ЖЭТФ, 2020, том 157, вып. 3, стр. 473–486

АНИЗОТРОПНОЕ РЕШЕНИЕ АДЛЕРА – ФИНЧА – СКИ В ТЕОРИИ $f(\mathcal{G})$-ГРАВИТАЦИИ

*М. Шариф**, *С. Саба***

Department of Mathematics, University of Punjab
54590, Lahore, Pakistan

Поступила в редакцию 3 июня 2019 г.,
после переработки 10 июля 2019 г.
Принята к публикации 17 августа 2019 г.

(Перевод с английского)

ADLER–FINCH–SKEA ANISOTROPIC SOLUTION IN $f(\mathcal{G})$ GRAVITY

M. Sharif, S. Saba

С использованием условий вложения, называемых условиями Кармаркара, получено анизотропное решение для сферически-симметричного самогравитирующего звездного объекта в рамках теории $f(\mathcal{G})$-гравитации. Для этого использовались масса и радиус трех модельных компактных звезд, а именно, Her X-1, SAX J 1808.4-3658 и 4U 1820-30, а также проводилось гладкое сшивание сферической внутренней и шварцшильдовской внешней геометрии пространства-времени. Для этих звездных моделей исследуются физическая реалистичность и устойчивость предложенного подхода. Оказалось, что построенная анизотропная модель является физически реалистичной и устойчивой, если она удовлетворяет всем необходимым требованиям для компактных звездных объектов.

DOI: 10.31857/S0044451020030086

1. ВВЕДЕНИЕ

Ключевыми объектами исследований в астрофизике и современной космологии являются как сами звезды, так и их различные физические свойства. Как известно, светящиеся звезды являются гигантскими источниками светового излучения в космосе. После взрыва обычной звезды и ее превращения в сверхновую появляются структуры с высокой плотностью, называемые компактными звездами. При этом возникает значительное направленное наружу давление, которое компенсирует действие направленной внутрь силы гравитации, обусловленной массой звездного объекта. Коллапс звезды наступает, когда эти силы (гравитационная и сила направленного наружу давления) стремятся уравновесить друг друга, что, в свою очередь, ведет к образованию новых компактных объектов, таких как белые карлики, нейтронные звезды, а также черных дыр. Эти компактные объекты обладают крайне высокой плотностью (большие массы при небольших радиусах), причем они не подвержены влиянию даже высоких температур.

В последнее время исследование компактных звездных объектов вызывает большой интерес у астрофизиков и космологов. Существование отличной от нуля анизотропии сферически-симметричных самогравитирующих объектов позволяет обнаружить важные физические характеристики, которые можно использовать в релятивистских моделях. Анизотропия давления в распределении материи возникает вследствие различных фазовых переходов, существования некой супержидкости, вязкости или конденсации пионов крайне плотных сферических объектов типа черных дыр. В работе [1] путем обобщения уравнения гидростатического равновесия была введена анизотропия релятивистской сферы, а также разнообразные физические свойства анизотропного давления. В работе [2] исследовалась устойчивость анизотропного самогравитирующего объекта при радиальных возмущениях как для ньютоновско-

* E-mail: msharif.math@pu.edu.pk
** E-mail: saadia.saba86@gmail.com

го случая, так и для случая ОТО и было обнаружено, что устойчивость моделей компактных звездных объектов усиливается при наличии анизотропии, а также при уменьшении адиабатического показателя.

В работе [3] исследовалось аналитическое анизотропное решение для кварковой материи с использованием линейного уравнения состояния (УС). Полученное решение было обобщено для конкретного профиля плотности звезды. В работе тех же авторов [4] исследовалось точное анизотропное решение для компактного объекта с использованием анизотропного фактора определенного вида и было получено необходимое реалистичное поведение для рассматриваемых физических объектов. Затем было исследовано точное аналитическое решение для случая заряженных кварковых звезд, когда допускается однопараметрическое семейство конформных движений [5]. В работе [6] исследовалась природа анизотропии для компактных звездных структур с радиальной зависимостью переменной космологической постоянной в пространстве-времени Криори – Баруа.

Для физически непротиворечивого анизотропного решения необходимо наложить некоторые условия на компоненты материи, геометрию пространства-времени или использовать некоторый частный вид УС. Для того чтобы вложить 4D-многообразие (искривленное пространство-время) в плоское (евклидово) пространство-время более высокой размерности, использовались различные способы и модели [7]. Если n-мерное псевдо-риманово многообразие $\mathcal{U}_n$ можно вложить в $(n+m)$-мерное псевдоевклидово пространство, где m — минимальное число дополнительных измерений, то говорят, что $\mathcal{U}_n$ имеет класс вложения m. Класс вложения внешнего решения Шварцшильда равен 2, а класс вложения внутреннего решения и стандартной модели Фридмана – Робертсона – Уокера (FRW) достигает 1. В плоском пространстве-времени с более высокой размерностью это вложение, имеющее искривленную геометрию, определяет условие, с помощью которого можно получить дополнительную связь между двумя пространственно-временными потенциалами (временным и радиальным), которое называется условием Кармаркара. Используя эту связь, можно найти решение с вложением класса 1 для статического сферически-симметричного пространства-времени. В работе [8] было получено анизотропное решение с вложением класса 1 и проанализированы результаты для нескольких теоретических звездных моделей. В работе [9] исследовались устойчивость и физические свойства анизотропной компактной звезды с вложением класса 1. Те же авторы в работе [10], используя различные потенциалы, предложили новую звездную модель с вложением класса 1. Кроме того, используя условия Кармаркара для статического сферически-симметричного пространства-времени [11], они получили обобщенные анизотропные модели.

В работе [12] рассматривались анизотропные внутренние решения для звездных объектов, пространственно-временная геометрия которых удовлетворяет условию Кармаркара. В работе [13] было получено решение с вложением класса 1, описывающее внутреннюю область астрофизических объектов. Авторы этой работы также исследовали другую звездную модель, которая описывает геометрическую сингулярность с помощью вложения четырехмерной геометрии искривленного пространства-времени в пятимерную псевдо-евклидову геометрию [14]. В работе [15] условие Кармаркара использовалось для нахождения решения с вложением класса 1 для сферически-симметричного пространства-времени. В работе [16] было получено новое решение с вложением класса 1 для сферического компактного звездного распределения в присутствии электромагнитного поля, а также было найдено физически реалистичное решение Адлера – Финча – Ски для компактных звезд.

Использование модифицированных теорий гравитации — один из перспективных способов поиска неизвестных характеристик темной Вселенной, обусловливающих космическое расширение. В работе [17] для эффективного анализа космических фазовых переходов на поздних стадиях было предложено использовать разнообразие космических составляющих, вводя модифицированную гравитацию Гаусса – Бонне (ГБ) (или $f(\mathcal{G})$-гравитацию), связанную с ГБ-инвариантом, с некими прецессионными членами и рассматривая производные высших порядков. Используемый второй скаляр Лавлока (ГБ-инвариант) представляет собой четырехмерный топологический член, который исключает духовые неустойчивости. В этот инвариант

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\alpha\delta}R^{\alpha\delta} + R_{\alpha\delta\mu\nu}R^{\alpha\delta\mu\nu}$$

входят квадратичные слагаемые, а именно квадрат скаляра Риччи R, а также комбинация тензора Риччи $R_{\alpha\delta}$ и тензора Римана $R_{\alpha\delta\mu\nu}$ [18]. В работе [19] были рассмотрены теории $f(\mathcal{G})$- и $f(R,\mathcal{G})$-гравитации, в которых, используя поправки высших порядков для кривизны, удалось избавиться от некоторых сингулярностей, возникающих в конечном будущем.

В работе [20] представлено краткое введение в разнообразные космологические аспекты различных модифицированных теорий гравитации, а именно, $f(R)$-, $f(G)$- и $f(R,G)$-гравитаций, которые рассматривались как гравитационная альтернатива темной энергии. Кроме того, было показано, что этим теориям соответствуют разнообразные космические структуры, т. е. с их помощью можно эффективно описать возможный фазовый переход от замедления к ускорению, а также режимы ускорения и расширения на поздних стадиях. Позднее те же авторы [21] рассмотрели различные представления упомянутых выше модифицированных теорий гравитации и связи между ними и пришли к выводу, что некоторые их варианты могут предложить разумное и качественное унифицированное описание инфляции в эпоху темной энергии. Возможность Большого Хлопка и возникновения через конечное время в будущем других сингулярностей учитывалась путем включения в приведенные выше теории гравитации гравитационных инвариантов с высшими производными.

