

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, ОБРАЗУЮЩИХ ОКТУПОЛЬНЫЕ ВИХРИ НА КВАДРАТНОЙ ЯЧЕЙКЕ

А. П. Абелла , М. Н. Сориаño*

*National Institute of Physics, University of the Philippines Diliman
1101, Quezon City, Philippines*

Поступила в редакцию 26 марта 2019 г.,
после переработки 14 июня 2019 г.
Принята к публикации 15 июля 2019 г.

Изучена динамика поверхностных волн, образующих октупольную вихревую структуру на границе раздела воздух–вода. Поверхностные волны возбуждались квадратным волнопродуктором, состоящим из четырех цилиндрических стержней, наполовину погруженных в воду. Эти волны направляли движение поплавков по круговым траекториям, образуя два вращающихся навстречу друг другу вихря вдоль каждого стержня, что создавало общую октупольную структуру. С помощью пространственно-временного анализа выполнена трехмерная реконструкция высоты волн и описана конфигурация потоков. Полное волновое поле разлагалось на компоненты, исходящие от краев и углов волнопродуктора. Проведено качественное моделирование октупольных вихрей на основе аналитического решения для потенциала скоростей через суперпозицию прямых и сдвинутых по фазе наклонных бегущих волн от волнопродуктора. Данная методика представляет собой феноменологическое описание течения жидкости, которое можно использовать для моделирования волн внутри произвольного ограниченного пространства.

DOI: 10.31857/S0044451020030153

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует несколько способов управления плавающими объектами, например, при помощи волн Фарадея внутри контейнера с вертикальной вибрацией [1] или за счет осциллонов, создаваемых сильно нелинейными поверхностными волнами [2]. С помощью этих методик изучалось коллективное движение частиц, обусловленное внутренними свойствами жидкости, такими как смачиваемость и плотность [3–5]. Также рассматривались образование вихрей и волновая фокусировка за счет рельефа волны и условий на глубины, определяющих распространение поверхностных волн [6–8]. В работе [9] движение поплавков ограничивалось стоячими волнами, создаваемыми при помощи вертикального движения ванн малого размера, в основном для применения при производстве тканей. Кроме того, в работе [10] описано устройство управления движением плавающих частиц вдоль многих замкнутых траекторий,

состоящее из двух прямоугольных лопастей, качающихся с задержкой по фазе на $\pi/2$. Это также было независимо осуществлено в более ранней работе [11], в которой вместо полностью погруженных лопастей были использованы два цилиндрических наполовину погруженных поршня. Вместе со стенками контейнера эти волнопродукторы составляли замкнутое квадратное пространство. Внутри него можно было возбуждать вихревые волны за счет наложения ортогональных стоячих волн от волнопродукторов и стенок, которые создавали угловой момент, необходимый для движения частиц по концентрическим круговым траекториям [10]. Вихревые волны отличаются от стоячих тем, что их гребни и впадины вращаются и меняются местами вокруг узловых точек, в то время как гребни и впадины стоячих волн только колеблются в вертикальном направлении, оставаясь на месте в течение каждого периода.

В данной работе создан квадратный волнопродуктор из четырех цилиндрических стержней. Он подвешен на границе раздела воздух–вода и колеблется как единое целое. При помощи этого устройства на поверхности создавалась октупольная структура, образуемая парами противополож-

* E-mail: aabella@nip.upd.edu.ph

но закрученных вихрей вращающихся частиц вдоль каждого края волнопродуктора. Оказалось, что именно вихревые волны отвечают за перенос частиц внутри квадратного волнопродуктора. В работе [10] удалось описать вихревые волны и воспроизвести отдельные вихри путем наложения потенциалов скоростей ортогональных и сдвинутых по фазе стоячих волн.

Цель данной работы состоит также в том, чтобы изучить и до некоторой степени воспроизвести образование этих волн и октупольных вихрей. Для этого сначала проанализирован пакет волн, образующих такие структуры, а затем проведено их аналитическое моделирование в виде прямой суперпозиции бегущих волн. Пространственно-временной анализ потока свидетельствует о том, что вихревые волны состоят из волн от краев и сдвинутых по фазе наклонных волн, исходящих из углов волнопродуктора. Разработана методика разложения падающих и отраженных волн на наклонные волны в случае колебания всех четырех или только одного стержня. Получено аналитическое решение для потенциала скоростей (в предположении невязкого безвихревого течения) потока, приводящего к образованию октупольных вихрей на границе раздела воздух–вода. Обсуждаются возможные применения данных результатов.

2. МЕТОДИКА

2.1. Экспериментальная ячейка

Схема экспериментальной ячейки изображена на рис. 1а. Эксперименты проводились в изготовленном из оргстекла квадратном резервуаре размером $290 \times 290 \text{ мм}^2$, наполненном слоем воды высотой $d = 53 \text{ мм}$. Изучались поверхностные волны, образующиеся внутри замкнутой квадратной ячейки волнопродуктора. Изображение на рис. 1б получено от волнопродуктора размером $100 \times 100 \text{ мм}^2$, кромки которого изготовлены из приклеенных друг к другу акриловых цилиндров диаметром 10 мм. Волнопродуктор подвешивался на границе раздела воздух–вода таким образом, что все цилиндрические стержни были погружены наполовину. Вертикальные колебания возбуждались с помощью низкочастотного динамика, управляемого генератором сигналов Rigol. Снизу резервуар подсвечивался светодиодами. Видеосъемка волн осуществлялась сверху при помощи камеры GoPro™ Hero 5 с узким полем зрения объектива с разрешением 1280×720 пикселей и скоростью съемки 240 кадров в секунду. Для ди-

станциионного управления камерой использовалось смартфонное приложение Capture. Оптические искажения снимков корректировались предварительной калибровкой камеры.

Поверхностные волны, возбуждаемые квадратным волнопродуктором, подчиняются дисперсионному соотношению для гравитационно-капиллярных волн вида

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right) \text{th}(kd), \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi f$ — угловая частота волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, g — ускорение свободного падения, $\sigma = 70 \text{ мН/м}$ — коэффициент поверхностного натяжения, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды. Генератор был настроен на частоту $f = 7 \text{ Гц}$, при которой октупольная структура вихрей от квадратного волнопродуктора наблюдалась визуально. Для успешного отображения картины высоты волн было необходимо работать в приближении малых наклона и амплитуды, начиная с самых слабых амплитуд возбуждения, таким образом, чтобы до начала смещения трассеров высоты волн не превышали значения 4 мм. Примеры наложенных траекторий трассирующих частиц (размером около 150 мкм) показаны на рис. 1с. Вдоль всех четырех стержней появляются пары противоположно закрученных вихрей из вложенных вращающихся частиц, образующих октупольную структуру. Далее будут определены волны, создающие эти структуры, а также проведено их моделирование при помощи метода потенциалов.

