, \quad (\text{B.15})$$

$$C_3 = \frac{2\nu T \lambda_4(1 - a/\omega_2^2)}{M(\lambda_3 - \lambda_4)b}, \quad (\text{B.16})$$

$$C_4 = -\frac{2\nu T \lambda_3(1 - a/\omega_2^2)}{M(\lambda_3 - \lambda_4)b}. \quad (\text{B.17})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy*, ed. by H. Z. Cummins and E. R. Pike, Plenum, New York (1974).
2. Я. И. Френкель, *Кинетическая теория жидкостей*, Наука, Ленинград (1975).
3. R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley Interscience, Chichester (1975).
4. А. А. Овчинников, С. Ф. Тимашев, А. А. Белый, *Кинетика диффузионно-контролируемых химических процессов*, Химия, Москва (1986).
5. О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, *Пылевая плазма эксперимент и теория*, Физматлит, Москва (2009).
6. *Complex and Dusty Plasmas*, ed. by V. E. Fortov and G. E. Morfill, CRC Press (2010).
7. А. В. Тимофеев, Б. Н. Швилкин, УФН **118**, 273 (1976) [A. V. Timofeev and B. N. Shvilkin, *Sov. Phys. Usp.* **19**, 149 (1976)].
8. Yu. P. Raizer, M. N. Shneider, and N. A. Yatsenko, *Radio-Frequency Capacitive Discharges*, CRC Press (1995).
9. O. S. Vaulina, *Phys. Plasmas* **24**, 023705 (2017).
10. O. S. Vaulina, *ЖЭТФ* **151**, 982 (2017).
11. O. S. Vaulina, *Europhys. Lett.* **115**, 10007 (2016).
12. O. S. Vaulina, S. A. Khrapak, O. F. Petrov, and A. P. Nefedov, *Phys. Rev. E* **60**, 5959 (1999).
13. R. A. Quinn and J. Goree, *Phys. Rev. E* **61**, 3033 (2000).
14. O. Vaulina, S. Khrapak, A. A. Samarian, and O. F. Petrov, *Phys. Scripta T* **84**, 292 (2000).
15. O. S. Vaulina, К. Г. Адамович, *ЖЭТФ* **133**, 1091 (2008).
16. O. S. Vaulina, К. Г. Адамович, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, *ЖЭТФ* **134**, 367 (2008).
17. E. A. Lisin, R. A. Timirkhanov, O. S. Vaulina, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, *New J. Phys.* **15**, 053004 (2013).
18. O. S. Vaulina and E. A. Lisin, *Phys. Plasmas* **16**, 113702 (2009).
19. В. Е. Фортов, О. Ф. Петров, О. С. Ваулина, К. Г. Косс, *Письма в ЖЭТФ* **97**, 366 (2013).

20. G. A. Hebner, M. E. Riley, and K. E. Greenberg, *Phys. Rev. E* **66**, 046407 (2002).
21. O. S. Vaulina and I. E. Drangevski, *Phys. Scripta* **73**, 577 (2006).
22. Ю. П. Райзер, *Физика газового разряда*, Наука, Москва (1987).
23. О. С. Ваулина, Э. А. Саметов, *ЖЭТФ* **154**, 407 (2018).
24. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1982).
25. А. А. Воронов, *Теория автоматического управления*, ч. 2, Высш. школа, Москва (1986).
26. Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, *ЖЭТФ* **142**, 1077 (2012).
27. Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, *ЖЭТФ* **151**, 791 (2017).
28. I. I. Lisina, E. A. Lisin, O. S. Vaulina, and O. F. Petrov, *Phys. Rev. E* **95**, 013202 (2017).
29. I. I. Lisina and O. S. Vaulina, *Europhys. Lett.* **103**, 55002 (2013).
30. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, И. Е. Дранжевский, *Физика плазмы* **31**, 612 (2005).
31. A. Melzer, V. A. Schweigert, and A. Piel, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3194 (1999).
32. V. Steinberg, R. Sütterlin, A. V. Ivlev, and G. Morfill, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4540 (2001).
33. G. A. Hebner, M. E. Riley, and B. M. Marder, *Phys. Rev. E* **68**, 016403 (2003).
34. A. A. Samarian, S. V. Vladimirov, and B. W. James, *Phys. Plasmas* **12**, 022103 (2005).
35. M. Kroll, J. Schablinski, D. Block, and A. Piel, *Phys. Plasmas* **17**, 013702 (2010).
36. A. K. Mukhopadhyay and J. Goree, *Phys. Rev. E* **90**, 013102 (2014).
37. H. Jung, F. Greiner, O. H. Asnaz, J. Carstensen, and A. Piel, *Phys. Plasmas* **22**, 053702 (2015).
38. M. Chen, M. Dropmann, B. Zhang, L. S. Matthews, and T. W. Hyde, *Phys. Rev. E* **94**, 033201 (2016).
39. Z. Ding, K. Qiao, J. Kong, L. S. Matthews, and T. W. Hyde, *Plasma Phys. Control. Fusion* **61**, 055004 (2019).