В работе [22] исследовалось распределение анизотропной материи в компактной сфере для $f(\mathcal{G})$-гравитации, а полученные физические характеристики сравнивались с данными наблюдений. В работе [23] анализировались точные решения для анизотропного статического сферически-симметричного пространства-времени для той же теории гравитации. В работе [24] исследовались особенности компактных звездных объектов и их устойчивость для $f(R,T)$-гравитации. В работе [25] были получены точные решения для анизотропного сферического случая для минимальной геометрической деформации, а также проанализированы критерии эффективности и устойчивости для $f(\mathcal{G})$-гравитации. В работе [26] предложены модели анизотропных компактных звезд с вложением класса 1 для $f(R)$-гравитации.

В настоящей работе рассматривается анизотропное внутреннее решение с вложением класса 1 для статического сферически-симметричного самогравитирующего объекта с использованием условия Кармаркара. Работа построена следующим образом. В разд. 2 обсуждаются полевые уравнения в рамках теории $f(\mathcal{G})$-гравитации для распределения анизотропной жидкости и вычисляется соответствующее решение. В разд. 3 исследуется вопрос о том, насколько полученная модель является эффективной и физически реалистичной. Последний раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

2. АНИЗОТРОПНАЯ ЖИДКОСТЬ И $f(\mathcal{G})$-ГРАВИТАЦИЯ

В этом разделе мы получим анизотропное внутреннее решение для компактного звездного объекта для случая $f(G)$-гравитации, используя определяемые вложением условия. В этом случае действие определяется как [17]

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R+f(G)}{2\kappa^2}+\mathcal{L}_m\right), \qquad (1)$$

где $\kappa^2 = 8\pi$ (мы используем гравитационные единицы) — постоянная взаимодействия, а $\mathcal{L}_m$ — плотность лагранжиана материи. Соответствующие полевые уравнения имеют вид

$$G_{\alpha\delta} = \kappa^2 T^{(eff)}_{\alpha\delta} = \kappa^2\left(T^{(m)}_{\alpha\delta}+T^{(\mathcal{G})}_{\alpha\delta}\right). \qquad (2)$$

Анизотропной материи соответствует член

$$T^{(m)}_{\alpha\delta} = (\rho+P_t)\mathcal{U}_\alpha\mathcal{U}_\delta + P_t g_{\alpha\delta} + (P_r-P_t)\xi_\alpha\xi_\delta, \qquad (3)$$

где ρ — плотность, P_r и P_t — радиальное и тангенциальное давление, соответственно, $\mathcal{U}_\alpha$ — 4-скорость, а ξ_α — пространственно-подобный 4-вектор. Темному источнику (поправочный член, обусловленный $f(G)$-гравитацией) соответствует член

$$\begin{aligned} T^{(\mathcal{G})}_{\alpha\delta} = \frac{1}{2\kappa}g_{\alpha\delta}f(\mathcal{G}) + \frac{1}{\kappa}\Big[&(4R_{\delta\sigma}R^\sigma_\alpha - 2RR_{\alpha\delta} - \\ &- 2R_{\alpha\sigma\eta\nu}R^{\sigma\eta\nu}_\delta - 4R_{\alpha\sigma\eta\delta}R^{\sigma\eta})f_\mathcal{G}(\mathcal{G}) + \\ &+ (4R_{\alpha\delta} - 2Rg_{\alpha\delta})\nabla^2 f_\mathcal{G}(\mathcal{G}) + 2R\nabla_\alpha\nabla_\delta f_\mathcal{G}(\mathcal{G}) - \\ &- 4R^\sigma_\alpha\nabla_\delta\nabla_\sigma f_\mathcal{G}(\mathcal{G}) - 4R^\sigma_\delta\nabla_\alpha\nabla_\sigma f_\mathcal{G}(\mathcal{G}) + \\ &+ 4g_{\alpha\delta}R^{\sigma\eta}\nabla_\sigma\nabla_\eta f_\mathcal{G}(\mathcal{G}) - 4R_{\alpha\sigma\delta\eta}\nabla^\sigma\nabla^\eta f_\mathcal{G}(\mathcal{G})\Big], \end{aligned} \qquad (4)$$

где $f_\mathcal{G}(\mathcal{G})$ — обыкновенная производная функции общего положения по $\mathcal{G}$, а ∇_α — ковариантная производная, входящая в оператор Даламбера ($\nabla^2 = \nabla_\alpha\nabla^\alpha$).

Чтобы описать внутреннюю геометрию статической сферически-симметричной суперплотной звезды, удобно взять линейный элемент в каноническом виде:

$$ds^2 = -e^{\eta(r)}dt^2 + e^{\beta(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \qquad (5)$$

Соответствующие полевые уравнения имеют вид

$$8\pi\left(\rho - T^{0(\mathcal{G})}_0\right) = \frac{1}{r^2} + \left(\frac{\beta'}{r} - \frac{1}{r^2}\right)e^{-\beta(r)}, \qquad (6)$$

$$8\pi\left(P_r + T^{1(\mathcal{G})}_1\right) = -\frac{1}{r^2} + \left(\frac{\eta'}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-\beta(r)}, \qquad (7)$$

$$8\pi\left(P_t+T_2^{2(\mathcal{G})}\right)= \\ =\left(\frac{\eta'}{2r}+\frac{\eta''}{2}+\frac{\eta'^2}{4}-\frac{\eta'\beta'}{4}-\frac{\beta'}{2r}\right)e^{-\beta(r)}, \quad (8)$$

выражения для $T_0^{0(\mathcal{G})}$, $T_1^{1(\mathcal{G})}$ и $T_2^{2(\mathcal{G})}$ приведены в Приложении. ГБ-инвариант для (5) можно выразить как

$$\mathcal{G}=\frac{2e^{-2\beta}}{r^2}\left[(\eta'^2+2\eta'')(1-e^{\beta})-\eta'\beta'(3-e^{\beta})\right]. \quad (9)$$

Условие Кармакара в терминах кривизны Римана имеет вид

$$R_{0303}R_{1212}=R_{0101}R_{2323}+R_{0113}R_{0223}, \quad (10)$$

откуда следует, что $R_{1212}\neq 0$ [27]. Действительно, этим определяется пространство-время с вложением класса 1. Из уравнений (5) и (10) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{\eta'\beta'}{1-e^{\beta}}=-2(\eta''+\eta'^2)+\eta'^2+\eta'\beta', \quad e^{\beta}\neq 1. \quad (11)$$

Интегрирование дает

$$e^{\beta}=1+\mathcal{F}\eta'^2e^{\eta}, \quad (12)$$

где $\mathcal{F}\neq 0$ — постоянная интегрирования.

Как можно видеть, система уравнений (6)–(8) со связью (11) содержит пять неизвестных (η, β, ρ, P_r и P_t). Чтобы система была самосогласованной, используем анзац Адлера для временного метрического коэффициента [28]:

$$e^{\eta}=\mathcal{A}(1+\mathcal{C}r^2)^2, \quad (13)$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ — произвольные постоянные. Подставляя это в выражение (11), получаем

$$e^{\beta}=1+16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2, \quad (14)$$

что аналогично решению Финча – Ски [29]. Используя радиальный и временной метрические потенциалы из уравнений (13) и (14), систему (6)–(8) можно привести к виду

$$\rho=\frac{16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2Fr^2+3)}{8\pi(1+16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2)^2}+T_0^{0(\mathcal{G})}, \quad (15)$$

$$P_r=\frac{-4C(4\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2+4\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}-1)}{8\pi(\mathcal{C}r^2+1)(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2+1)}-T_1^{1(\mathcal{G})}, \quad (16)$$

$$P_t=\frac{4C(4\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2-4\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}+1)}{8\pi(\mathcal{C}r^2+1)(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2+1)^2}-T_2^{2(\mathcal{G})}, \quad (17)$$

при этом параметр Δ, определяющий анизотропию давления, принимает вид

$$\Delta=\frac{1}{8\pi(1+\mathcal{C}r^2)(1+16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2)^2}\times \\ \times\left[32\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2\left(8\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}(1+\mathcal{C}r^2)-1\right)+\right. \\ +\kappa(1+\mathcal{C}r^2)\left(32\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2(1+8\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2)+1\right)\times \\ \left.\times\left(T_1^{1(\mathcal{G})}-T_2^{2(\mathcal{G})}\right)\right]. \quad (18)$$

Физические характеристики звезды можно получить, гладко сшивая решения для внутренней и внешней геометрии пространства-времени. Будем считать, что шварцшильдовская метрика для внешней геометрии имеет вид

$$ds^2=-\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2+ \\ +r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right). \quad (19)$$

Непрерывность метрических коэффициентов,

$$g_{00}^{+}=g_{00}^{-}, \quad g_{11}^{+}=g_{11}^{-}, \quad g_{00},_1^{+}=g_{00},_1^{-},$$

над гиперповерхностью ($r=R$) дает

$$1-\frac{2m}{R}=\mathcal{A}(1+\mathcal{C}R^2)^2, \quad (20)$$

$$\left(1-\frac{2m}{R}\right)^{-1}=1+16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}R^2, \quad (21)$$

$$\frac{2m}{R^2}=4\mathcal{A}\mathcal{C}R(1+\mathcal{C}R^2). \quad (22)$$

Используя уравнения (20)–(22), можно выразить постоянные $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}$ через $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{A}=\frac{m}{2\mathcal{C}R^3(1+\mathcal{C}R^2)}, \quad (23)$$

$$\mathcal{F}=\frac{R(1+\mathcal{C}R^2)}{4\mathcal{C}(R-2m)}, \quad (24)$$

где $\mathcal{C}$, m и R — произвольные постоянные.

3. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМПАКТНЫХ ЗВЕЗД

В данном разделе мы рассмотрим некоторые интересные результаты, полученные для решений с вложением класса 1, которые доказывают их физическую реалистичность. Для этого рассмотрим такие важные физические параметры, как эволюция физических переменных (плотность энергии и давление), условие максимальности, энергетические границы, параметр компактности, а также устойчивость предложенной модели. Чтобы графически исследовать поведение всех этих параметров, предположим, что функция $f(\mathcal{G})$ в общем случае имеет вид

$$f(\mathcal{G})=\alpha\mathcal{G}^n,$$

Таблица. Физические приближенные значения массы, радиуса и параметра компактности модельных компактных звезд Her X-1, SAX J 1808.4-3658 и 4U 1820-30

Модельная звезда	Масса, $M_\odot$	Радиус, км	μ
Her X-1	0.88	7.7	0.168
SAX J1808.4-3658	1.435	7.07	0.299
4U1820-30	2.25	10.0	0.332

где α — произвольная постоянная, а $n > 0$ при $n \neq 1$ [23]. В настоящей работе мы рассматриваем распределение анизотропной жидкости в астрофизических объектах для определенного значения параметра модели $n = 2$. Анизотропные сферические решения анализируются для трех странных звездных объектов. Их радиусы и массы приведены в таблице. Для графического анализа зафиксируем свободный параметр $\mathcal{C} = 0.02$ для определенной области изменения параметра α:

$$-1 < \alpha < 0.$$

3.1. Критерий максимальности

Поскольку астрофизические объекты представляют собой сферические структуры с высокой плотностью, физические переменные для них должны принимать максимальные значения, при этом внутри сферического объекта они положительны, а по направлению к его поверхности — монотонно убывают. На рис. 1 показаны зависимости физических параметров ρ, P_r, P_t и Δ от радиуса r и параметра α для модельных звезд Her X-1, SAX J 1808.4-3658 и 4U 1820-30. Эффективная плотность энергии максимальна внутри компактного звездного объекта и монотонно убывает в направлении к его поверхности. На рисунке видно, что ρ не изменяется при любых значениях α. Аналогично, радиальное и тангенциальное давление принимают максимальные значения в центре и монотонно убывают, когда r стремится к границе звездного объекта. Радиальное давление обращается в нуль на поверхности звезды, в то время как плотность и тангенциальное давление там положительны. С другой стороны, оба давления убывают при возрастании α. Параметр анизотропии давления $\Delta = P_t - P_r$, в основном, определяет поведение анизотропного распределения материи. Направление анизотропии зависит от того, какое давление больше. Если $P_t < P_r$, то анизотропия отрицательна, т. е. направлена внутрь, а если наоборот — то наружу. В нашем случае, как видно на рисунке, для трех рассматриваемых странных звезд анизотропия направлена наружу.

Условия максимальности в центре компактного объекта ($r = 0$) можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dr} = 0, \quad \frac{dP_r}{dr} = 0, \quad \frac{dP_t}{dr} = 0,$$
$$\frac{d^2\rho}{dr^2} < 0, \quad \frac{d^2P_r}{dr^2} < 0, \quad \frac{d^2P_t}{dr^2} < 0.$$

Тогда градиенты эффективной плотности и давления будут иметь вид

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{-64\mathcal{A}^2\mathcal{C}^4\mathcal{F}^2 r(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2 + 5)}{\pi(1 + 16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2)^3} + \frac{dT_0^{0(\mathcal{G})}}{dr}, \quad (25)$$

$$\frac{dP_r}{dr} = \frac{\mathcal{C}r^2}{\pi(1+\mathcal{C}r^2)^2(1+16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2)^2} \times \left[16\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}(4\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}(1+\mathcal{C}r^2)^2 - (1+\mathcal{C}r^2)) - 1\right] - \frac{dT_1^{1(\mathcal{G})}}{dr}, \quad (26)$$

$$\frac{dP_t}{dr} = \frac{\mathcal{C}^2 r}{\pi(1+\mathcal{C}r^2)^2(1+16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2)^3} \times \left[128\mathcal{A}^2\mathcal{C}^2\mathcal{F}^2(\mathcal{C}^2r^4 - \mathcal{C}r^2 - 1) + 48\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2 + 24\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F} + 1\right] - \frac{dT_2^{2(\mathcal{G})}}{dr}. \quad (27)$$

Более того, вторые производные ρ, P_r и P_t примут следующий вид:

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} = \frac{64\mathcal{F}^2\mathcal{C}^4\mathcal{A}^2(768\mathcal{A}^2\mathcal{C}^4\mathcal{F}^2r^4 + 352\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2 - 5)}{\pi(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2 + 1)^4} + \frac{d^2T_0^{0(\mathcal{G})}}{dr^2}, \quad (28)$$

$$\frac{d^2P_r}{dr^2} = -\frac{\mathcal{C}^2}{\pi(\mathcal{C}r^2+1)^3(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2+1)^3} \times \left[3072\mathcal{A}^3\mathcal{C}^4\mathcal{F}^3r^2(\mathcal{C}^3r^6+1) + 9216\mathcal{A}^3\mathcal{C}^5\mathcal{F}^3r^4(\mathcal{C}r^2+1) - 64\mathcal{A}^2\mathcal{C}^4\mathcal{F}^2r^4(\mathcal{C}r^2+1) - 64\mathcal{A}^2\mathcal{C}^2\mathcal{F}^2(15\mathcal{C}r^2+1) - 16\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}(9\mathcal{C}^2r^4 - 1) - 3\mathcal{C}r^2 + 1\right] - \frac{d^2T_1^{1(\mathcal{G})}}{dr^2}, \quad (29)$$