2.2. Методика трехмерной реконструкции высоты волн

Для трехмерной реконструкции волн, создающих вихри, применялся обобщенный шпирен-метод для свободной поверхности, позволяющий вычислять градиент высоты поверхностных волн из векторного поля деформационных смещений случайноточечной текстуры, расположенной снизу резервуара [12], как показано на рис. 2а. Поле смещений получается за счет линзового эффекта, создаваемого на текстуре гребнями и впадинами поверхностных волн. Сначала вычислялись векторы поля скоростей, как показано на рис. 2б. Вычисления проводились с помощью пакета PIVlab, а также пакета цифровой велосиметрии точечных отображений на основе MATLAB [13]. Далее вычислялось смещение δx в направлении x путем деления соответствующей скорости u_x на частоту кадров камеры. Затем вы-

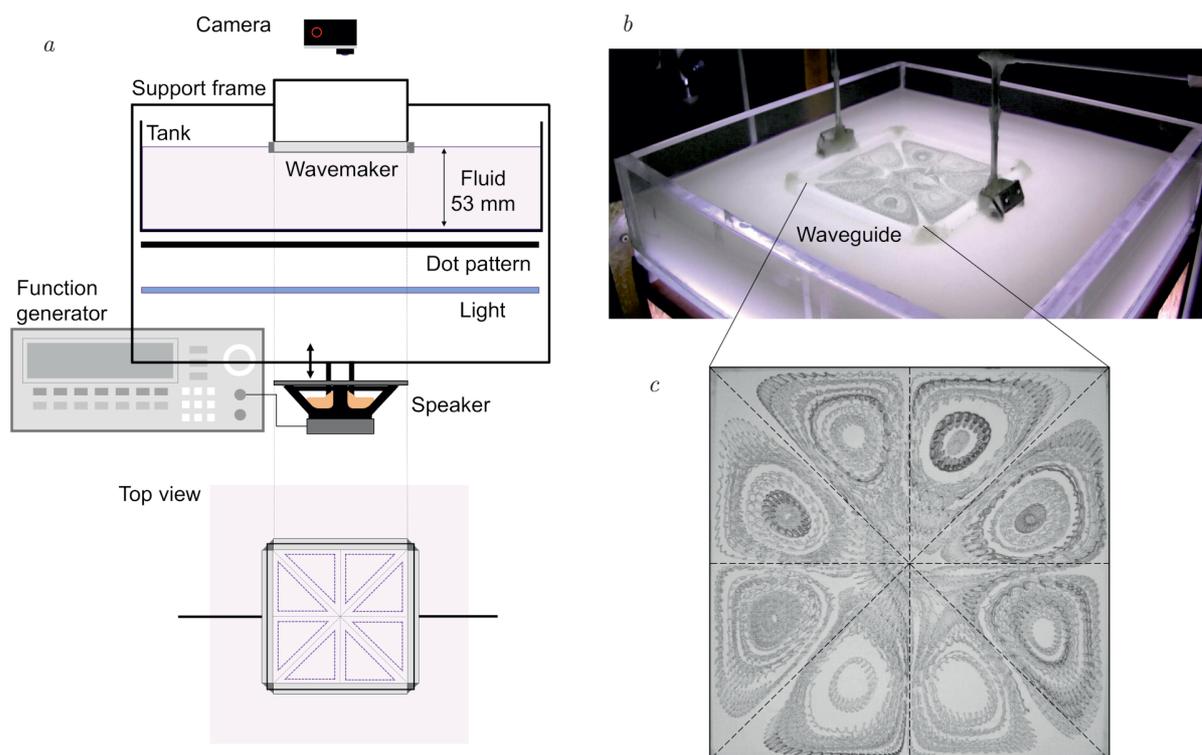


Рис. 1. *a)* Схема экспериментальной ячейки. Колебания квадратного волнопродуктора возбуждаются при помощи динамика, управляемого генератором сигналов. Сверху размещена камера для съемки волнового поля, подсвеченного снизу резервуара. *b)* Фотография экспериментальной ячейки, на которой показан волнопродуктор с движущимися внутри частицами. *c)* Вид сверху на волнопродуктор, демонстрирующий оккупольную структуру траекторий вращающихся частиц

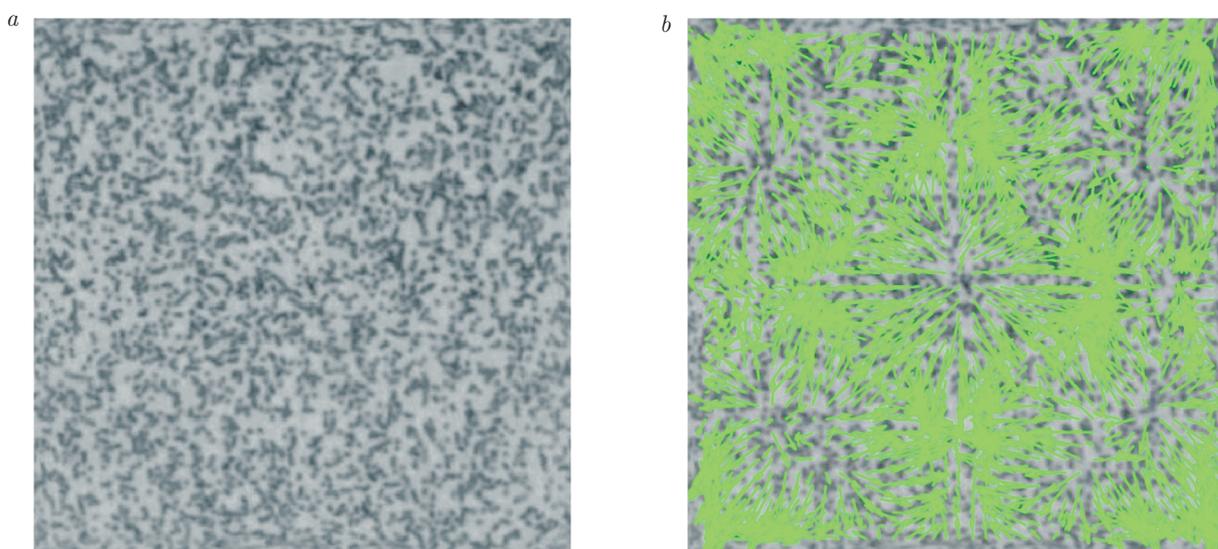


Рис. 2. (В цвете онлайн) *a)* Случайно-точечная текстура, расположенная снизу резервуара, для применения обобщенного шлирен-метода для свободной поверхности. Показана область внутри квадратного волнопродуктора. *b)* Зелеными стрелками показаны векторы скоростей, полученные с помощью пакета PIVlab, которые отмечают искажения случайно-точечной текстуры из-за линзового эффекта от волновых гребней и впадин

числялись градиенты высоты поверхности в направлении x , которые выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\delta x}{h^*}, \quad (2)$$

где

$$\frac{1}{h^*} = \frac{1}{\alpha h_p} - \frac{1}{H},$$

$$\alpha = 1 - \frac{n}{n'}, \quad h_p = h_0 + \frac{n'}{n_g} h_g + \frac{n'}{n_a} h_a,$$

где $n = 1$, $n' = 1.33$, $n_g = 1.49$ и n_a — показатели преломления соответственно воздуха, воды, акрилового дна и вещества между акриловым дном и точечной текстурой (обычно воздуха), $H = 580$ мм — расстояние от текстуры до камеры, $d = 53$ мм — высота воды, $h_g = 12.7$ мм — толщина акрилового дна и h_a — толщина слоя вещества с показателем преломления n_a , которая принимается равной нулю, поскольку текстура расположена непосредственно под резервуаром.