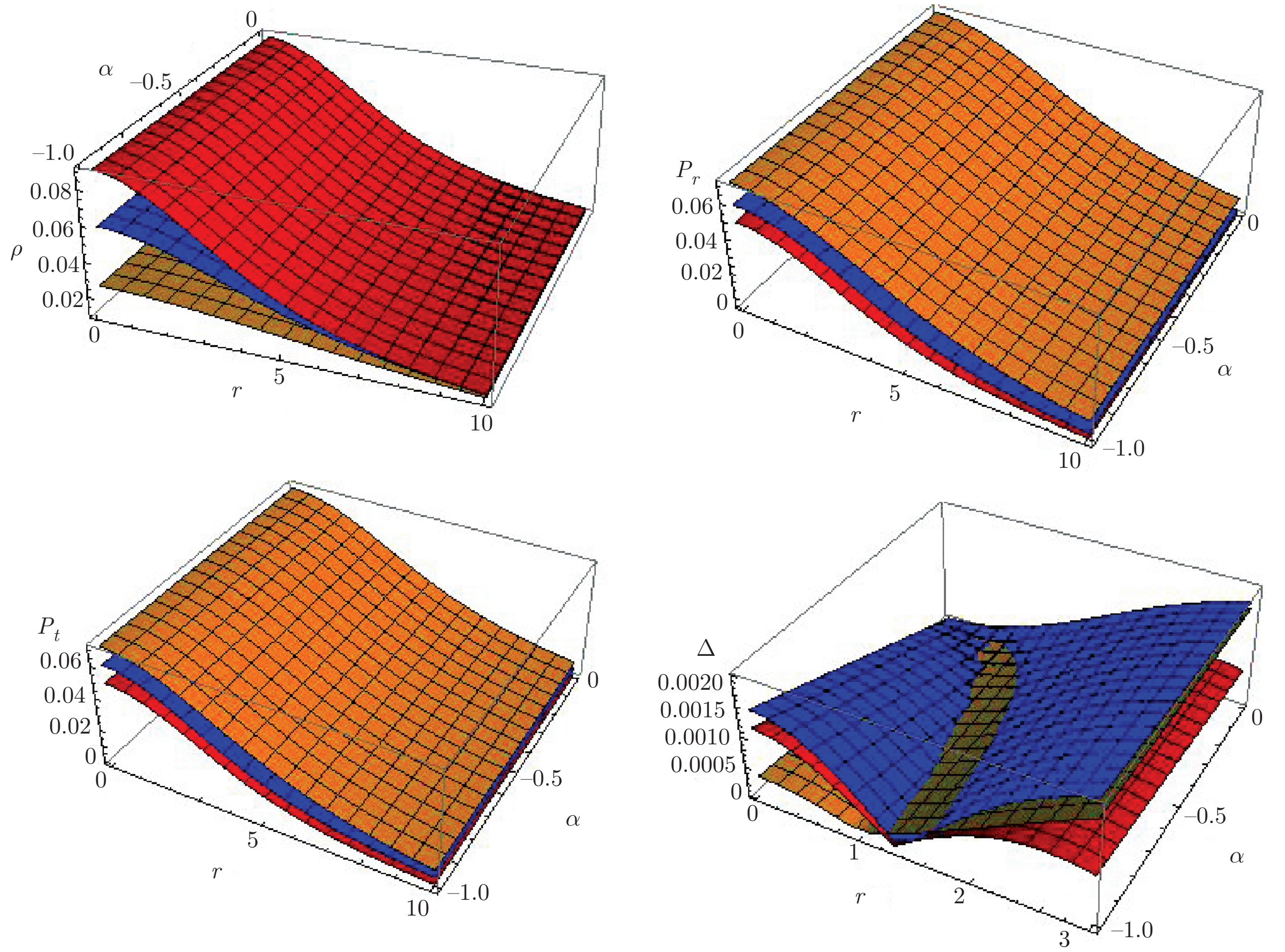


Рис. 1. (В цвете онлайн) Зависимости ρ, P_r, P_t и Δ от радиуса r и параметра α для модельных звезд Her X-1 (оранжевый), SAX J 1808.4-3658 (красный) и 4U 1820-30 (синий)

$$\frac{d^2P_t}{dr^2} = -\frac{\mathcal{C}^2}{\pi(\mathcal{C}r^2+1)^3(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2+1)^4} \times \\ \times \Big[10240\mathcal{A}^3\mathcal{C}^4\mathcal{F}^3r^2(\mathcal{C}^3r^6-1) - \\ - 12288\mathcal{A}^3\mathcal{C}^5\mathcal{F}^3r^4(\mathcal{C}r^2+2) + 128\mathcal{A}^2\mathcal{C}^4\mathcal{F}^2r^4 \times \\ \times (41\mathcal{C}r^2+39) + 128\mathcal{A}^2\mathcal{C}^2\mathcal{F}^2(15\mathcal{C}r^2+1) + \\ + 24\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}(8\mathcal{C}r^2(\mathcal{C}r^2+1)-1) + 3\mathcal{C}r^2 - 1\Big].$$

Зависимости градиентов эффективной плотности, а также радиального и тангенциального давления для трех компактных звезд приведены на рис. 2. На рисунках видно, что для всех трех звезд градиенты плотности и давления монотонно убывают и равны нулю в центре компактного сферического объекта. Более того, оказалось, что для всех трех звезд вторые производные этих величин указывают на наличие максимума в центре, т. е. при $r = 0$, поскольку

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} < 0, \quad \frac{d^2P_r}{dr^2} < 0, \quad \frac{d^2P_t}{dr^2} < 0$$

(см. рис. 3).

3.2. Энергетические условия

Рассмотренные выше связи имеют важное значение для анализа эффективности моделей компактных звездных объектов, а также характера их особенностей. Для реалистичной звезды необходимо выполнение энергетических условий, а именно, нулевого (NEC), доминантного (DEC), слабого (WEC) и сильного (SEC) энергетических условий. Для анизотропной материи эти условия имеют следующий вид:

- NEC: $\rho + P_r \geq 0, \quad \rho + P_t \geq 0,$
- DEC: $\rho - P_r \geq 0, \quad \rho - P_t \geq 0,$
- WEC: $\rho \geq 0, \quad \rho + P_r \geq 0, \quad \rho + P_t \geq 0,$

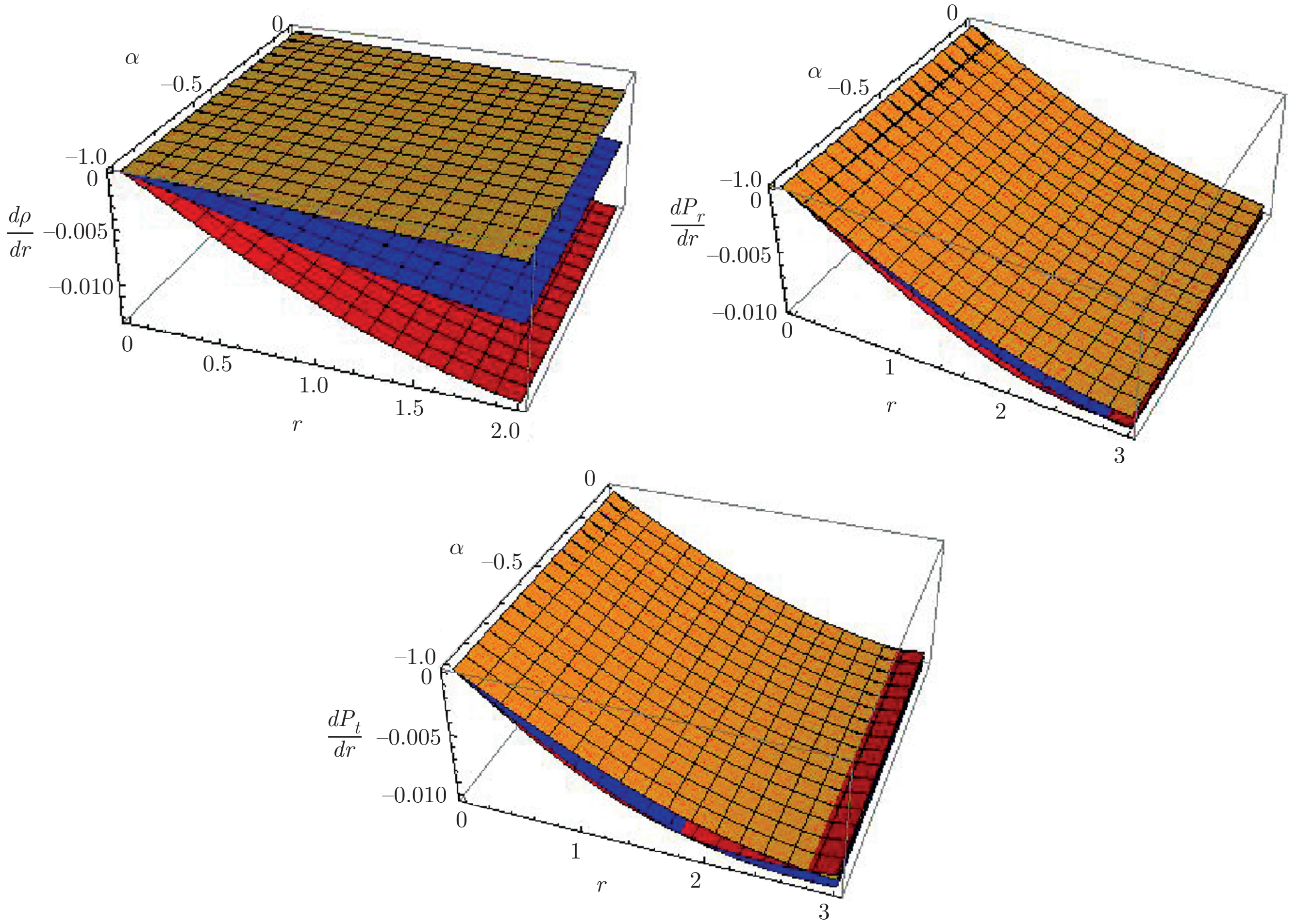


Рис. 2. (В цвете онлайн) Зависимости $d\rho/dr$, dP_r/dr и dP_t/dr от радиуса r и параметра α для модельных звезд Her X-1 (оранжевый), SAX J 1808.4-3658 (красный) и 4U 1820-30 (синий)

- SEC: $\rho+P_r \geq 0, \quad \rho+P_t \geq 0, \quad \rho+P_r+2P_t \geq 0.$

Если эти условия не выполняются, то материя является экзотической, а в противном случае — обыкновенной. На рис. 4 приведены зависимости энергетических условий для трех компактных модельных звезд Her X-1, SAX J 1808.4-3658 и 4U 1820-30. На рисунке видно, что все энергетические условия выполняются, что четко подтверждает наличие обыкновенной материи внутри звезд.