Точечная текстура состоит из 50000 случайно распределенных точек диаметром 1 мм каждая, отпечатанных на принтере формата А3. Эти параметры обеспечивают выполнение необходимого для успешного применения шпирен-метода условия параксиального приближения на максимальный параксиальный угол

$$\beta_{max} \simeq F/\sqrt{2}H \ll 1,$$

где F — поле зрения камеры. В данном случае $\beta_{max} = 0.12$. Важно отметить, что поскольку в шпирен-методе при вычислении векторов смещений случайно-точечной текстуры необходимо использовать цифровую взаимнокорреляционную функцию, пространственное разрешение будет соответствовать размеру заданного при расчетах окна. Поле зрения в эксперименте внутри квадратного волнопродуктора составляет 326×326 пк (84×84 мм²). После вычисления векторов смещения пространственное разрешение уменьшается до 39×39 пк (2.15 мм/пк), поэтому точная сетка 256×256 пк (0.33 мм/пк) получается путем линейной интерполяции.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

3.1. Пространственно-временной анализ высот волн

На рис. 3а приведена трехмерная реконструкция поверхностных волн внутри квадратного волнопродуктора, полученная с помощью шпирен-метода. Усредненный частотный спектр высот волн,

$$E_\eta(f) = \langle |\eta(x, y, f)|^2 \rangle, \quad (3)$$

вычислялся, как показано на рис. 3б, при помощи преобразования Фурье с использованием алгоритма Велча [14], где $\eta(x, y, t)$ — высота волны, а скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по семи временным окнам длиной $10T$ каждое ($T = 1/f$ — период возбуждающей волны) и по всему пространству. Стационарные волновые данные получались через 30 с после начала возбуждения. Наблюдалось, что в волновом поле преобладает возбуждающая частота $f = 7$ Гц. Описание пространственного распределения преобладающих волн получалось из частотного спектра в каждой точке с последующим интегрированием в окрестности f [15]. Амплитуда возбуждающей волны в каждой точке выражается следующим образом:

$$\tilde{a}(x, y) = \left(\int_{f-\delta f}^{f+\delta f} E_\eta(x, y, f) df \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где $\delta f = 0.5$ Гц. Расчет для $\tilde{a}(x, y)$ показан на вставке к рис. 3б, на которой четко видно положение всех восьми узловых точек (минимумов амплитуды) волнового поля. Помимо этого имеется круговая линия углов радиусом приблизительно $\lambda/4$ от центра волнопродуктора. Также было прослежено перемещение гребня, который в момент времени $t = t_0$ находился в левом верхнем углу и за период T перемещался приблизительно к середине кромки волнопродуктора (рис. 3с). Позиции внутри квадратной ячейки, пройденные гребнями и впадинами, обозначены на рис. 3д соответственно красными и синими точками (присутствуют наложения). Следует учесть, что эти точки волновых пиков создают распределение для ячеек октупольных вихрей и окружают пустые белые области без точек. Штриховой линией на рис. 3д обозначена траектория угловой волны, прослеженная на рис. 3с. Оранжевыми стрелками показано общее движение волн внутри волнопродуктора, распространяющихся от углов к середине кромок. Эти результаты позволяют утверждать, что образование октупольных вихрей обусловлено именно вихревыми (а не просто стоячими) волнами. Белые области на рис. 3д заключены внутри траекторий вращающихся волновых гребней и впадин, образующих вихри. Эти вихревые волны создают угловой момент, необходимый для направленного движения частиц, образующих ячейки октупольной структуры.

Для дальнейшего подтверждения этих наблюдений было проведено моделирование составляю-

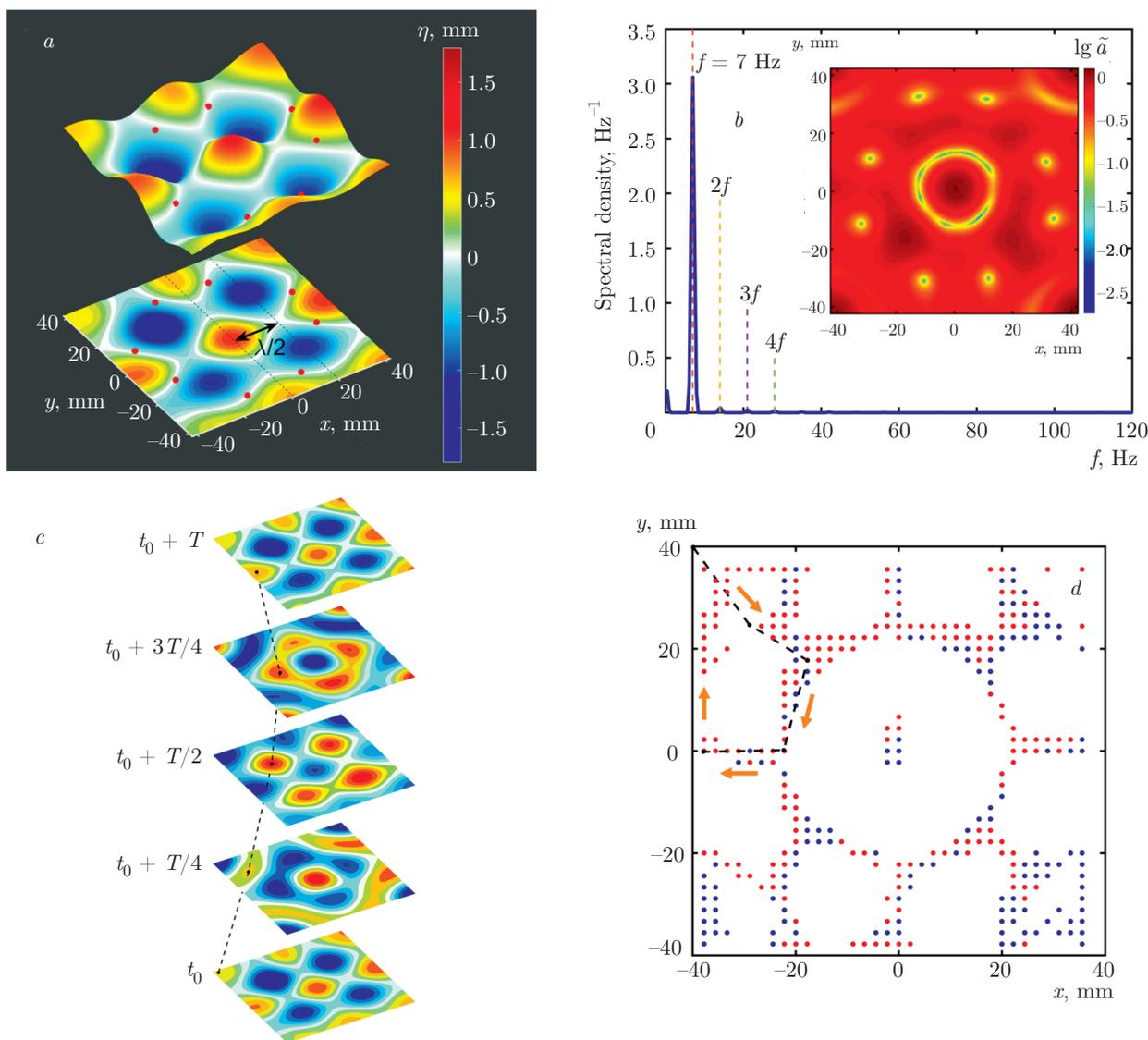


Рис. 3. (В цвете онлайн) *a*) Перепады волн, измеренные с помощью обобщенного шлирен-метода для свободной поверхности. Красными кружками обозначены положения узловых точек. *b*) Усредненный частотный спектр, полученный из данных по высоте волн. На волновом поле наблюдается преобладание вынуждающей частоты $f = 7$ Гц. На вставке показан расчет амплитуды $\lg \tilde{a}$ в диапазоне $f \pm \delta f = 7 \pm 0.5$ Гц, для которого четко видны восемь узловых точек. Также имеется круговая узловая линия на радиусе приблизительно $\lambda/4$ от центра. *c*) Перемещение гребня в течение периода из верхнего левого угла к середине края. *d*) Точки на пути движения волновых гребней (красные) и впадин (синие) на поверхности внутри волнопродуктора. Штриховой линией показана ранее прослеженная траектория угловой волны. Оранжевыми стрелками показано общее движение вихревых волн внутри волнопродуктора, распространяющихся от углов по направлению к круговой узловых линии, а затем к середине кромок

ших волн при помощи метода волнового разложения, описанного в работе [16]. Рассмотрим, например, данные поля составляющих волн (сочетание волновых компонент любого направления) для произвольного момента времени t_0 , показанные выше на рис. 3а. Сшитое по времени изображение созда-

ется путем объединения отдельных развернутых по оси x профилей, снятых в разные моменты времени. Сшитое изображение $\eta(x, t)$ имеет размерность длины по оси x и времени по оси y . Применяя к сшитому изображению алгоритм двумерного пространственного преобразования Фурье, получаем образ в

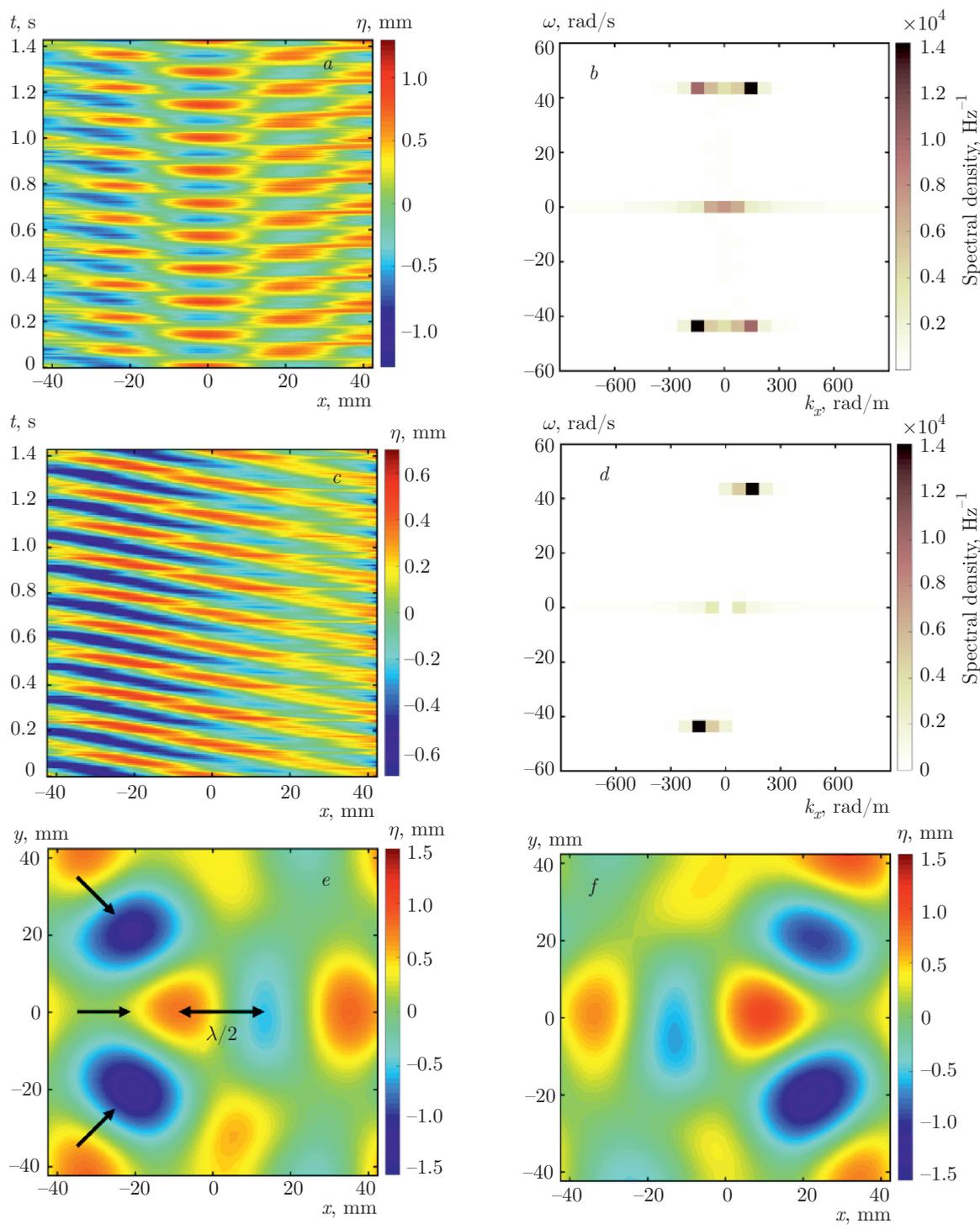


Рис. 4. (В цвете онлайн) *a)* Сшитое по времени изображение, полученное путем накопления однорядных профилей высоты волн вдоль оси x в разные моменты времени. *b)* Спектральная плотность, полученная в результате двумерного пространственного фурье-преобразования изображения на рис. 3*a*. Видны максимумы спектральной плотности на частотах $\omega = \pm 43.5$ рад/с вблизи ожидаемого значения $\omega = 2\pi f = 43.98$ рад/с, которые соответствуют волнам с правой и левой поляризациями. Исключая вклад второй и четвертой четвертей полученного изображения и проводя обратное преобразование Фурье оставшихся четвертей в пространстве $k_x - \omega$, получаем реальное изображение волны с правой поляризацией (*c*) и соответствующий фурье-образ (*d*). *e, f)* Волны с правой (*e*) с левой (*f*) поляризациями для профиля высоты волн, приведенного на рис. 3*a*. Стрелками обозначены предполагаемые направления взаимодействующих волн, поскольку угловые наклонные волны также имеют компоненты с правой и левой поляризациями

пространстве $k_x - \omega$ (рис. 4b). Коэффициенты преобразования определяются следующим образом:

$$\eta(k_x, \omega) = \frac{1}{MN} \sum_{x=-N/2+1}^{N/2} \sum_{t=-M/2+1}^{M/2} \eta(x, t) \times \exp[-i(k_x x - \omega t)]. \quad (5)$$

На рис. 4b видны максимумы спектральной плотности при $\omega = \pm 43.5$ рад/с, что близко к ожидаемому значению $\omega = 2\pi f = 43.98$ рад/с. Наличие пары пиков обусловлено сочетанием волн с правой и левой поляризациями. Заметим, что шаг вдоль направления k_x составляет 73.2 рад/м, а сшивку по времени профилей по оси y дает такие же конечные значения для k_y . Расчетное значение волнового вектора для частоты $f = 7$ Гц составляет $k = 165.2$ рад/м, а из величин $k_x = 73.2$ и $k_y = 146.4$ рад/м получается $k = 163.7$ рад/м. На рис. 4b волнам с правой поляризацией соответствуют пики спектральной плотности в первой и третьей четвертях ($\omega/k_x > 0$), а волнам с левой поляризацией — во второй и четвертой ($\omega/k_x < 0$). Парно заменяя четверти нулевыми вставками и проводя над получившимся изображением в пространстве $k_x - \omega$ обратное преобразование Фурье, получаем другое изображение в пространстве $x - t$, в котором отфильтрованы волны с правой или левой поляризацией. На рис. 4c показано изображение в пространстве $x - t$ только для волн с правой поляризацией, а на рис. 4d приведено соответствующее изображение в пространстве $k_x - \omega$. На рис. 4e представлено поле волн с правой поляризацией, полученное после повторения данной процедуры для всех профилей по оси x , т. е. горизонтальных линий поля составляющих волн на рис. 3a. Стрелками показаны предполагаемые направления волн, сочетание которых образует данное поле волн с правой поляризацией, а именно, волн, идущих от краев и из двух углов. На рис. 4f показано поле волн с левой поляризацией.

Волны, имеющие как горизонтальные, так и вертикальные составляющие (наклонные волны) получаются таким же способом, но волны с правой и левой поляризациями учитываются отдельно, а вместо профилей по оси x берутся профили по оси y . На рис. 5a и 5c четко видны волны соответственно из левых верхнего и нижнего углов. Двусторонние стрелки указывают направление под углом 45° к горизонтали, а их длина равна $\lambda/2$. Аналогично, на рис. 5b и 5d показаны волны, выходящие соответственно из правых верхнего и нижнего углов. Подчеркнем, что это относится только к волновому полю, изображенному на рис. 3a, и служит наглядным

представлением того, как наклонные угловые волны в сочетании с волнами, идущими непосредственно от краев, образуют волны с правой и левой поляризациями, формирующие октапольную структуру.