3.3. Параметр компактности

Компактность внутренней области звезды в терминах радиуса определяется как

$$\mu(r) = \frac{m(r)}{r} = \frac{1}{r}\int 4\pi\rho\hat{r}^2 d\hat{r}, \qquad (30)$$

где

$$m(r) = \int 4\pi\rho\hat{r}^2 d\hat{r}$$

— масса звезды. Заметим, что при исследовании нейтронных звезд в рамках теории $f(\mathcal{G})$-гравитации отношение масса–радиус является самосогласованным [29]. Подставляя уравнение (15) в выражение (30), получим

$$\mu(r) = \frac{m(r)}{r} = \frac{r}{2}\,\frac{16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2}{1+16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2} + \int 4\pi\hat{r}^2 T_0^{0(\mathcal{G})} d\hat{r}. \qquad (31)$$

Параметр красного смещения получается подстановкой этого значения в соотношение

$$Z_s = (1-2\mu(r))^{1/2} - 1. \qquad (32)$$

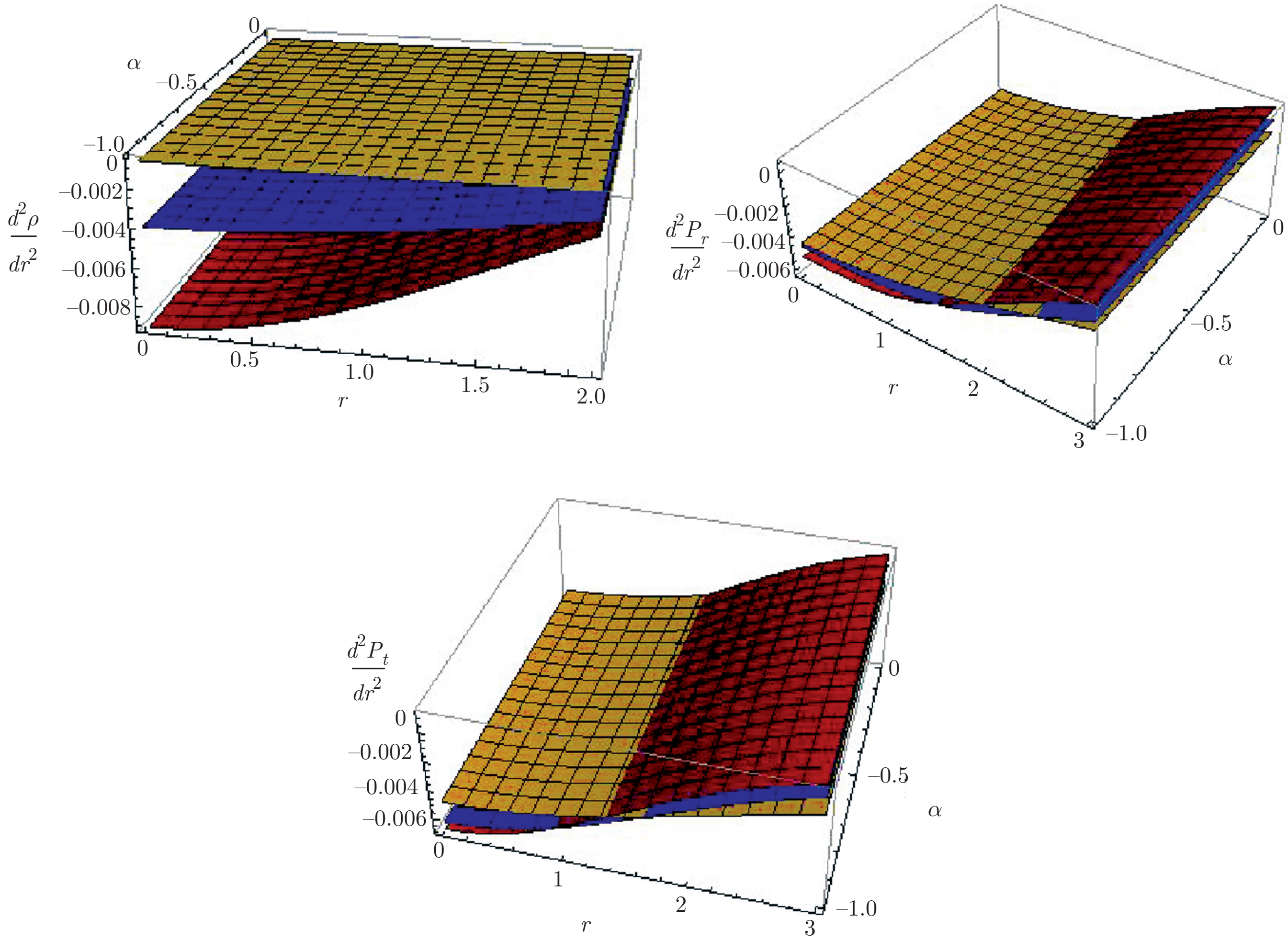


Рис. 3. (В цвете онлайн) Зависимости $d^2\rho/dr^2$, d^2P_r/dr^2 и d^2P_t/dr^2 от радиуса r и параметра α для модельных звезд Her X-1 (оранжевый), SAX J 1808.4-3658 (красный) и 4U 1820-30 (синий)

На рис. 5 видно, что как масса, так и компактность звезд являются возрастающими регулярными функциями радиуса r. Более того, наша астрофизическая система (анизотропное решение) удовлетворяет требуемому пределу компактности Бучдала

$$m/r \leq 4/9$$

для всех трех звездных объектов. Параметр красного смещения также удовлетворяет требуемому условию $Z_s \leqslant 5.211$ для случая анизотропной жидкости (см. рис. 5).

3.4. Устойчивость звездных объектов и равновесие сил

В данном разделе мы рассмотрим устойчивость нашей модели для трех модельных звезд, используя условие причинности, адиабатический показатель, а также равновесие сил.

3.4.1. Равновесие с точки зрения уравнения ТОВ

Равновесие компактной звезды достигается, если различные силы, действующие на звезду, удовлетворяют обобщенному уравнению Толмана – Оппенгеймера – Волкова (ТОВ). Для распределения анизотропной жидкости уравнение ТОВ принимает вид

$$\frac{dP_r}{dr} + \frac{\mathcal{M}_g(r)(\rho + P_r)}{r} e^{\frac{\eta-\beta}{2}} - \frac{2}{r}(P_t - P_r) = 0, \quad (33)$$