Для определения соотношения фаз между краевыми и наклонными волнами был проведен отдельный эксперимент, в котором колебалась только левая кромка квадратного волнопродуктора (рис. 6). Отображение высоты волн осуществлялось при помощи съемки в диффузном освещении [10]. Для достижения необходимого уровня рассеяния света в воду добавлялось некоторое количество молока (3%). Затем детектируемые значения интенсивности света калибровались по отношению к высоте жидкости. В эксперименте использовалась камера Panasonic HDC-HS900 с разрешением 1920×1080 пк, установленная в режиме 60 кадров в секунду.

Волновое поле на поверхности внутри замкнутой ячейки в момент времени t изображено на рис. 7a, на котором видны обычные бегущие волны с длиной волны λ , направленные вправо от левой колеблющейся кромки. Однако в следующий момент времени $t + T/4$ (соответствующий задержке по фазе $\phi = \pi/2$) наблюдалось появление наклонных волн, похожих на обнаруженные ранее. Период колебаний равен $T = 0.143$ с, следовательно, $T/4 = 0.036$ с, что соответствует 2.142 кадра. Для получения изображения в момент времени $t + T/4$ к выбранному изображению в момент времени t было добавлено 2 кадра, что дает ошибку 0.142 кадра или 0.0024 с, соответствующую $0.017T$. Для визуализации снова применялся метод сшивки по времени волнового разложения, что позволяет увидеть на рис. 7c наклонные волны из нижнего левого угла. Двусторонними стрелками показано направление под углом 45° к горизонтальной оси и длина волны λ . Если волны, возбуждаемые левым краем, численно развернуть на 90° , 180° и 270° , а затем наложить их друг на друга вместе с исходной волной, то получившаяся диаграмма $\lg \tilde{a}$ (рис. 7d) будет качественно соответствовать картине вихревых волн, представленной на рис. 3b. Таким образом экспериментально показано, что вихревые волны, образующие октапольные вихри, являются комбинацией волн от краев и наклонных волн, идущих из углов с задержкой фазы $\pi/2$.

3.2. Аналитическое моделирование волн и вихрей

Поняв механизм образования вихревых волн, формирующих октапольные вихри, попытаемся

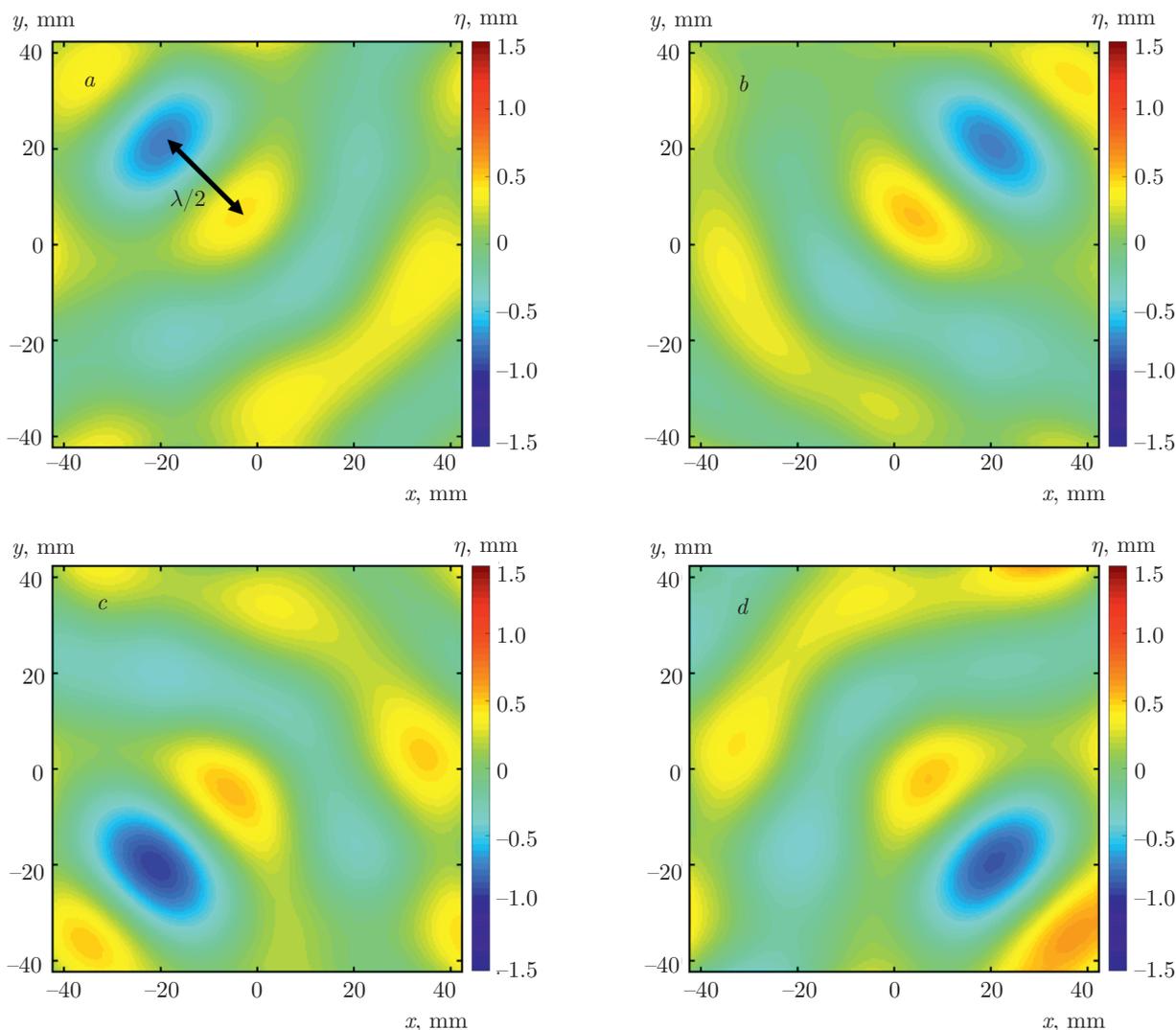


Рис. 5. (В цвете онлайн) Визуализация волн, исходящих от углов квадратного волнопродуктора. Волны от левого верхнего (a) и левого нижнего (c) углов получены соединением профилей вдоль оси y волн с правой поляризацией, а волны от правого верхнего (b) и правого нижнего (d) углов — с левой поляризацией. Двусторонние стрелки направлены под углом 45° к горизонтальной оси и обозначают длину волны λ

смоделировать это явление на основе расширенного аналитического подхода, описанного в работе [10]. Используется аналогия между смещением, вызываемым вихревыми волнами, и обычным сдвигом Стокса от плоских волн. Для моделирования высоты поверхностных волн, $\eta(x, y, t)$, и распределения скоростей применяются уравнения Эйлера для несжимаемого потока с соответствующими граничными условиями [10, 17, 18]. По примеру метода, изложенного в работе [10], в расчетах пренебрегалось влиянием поверхностного натяжения. Такое приближение возможно, поскольку частота гравитационных волн не превышает величины $f \simeq 13$ Гц. Распределение скоростей идеальной

безвихревой жидкости \mathbf{u}^P выражается в виде градиента потенциала скорости $\Phi(x, y, z, t)$:

$$\mathbf{u}^P = \nabla\Phi.$$

В случае, рассмотренном в работе [10], получались сложные ячеистые структуры, образуемые за счет наложения стоячих волн от двух горизонтальных и вертикальных лопастей (а также двух противоположных стенок), одна из которых имела сдвиг по фазе $\pi/2$. В данной работе рассматриваются четыре синфазные бегущие волны, исходящие непосредственно от краев волнопродуктора, и четыре наклонные волны, описанные в предыдущем разделе. Наклонные волны сдвинуты по фазе на $\pi/2$ по отно-

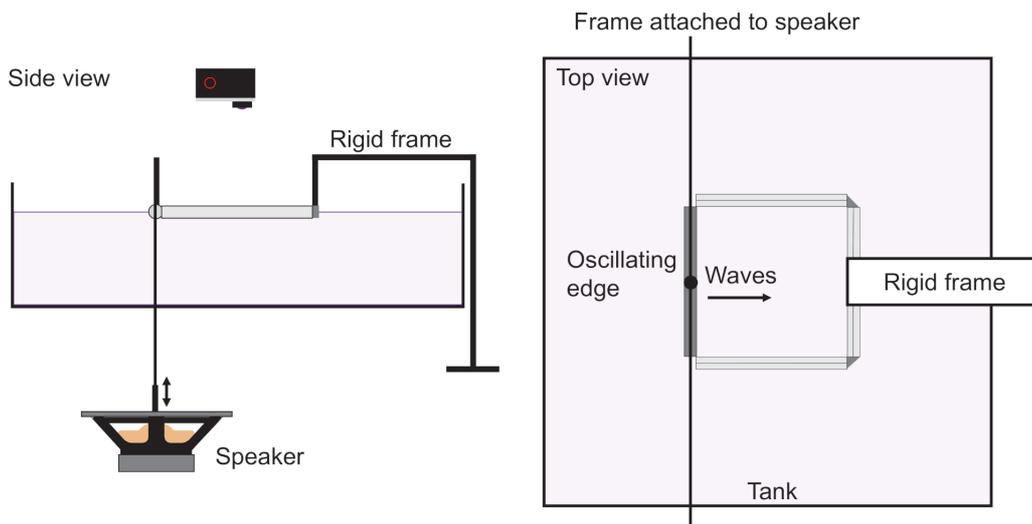


Рис. 6. Модифицированная ячейка с одной подвижной кромкой

шению к краевым волнам и распространяются под углами $\pm 45^\circ$ от углов к центру ячейки. Представим потенциал скоростей боковых волн в следующем виде:

$$\Phi_E = \frac{Lg}{2\omega} \frac{\text{ch}[k(z+d)]}{\text{ch}(kd)} \cos(kx \pm \omega t), \quad (6)$$

где величина L пропорциональна амплитуде волны, а для описания волн, движущихся вверх-вниз, x заменяется на y . Потенциал скоростей наклонных волн имеет вид

$$\Phi_O = \frac{Lg}{2\omega} \frac{\text{ch}[k(z+d)]}{\text{ch}(kd)} \times \cos[k(x \cos \theta - y \sin \theta) \pm \omega t \mp \phi], \quad (7)$$

где $\phi = \pi/2$ и $\theta = \pm 45^\circ$ для каждого набора при смене направления волны (правых и левых волн). Суперпозиция восьми волн дает следующее выражение для полного потенциала скоростей внутри волнопродуктора:

$$\Phi(x, y, z, t) = A \text{ch}[k(z+d)] \{ \cos(\omega t) [\cos(kx) + \cos(ky)] + 2 \sin(\omega t) \cos(kl_x) \cos(kl_y) \}, \quad (8)$$

где $A = Lg/\omega \text{ch}(kd)$, $l_x = \sqrt{2}x/2$ и $l_y = \sqrt{2}y/2$. Тогда поле скоростей $\mathbf{u}^P = \nabla \Phi$ определяется выражением

$$\mathbf{u}^P = \frac{Lkg}{\omega} \frac{\text{ch}[k(z+d)]}{\text{ch}(kd)} \times \{ -[\cos(\omega t) \sin(kx) + \sqrt{2} \sin(\omega t) \cos(kl_y) \sin(kl_x)] \hat{\mathbf{x}} - [\cos(\omega t) \sin(ky) + \sqrt{2} \sin(\omega t) \cos(kl_x) \sin(kl_y)] \hat{\mathbf{y}} + \text{th}[k(z+d)] [\cos(\omega t) [\cos(kx) + \cos(ky)] + 2 \sin(\omega t) \cos(kl_x) \cos(kl_y)] \hat{\mathbf{z}} \}. \quad (9)$$

В общем случае потенциального потока скорость $\mathbf{u} = \nabla \Phi$ связана с давлением p через уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} = -gz, \quad (10)$$

где $u = |\mathbf{u}|$, а член gz учитывает поле тяжести. Ось z направлена вертикально вверх, а плоскость xy совпадает с равновесной поверхностью жидкости. Координата z точки на поверхности жидкости, обозначенная η , является функцией x , y и t . В равновесии $\eta = 0$, а $\eta(x, y, t)$ задает вертикальное смещение поверхности жидкости во время колебаний. При постоянном давлении p_0 над поверхностью жидкости уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p_0}{\rho} = -g\eta. \quad (11)$$

Постоянный по давлению член можно устранить путем внесения его в не зависящий от координат потенциал $p_0 t/\rho$. Тогда условие на поверхности можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 \right]_{z=\eta} = -g\eta. \quad (12)$$