где

$$\mathcal{M}_g(r) = \frac{r\eta'}{2} e^{\frac{\beta-\eta}{2}}$$

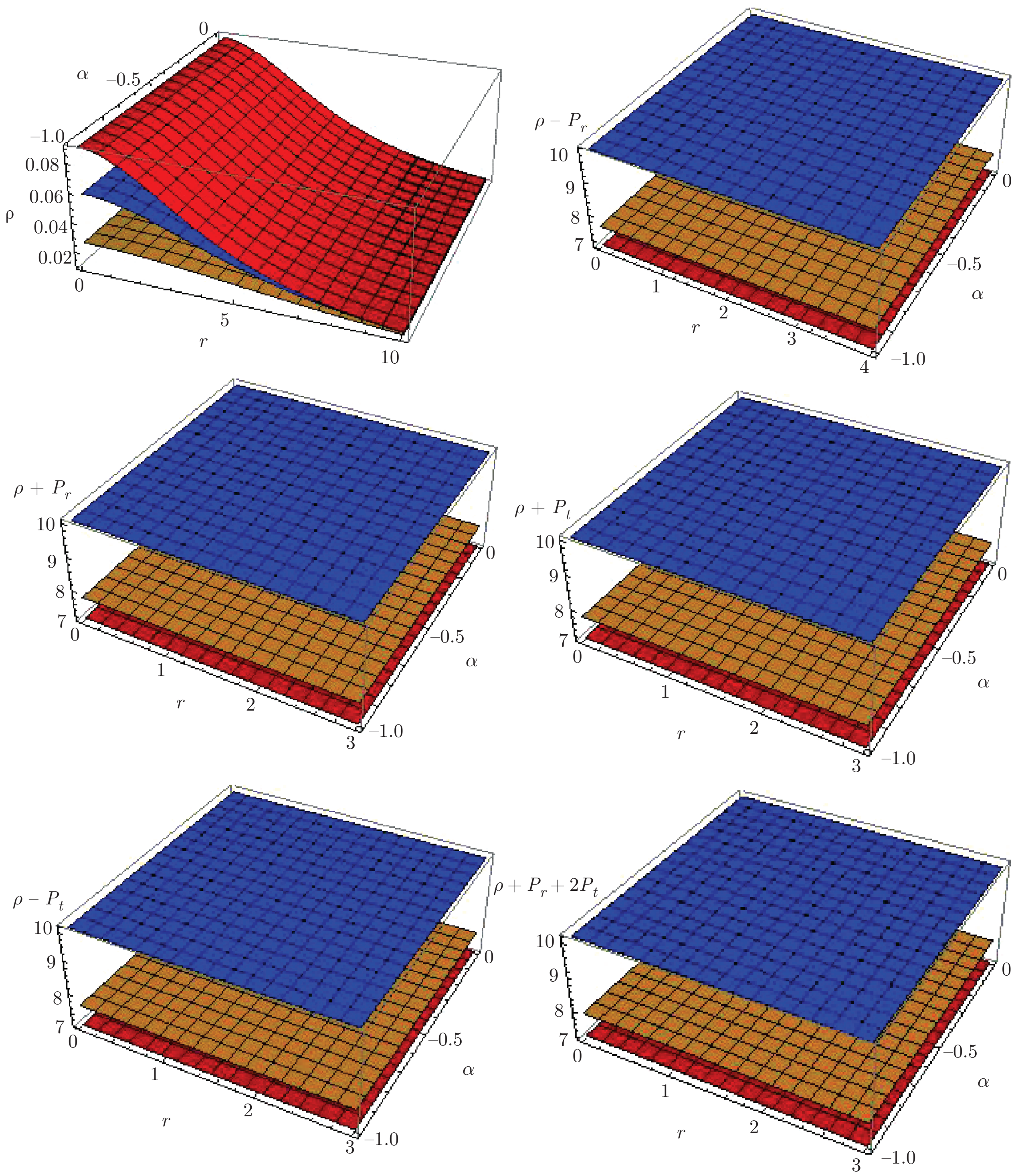
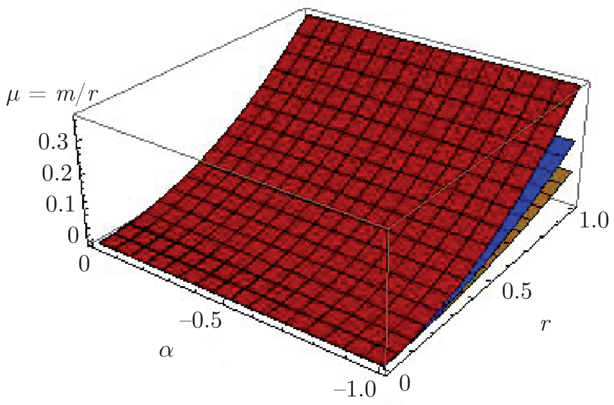


Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимости энергетических условий от радиуса r и параметра α для трех модельных звезд Her X-1 (оранжевый), SAX J 1808.4-3658 (красный) и 4U 1820-30 (синий)



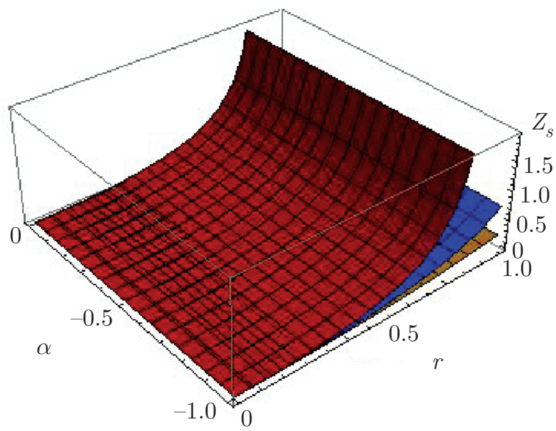


Рис. 5. (В цвете онлайн) Зависимости компактности μ и параметра красного смещения Z_s от радиуса r и параметра α для трех модельных звезд Her X-1 (оранжевый), SAX J 1808.4-3658 (красный) и 4U 1820-30 (синий)

— гравитационная масса внутренней области звезды. С учетом гравитационной массы, уравнение можно записать в виде

$$\frac{dP_r}{dr} + \frac{\eta'}{2}(\rho + P_r) - \frac{2}{r}(P_t - P_r) = 0. \qquad (34)$$

Каждый член этого выражения соответствует силе, а именно, гравитационной силе F_g, силе гидростатического равновесия F_{he} и силе анизотропии F_Δ, так что

$$F_g + F_{he} + F_\Delta = 0.$$

В модифицированной теории гравитации Гаусса–Бонне эти силы принимают вид

$$F_{he} = \frac{dP_r}{dr} = \frac{\mathcal{C}r^2}{\pi(1+\mathcal{C}r^2)^2(1+16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2)^2} \times \\ \times \left[16\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}(4\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}(1+\mathcal{C}r^2)^2 - (1+\mathcal{C}r^2)) - 1\right] - \frac{dT_1^{1(\mathcal{G})}}{dr},$$

$$F_g = \frac{\eta'}{2}(\rho + P_r) = \frac{\mathcal{C}^2 r(24\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2 + 8\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F} + 1)}{(\mathcal{C}r^2+1)^2(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2+1)^2} + \\ + T_0^{0(\mathcal{G})} - T_1^{1(\mathcal{G})},$$

$$F_\Delta = -\frac{2}{r}(P_t - P_r) = \\ = -\frac{64\mathcal{C}^3\mathcal{A}\mathcal{F}r(8\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2 + 8\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F} - 1)}{(\mathcal{C}r^2+1)(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2+1)^2} - T_1^{1(\mathcal{G})} + T_2^{2(\mathcal{G})}.$$

На рис. 6 приведены зависимости трех сил, поддерживающих компактные звезды в равновесии, для модельных звезд Her X-1 (*а*), SAX J 1808.4-3658 (*б*) и 4U 1820-30 (*в*). На рисунке видно, что гравитационная сила преобладает над двумя другими (гидростатической и анизотропной) и компенсирует их действие. Более того, эти силы стремятся к нулю (окончательное равновесие), когда радиус $r > 15$. Таким образом, для этих модельных звезд система находится в состоянии равновесия.

3.4.2. Условие причинности

В соответствии с условием причинности квадрат скорости звука (для радиальной и тангенциальной составляющих) должен быть меньше скорости света. В релятивистских величинах это условие выглядит как

$$0 < \nu_{sr}^2 < 1, \quad 0 < \nu_{st}^2 < 1.$$

Соответствующее математическое выражение имеет вид

$$\nu_{sr}^2 = \frac{dP_r}{d\rho}, \quad \nu_{st}^2 = \frac{dP_t}{dr}.$$

Согласно концепции расщепления и опрокидывания, предложенной в работах [31] и [32], для распределения анизотропной жидкости должно выполняться условие

$$0 < |\nu_{st}^2 - \nu_{sr}^2| < 1.$$

На рис. 7 видно, что анизотропная система удовлетворяет требуемому условию для трех рассматриваемых модельных звезд.

3.4.3. Условие, связанное с адиабатическим показателем

Адиабатический показатель Γ играет важную роль при изучении звездных объектов (как реля-

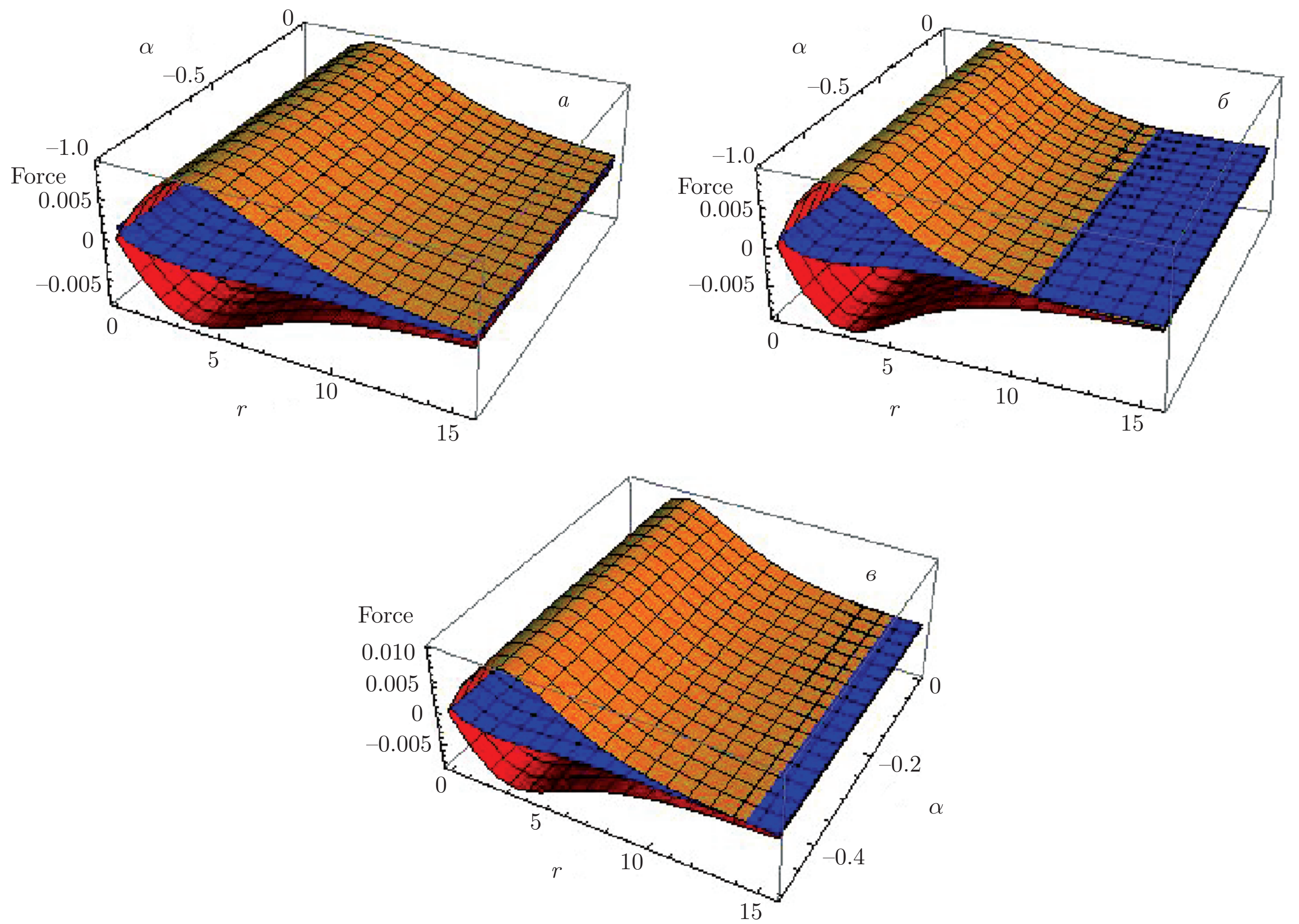


Рис. 6. (В цвете онлайн) Зависимости сил равновесия от радиуса r и параметра α для модельных звезд Her X-1 (a), SAX J 1808.4-3658 ($б$) и 4U 1820-30 ($в$); красный — гравитационная сила F_g, синий — анизотропная сила F_Δ, оранжевый — сила гидростатического равновесия F_{he}

тивистских, так и нерелятивистских). Для распределения анизотропной жидкости радиальная и тангенциальная составляющие Γ вычисляются как отношение двух удельных теплоемкостей [32]:

$$\Gamma_r = \frac{\rho + P_r}{P_r}\left(\frac{dP_r}{d\rho}\right), \quad \Gamma_t = \frac{\rho + P_t}{P_t}\left(\frac{dP_t}{d\rho}\right).$$

Для устойчивой конфигурации величина этого показателя должна быть больше 4/3. Зависимости адиабатических показателей приведены на рис. 8. На рисунке видно, что анизотропное распределение для трех рассматриваемых модельных звезд является динамически устойчивым (для всей области значений α).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается вложение класса 1 для компактных звездных объектов в рамках теории гравитации $f(\mathcal{G}) = \alpha\mathcal{G}^n$ (мы полагаем $n = 2$) с анизотропной жидкостью для трех модельных звезд. Используя условие Кармаркара, мы получаем важную связь между двумя потенциалами для рассматриваемой геометрической конфигурации. Искривленное четырехмерное пространство-время вкладывается в псевдо-евклидово пространство-время высшей размерности. Использование временного метрического коэффициента Адлера приводит к решению Адлера – Финча – Ски. Наложение связей на произвольный параметр модели проводилось путем гладкого сшивания сферической внутренней и шварцшильдовской внешней геометрии пространства-времени.

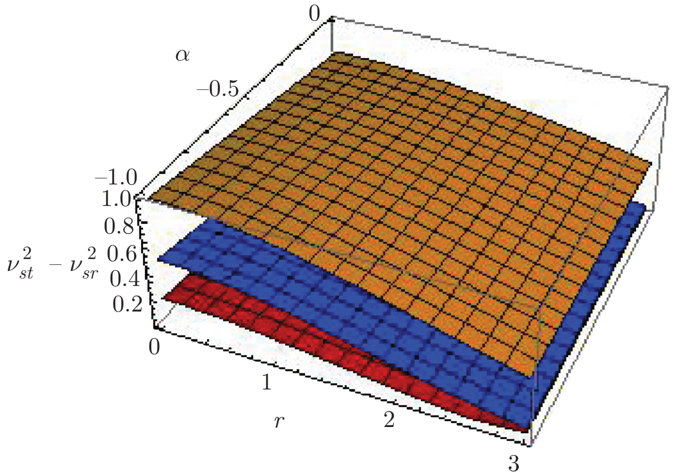


Рис. 7. Зависимости $|\nu_{st}^2 - \nu_{sr}^2|$ от радиуса r и параметра α для модельных звезд Her X-1 (оранжевый), SAX J 1808.4-3658 (красный) и 4U 1820-30 (синий)

Физическая реалистичность рассматриваемой модели исследовалась с помощью физических параметров (плотность энергии и давление), которые достигают максимальных значений в центре компактной звезды и монотонно убывают в направлении к ее поверхности. Таким образом, наша модель допускает крайне высокие плотности в центре очень компактных объектов, например для звезды Her X-1, плотность в центре которой оценивается приблизительно как $33.4 \cdot 10^{15}$ г $\cdot$ см$^{-3}$. Полученное решение оказалось физически реалистичным, если полученная модель удовлетворяет энергетическим условиям. Кроме того, выяснилось, что параметр компактности и параметр красного смещения также удовлетворяют требуемым условиям, что подтверждает устойчивость предложенной модели для всех трех рассматриваемых звездных объектов.

Было исследовано поведение трех основных сил — гравитационной силы F_g, силы гидростатического равновесия F_{he} и силы анизотропии F_Δ, входящих в уравнение ТОВ. Оказалось, что анизотропная система находится в состоянии равновесия, когда гравитационная сила уравновешивается двумя другими силами. Мы рассмотрели устойчивость модели, используя условие причинности. Устойчивость достигается при выполнении неравенства

$$0 < |\nu_{st}^2 - \nu_{sr}^2| < 1.$$

Кроме того, мы рассмотрели динамическую устойчивость, используя адиабатический показатель.

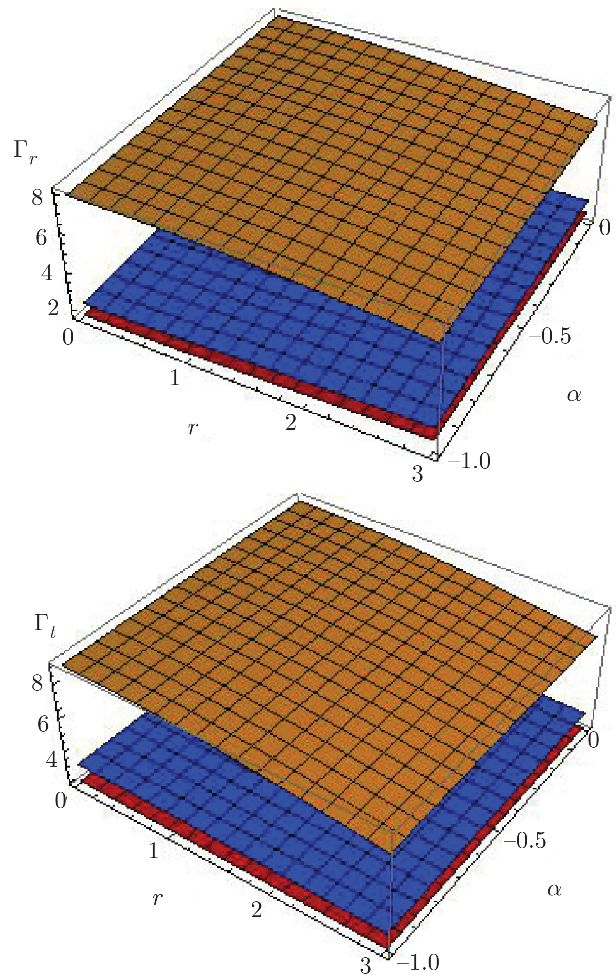


Рис. 8. Зависимости Γ_r и Γ_t от радиуса r и параметра α для модельных звезд Her X-1 (оранжевый), SAX J 1808.4-3658 (красный) и 4U 1820-30 (синий)

Компактная звездная структура является полностью устойчивой, если отношение радиального показателя к тангенциальному больше необходимого предельного значения 4/3. Таким образом, рассматриваемое компактное анизотропное решение с вложением класса 1 является физически реалистичным, самосогласованным, а также устойчивым.