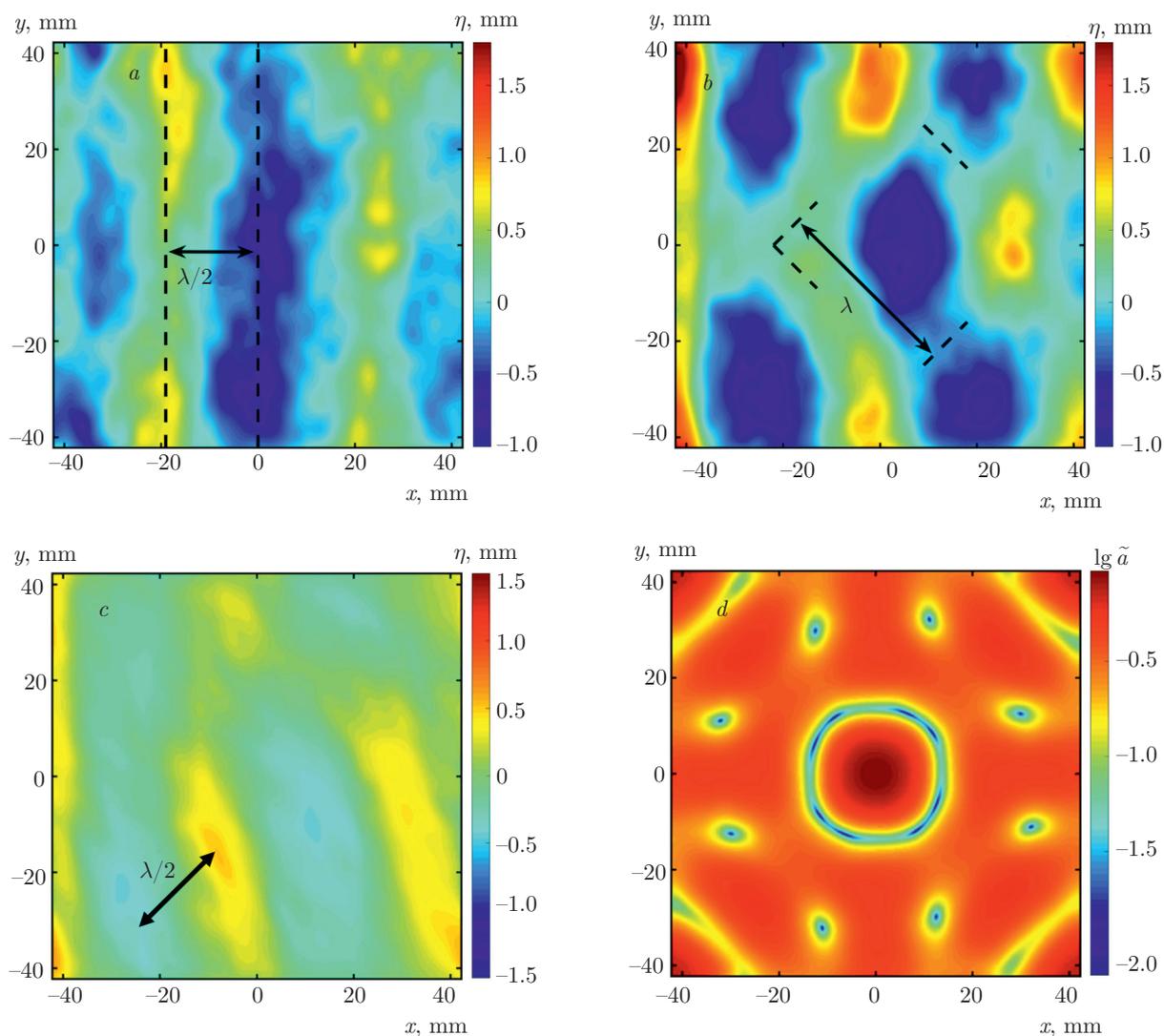


Рис. 7. (В цвете онлайн) *a*) Бегущая волна длины λ , выходящая с левого края в произвольный момент времени t . *b*) Появление наклонной волны в момент времени $t + T/4$, соответствующий сдвигу по фазе $\phi = \pi/2$. Штриховые линии обозначают направление под углом $\pm 45^\circ$ к горизонтальной оси. *c*) Набегающие наклонные волны от нижнего левого угла (в согласии с предыдущими результатами). *d*) При численном повороте исходной волны от левого края на углы 90° , 180° и 270° и наложении их друг на друга получается диаграмма $\lg \tilde{a}$, напоминающая вихревые волны, изображенные на рис. 3*b*

Для вычисления мгновенного распределения волн по высоте, $\eta(x, y, t)$, можно преобразовать динамическое граничное условие (12) для свободной поверхности к виду, включающему x - и y -компоненты \mathbf{u}^P из уравнения (9):

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right]_{z=\eta} = -g \nabla \eta. \quad (13)$$

По примеру работы [10] разлагаем в ряд содержащие $k\eta$ гиперболические функции, удерживая чле-

ны до порядка $O(k\eta)$, и в конечном итоге выделяем η .

Полученное распределение волн по высоте показано на рис. 8*a*. Результат моделирования рельефа поверхности хорошо соответствует экспериментальным реконструкциям высот волн, приведенным на рис. 3*a*. Изображение, образованное точками волновых максимумов на рис. 8*b*, также совпадает с картиной, показанной на рис. 3*d*, которая также разделяется на восемь ячеек октапольных вихрей.

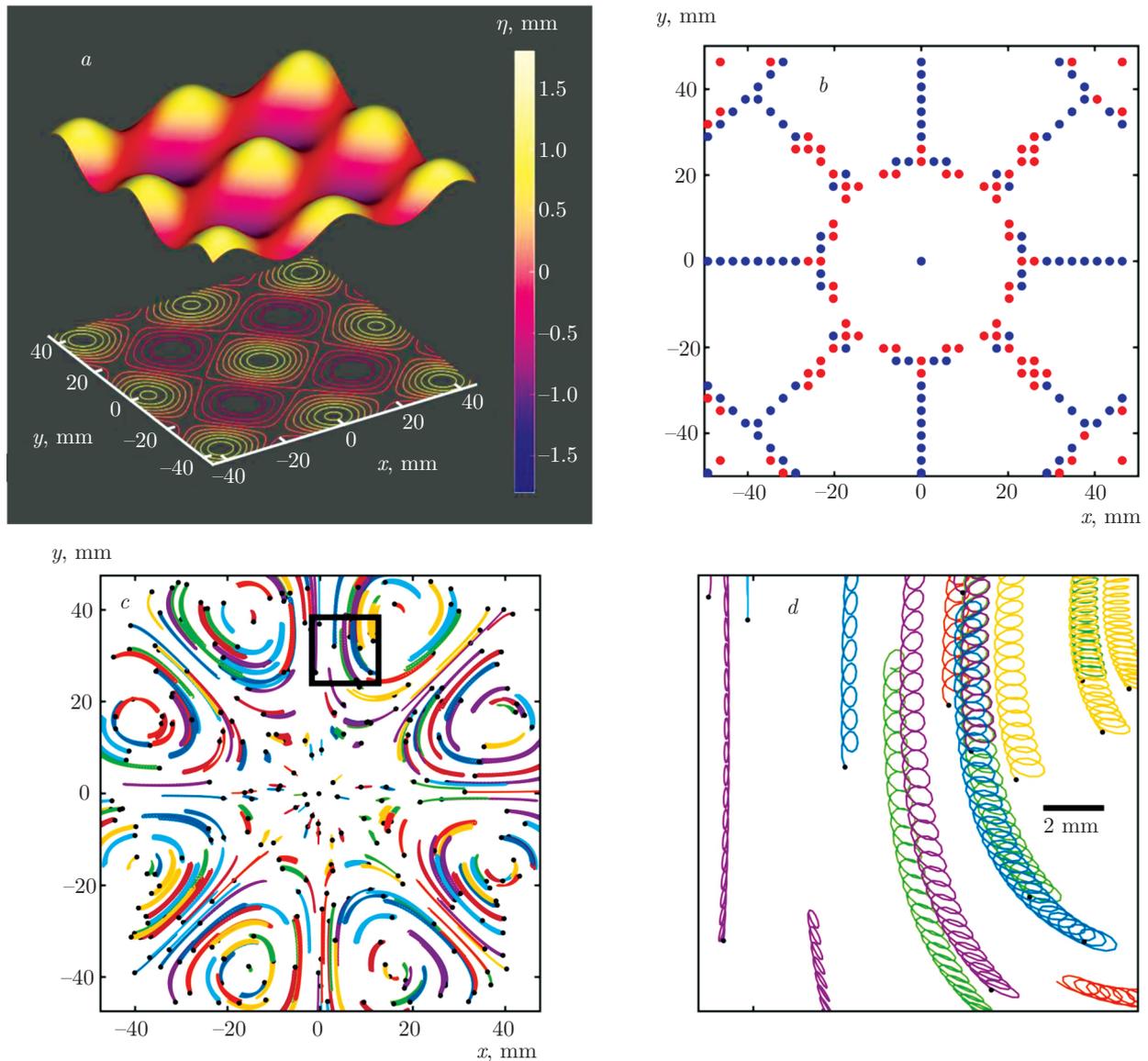


Рис. 8. (В цвете онлайн) *a*) Результат моделирования распределения высоты поверхностных волн $\eta(x, y, t)$. *b*) Пути перемещения волновых гребней (красные точки) и впадин (синие точки) на поверхности внутри волнопродуктора, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными. *c*) Траектории частиц, рассчитанные путем интегрирования суммы $\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^P + \mathbf{u}^D$ по времени $35T$, хорошо воспроизводящие октапольную структуру вихрей. *d*) Увеличенный выделенный фрагмент панели *c*, на котором четко видно вращение частиц