Соответствующее анизотропное решение Адлера – Финча – Ски с зарядами для связанных полевых уравнений Эйнштейна – Максвелла исследовалось в работе [16] с использованием условия Кармаркара. Оказалось, что полученное решение удовлетворяет всем критериям и является физически реалистичным для компактных звездных объектов, поскольку определяет физически реалистичную, устойчивую компактную сферу.

Интересно отметить, что рассматриваемая в настоящей работе модель анизотропной компактной звезды согласуется с моделью, полученной в рамках общей теории относительности [16]. Кроме того, было обнаружено, что полученное решение имеет несингулярные свойства, например, для звезды Her X-1, плотность в центре которой и радиальное давление оцениваются приблизительно как $33.4\cdot10^{15}$ г$\cdot$см$^{-3}$ и $36.4\cdot10^{36}$ дин/см^2, соответственно. Эти значения много больше величин, полученных в работе [16] в результате аппроксимации. В нашем случае значения релятивистского адиабатического показателя в центре странной звезды Her X-1 равны $\Gamma_r = 8.02$ и $\Gamma_t = 9.3$, причем в направлении от центра к поверхности они монотонно убывают. Такие большие значения в центре звезды, отличающиеся от результатов работы [16], связаны с точным учетом членов, соответствующих вкладам темных источников посредством $f(\mathcal{G})$-гравитации. Более того, в случае динамической устойчивости силы имеют более узкий интервал сходимости, чем в общей теории относительности. Поэтому следует отметить, что равновесие в рамках предложенной модели достигается намного быстрее, что обусловлено некими поправочными членами, которые учитываются посредством $f(\mathcal{G})$-гравитации. Кроме того, оказалось, что полученное анизотропное решение Адлера – Финча – Ски соответствует более плотной звездной структуре, чем в общей теории относительности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поправки ГБ для метрических потенциалов Адлера – Финча – Ски и полученная функция общего положения имеют вид

$$\kappa T_0^{0(\mathcal{G})} = \frac{49152\alpha\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{C}^6}{(\mathcal{C}r^2+1)^4(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2+1)^7}\times \Big[4096\mathcal{A}^3\mathcal{F}^3\mathcal{C}^3r^2(10\mathcal{C}^3r^6+25\mathcal{C}^2r^4+21\mathcal{C}r^2+6) - 32\mathcal{A}^2\mathcal{C}\mathcal{F}^2(51\mathcal{C}^3r^6+56\mathcal{C}^2r^4+39\mathcal{C}r^2+18) - 2\mathcal{A}\mathcal{F}(113\mathcal{C}^2r^4+82\mathcal{C}r^2+18) - 3r^2\Big],$$

$$\kappa T_1^{1(\mathcal{G})} = \frac{24576\alpha\mathcal{C}^5\mathcal{F}}{(\mathcal{C}r^2+1)^6(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2+1)^8}\times \Big[65536\mathcal{A}^5\mathcal{F}^4\mathcal{C}^7r^6(4\mathcal{C}^4r^8+15\mathcal{C}^3r^6+21\mathcal{C}^2r^4+13\mathcal{C}r^2+3)+1024\mathcal{A}^4\mathcal{F}^3\mathcal{C}^3r^2\times(155\mathcal{C}^5r^{10}+696\mathcal{C}^4r^8+1254\mathcal{C}^3r^6+1136\mathcal{C}^2r^4+519\mathcal{C}r^2+96)-16384\mathcal{A}^3\mathcal{F}^3\mathcal{C}^5r^4(10\mathcal{C}^2r^4+15\mathcal{C}r^2+6)-128\mathcal{A}^3\mathcal{F}^2\mathcal{C}^2(65\mathcal{C}^5r^{10}+256\mathcal{C}^4r^8+388\mathcal{C}^3r^6+274\mathcal{C}^2r^4+83\mathcal{C}r^2+6)-256\mathcal{A}^2\mathcal{F}^2\mathcal{C}^3r^2\times(56\mathcal{C}^2r^4+65\mathcal{C}r^2+21)+4\mathcal{A}^2\mathcal{F}\mathcal{C}\times(65\mathcal{C}^4r^8+204\mathcal{C}^3r^6+238\mathcal{C}^2r^4+128\mathcal{C}r^2+25)-16\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{C}(19\mathcal{C}^2r^4+4\mathcal{C}r^2-3)-3\mathcal{C}r^2-\mathcal{A}+1\Big],$$

$$\kappa T_2^{2(\mathcal{G})} = \frac{24576\alpha\mathcal{A}\mathcal{C}^5\mathcal{F}}{(\mathcal{C}r^2+1)^4(16\mathcal{A}\mathcal{C}^2\mathcal{F}r^2+1)^7}\times \Big[32765\mathcal{A}^4\mathcal{F}^4\mathcal{C}^6r^4(\mathcal{C}^3r^6+1)+98304\mathcal{A}^4\mathcal{F}^4\mathcal{C}^7r^6\times(\mathcal{C}r^2+1)+2048\mathcal{A}^3\mathcal{F}^3\mathcal{C}^4r^2(5\mathcal{C}^3r^6+16\mathcal{C}^2r^4+17\mathcal{C}r^2+6)-64\mathcal{A}^2\mathcal{F}^2\mathcal{C}^2(161\mathcal{C}^3r^6+230\mathcal{C}^2r^4+65\mathcal{C}r^2-20)-4\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}(39\mathcal{C}^2r^4+2\mathcal{C}r^2-5)+3\mathcal{C}r^2+7\Big].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. Bowers and E. P. T. Liang, Astrophys. J. **188**, 657 (1974).
2. K. Dev and M. Gleiser, Gen. Relativ. Gravit. **34**, 1793 (2002); ibid. **35**, 1435 (2003).
3. M. K. Mak and T. Harko, Chin. J. Astron. Astrophys. **2**, 248 (2002).
4. M. K. Mak and T. Harko, Proc. R. Soc. Lond. **459**, 393 (2003).
5. M. K. Mak and T. Harko, Int. J. Mod. Phys. D **13**, 149 (2004).
6. S. K. M. Hossein et al., Int. J. Mod. Phys. D **21**, 1250088 (2012).
7. H. Stephani et al., *Exact Solution to Einstein's Field*, Cambridge University Press (2003).
8. P. Bhar et al., Eur. Phys. J. A **52**, 312 (2016).
9. S. K. Maurya et al., Eur. Phys. J. C **76**, 266 (2016).
10. S. K. Maurya et al., Eur. Phys. J. A **52**, 191 (2016).
11. S. K. Maurya, Eur. Phys. J. C **76**, 693 (2016).

12. K. N. Singh, P. Bhar, and N. Pant, Astrophys. Space Sci. **361**, 339 (2016).

13. K. N. Singh and N. Pant, Eur. Phys. J. C **76**, 524 (2016).

14. K. N. Singh, M. H. Murad, and N. Pant, Eur. Phys. J. A **53**, 21 (2017).

15. S. K. Maurya et al., Eur. Phys. J. C **77**, 45 (2017).

16. P. Bhar et al., Int. J. Mod. Phys. D **26**, 1750078 (2017).

17. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **631**, 1 (2005).

18. G. Calcagni, S. Tsujikawa, and M. Sami, Class. Quantum Grav. **22**, 3977 (2005); A. De Felice, M. Hindmarsh, and M. Trodden, J. Cosmol. Astopart. Phys. **08**, 005 (2006).

19. K. Bamba et al., Eur. Phys. J. C **67**, 295 (2010).

20. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **04**, 115 (2007).

21. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rep. **505**, 59 (2011).

22. G. Abbas et al., Astrophys. Space Sci. **357**, 158 (2015).

23. M. Sharif and I. Fatima, Int. J. Mod. Phys. D **25**, 1650083 (2016).

24. M. Zubair, G. Abbas, and I. Noureen, Astrophys. Space Sci. **361**, 8 (2016).

25. M. Sharif and S. Saba, Eur. Phys. J. C **78**, 921 (2018).

26. D. Deb et al., arXiv:1811.11797.

27. K. R. Karmarkar, in: Proc. Indian Acad. Sci. A **27**, 56 (1948); S. N. Pandey and S. P. Sharma, Gen. Relativ. Gravit. **14**, 113 (1982).

28. R. J. Adler, J. Math. Phys. **15**, 727 (1974).

29. M. R. Finch and J. E. F. Skea, Class. Quantum Grav. **6**, 467 (1989).

30. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, J. Cosmo. Astro Phys. **2015**, 1475 (2015).

31. H. Abreu et al., Class. Quantum Grav. **24**, 4631 (2007).

32. L. Herrera, Phys. Lett. A **165**, 206 (1992).

33. R. Chan et al., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **265**, 533 (1993).