На основе результатов работы [10] также рассчитан дополнительный вклад скорости \mathbf{u}^D медленно-го смещения, которое усиливает быстрые вращения. Чисто кинематический вклад, включающий в себя стоков сдвиг скорости, учитывается в члене \mathbf{u}^P , в то время как член \mathbf{u}^D представляет собой отклик потока на усредненную по времени нелинейную адвекцию, выраженную через \mathbf{u}^P [19]. В работе [19] подробно объясняется, что амплитуды этих вкладов

одинаковы по порядку величины, в связи с чем трудно количественно определить, какой из них преобладает. Дополнительный член смещения \mathbf{u}^D по порядку величины равен

$$\mathbf{u}^D \sim \overline{\left(\int_0^t \mathbf{u}^P dt' \right)} \cdot \nabla \mathbf{u}^P, \quad (14)$$

где

$$\overline{(\dots)} = \frac{1}{T} \int_0^T (\dots) dt$$

— усреднение по одному периоду T . Тогда выражение для компонент \mathbf{u}^D приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a^D \sim & -\frac{k^3 L^2 g^2}{2\omega^3 \operatorname{ch}^2(kd)} \times \\ & \times \{2U \sin(ka) - \sqrt{2}V[\cos(kx) + \cos(ky)] - \\ & - \operatorname{ch}^2[k(z+d)][3U \sin(ka) - \sin(kb) \sin(kl_x) \sin(kl_y) - \\ & - 2\sqrt{2}V(\cos(ka) + \cos(kb))]\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $U = \cos(kl_x) \cos(kl_y)$, $V = \cos(kl_b) \sin(kl_a)$, $l_x = \sqrt{2}x/2$, $l_y = \sqrt{2}y/2$, $\{a = x, b = y\}$ для x -компоненты и $\{a = y, b = x\}$ для y -компоненты.

В работах [6, 10] независимо описано одно и то же явление образования ячеистых вихрей с использованием ортогональных волн с задержкой по фазе на квадратной поверхности, однако несколькими теоретическими способами. В работе [10] дополнительный вклад смещения учитывался путем вычисления члена \mathbf{u}^D и подстройки его амплитуды в размерном виде, т. е. путем исключения тригонометрических функций, как в выделенных членах уравнения (15). В работе [6] показано, что даже если вихревая структура обусловлена вязкостью, как на поверхности глубокого слоя воды, дополнительный вклад смещения можно выразить в рамках стокова сдвига, однако выражение (14) следует умножить на безразмерный коэффициент $\sqrt{2}$ (который в действительности может меняться в зависимости от наличия на поверхности нерастворимой пленки или за счет дополнительных эффектов вязкости типа доменных границ). Авторы работы [10] также отмечают, что их механизм возникновения вихрей принципиально отличается от рассмотренного в работе [6] образования вихрей за счет объемной вязкости, однако это утверждение остается неясным.

Для численной оценки дополнительного вклада в смещение действительно трудно проверить, для всех ли экспериментальных ячеек и конфигураций возбуждения волн имеется данный коэффициент. В настоящей работе при помощи метода складывания потенциалов краевых и сдвинутых по фазе наклонных волн показано, что данный член смещения имеет конечную величину, однако существуют определенные конфигурации, в которых дополнительный вклад исчезает [19]. Простейший случай нулевого смещения возникает при наложении синфазных ортогональных краевых волн, что в действительности

показано в работе [10], когда задается фазовая задержка между лопастями $\phi = 0$. В данном случае можно только приближенно определить полное поле скоростей, суммируя вклады от \mathbf{u}^P и \mathbf{u}^D с единичным весом и размерной амплитудой согласно выражению (15).

Примеры траекторий движения внутри замкнутого квадратного волнопродуктора, полученные интегрированием суммы $\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^P + \mathbf{u}^D$ для 291 произвольного начального положения за полное время $35T$, показаны на рис. 8с. На рис. 8d, представляющем увеличенный выделенный фрагмент рис. 8с, четко видны вложенные вращающиеся частицы внутри октупольных вихрей. Заметим, что этот результат лишь качественно моделирует наблюдаемое явление, поскольку получен в приближении невязкого потенциального потока даже на границах волнопродуктора. Несмотря на это показано, что вихревую структуру можно воспроизвести путем простого наложения краевых и наклонных бегущих волн.

4. ВЫВОДЫ

В настоящей работе при помощи методов реконструкции распределения волн по высоте и пространственно-временного анализа показано, что вихревые волны внутри квадратного волнопродуктора образуют октупольную вихревую структуру. Эти вихри состоят из бегущих боковых волн, исходящих непосредственно от краев волнопродуктора, и сдвинутых по фазе наклонных волн, идущих из его углов. Также показано, что явление возбуждения октупольных вихрей можно с некоторой точностью описать в рамках аналитической модели, основанной на суперпозиции потенциалов скоростей бегущих волн. Эксперименты показали, что вихревые волны могут образовываться при возникновении сдвинутых по фазе на $\pi/2$ волн, которые не обязательно являются полностью ортогональными, как в случае сдвинутых по фазе стоячих волн, рассмотренном в работах [10, 11]. Также можно предположить, что аналогичное моделирование можно применить к любой паре противоположно направленных вихрей, возникающих на каждом краю ячейки произвольной формы, например, в небольших многоугольных резервуарах, рассмотренных в работе [9]. В частности, помимо бегущих волн непосредственно от краев необходимо учитывать сдвинутые по фазе наклонные волны, идущие из каждого угла. В совокупности они вращают

и перемещают поплавки на поверхности, образуя вихревые структуры.

Благодарности. Авторы благодарят В. Парфеньева за полезные советы и предложения, а также П. Фонтана за помощь в аналитических расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Francois, H. Xia, H. Punzmann et al., Phys. Rev. X **4**, 021021 (2014).
2. H. Punzmann, N. Francois, H. Xia et al., Nature Phys. **10**, 658 (2014).
3. S. Lukaschuk, P. Denissenko, and G. Falkovich, Eur. Phys. J. Special Topics **145**, 125 (2007).
4. C. Sanli, D. Lohse, and D. van der Meer, Phys. Rev. E **89**, 053011 (2014).
5. P. Agrawal, P. S. Gandhi, and A. Neild, J. Appl. Phys. **114**, 114904 (2013).
6. S. Filatov, V. Parfenyev, S. Vergeles et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 054501 (2016).
7. G. R. Chavarria, P. Le Gal, and M. Le Bars, Phys. Rev. Fluids **3**, 094803 (2018).
8. Z. Wang, P. Zhang, X. Nie, and Y. Zhang, Sci. Rep. **5**, 16846 (2015).
9. P. Chen, Z. Luo, S. Guven et al., Adv. Mater. **26**, 5936 (2014).
10. N. Francois, H. Xia, H. Punzmann et al., Nature Comm. **8**, 14325 (2017).
11. С. В. Филатов, С. А. Алиев, А. А. Левченко, Д. А. Храмов, Письма в ЖЭТФ **104**, 714 (2016).
12. F. Moisy, M. Rabaud, and K. Salsac, Exp. in Fluids **46**, 1021 (2009).
13. W. Thielicke and E. J. Stamhuis, J. Open Res. Software **2**(1):e30 (2014).
14. Q. Aubourg and N. Mordant, Phys. Rev. Fluids **1**, 023701 (2016).
15. F. Haudin, A. Cazaubiel, L. Deike et al., Phys. Rev. E **93**, 043110 (2016).
16. C. Kuo, H. Hwung, and C. Chien, Wave Motion **46**, 189 (2009).
17. R. Dean and R. Dalrymple, *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, Vol. 2, World Sci. Publ. Comp., Singapore (1991).
18. L. Landau and E. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics: Fluid Mechanics*, Pergamon Press, London (1959).
19. J. Bouvard, W. Herreman, and F. Moisy, Phys. Rev. Fluids **2**, 084801 (2017).