

# ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ БОЗЕ-ВОЗБУЖДЕНИЙ В ПЛАЗМЕ С НЕАБЕЛЕВЫМ ТИПОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Ю. А. Марков<sup>a,d\*</sup>, М. А. Маркова<sup>a\*\*</sup>, Н. Ю. Марков<sup>b</sup>, Д. М. Гитман<sup>c,d,e\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова  
Сибирского отделения Российской академии наук  
664033, Иркутск, Россия*

<sup>b</sup> *Иркутский государственный университет  
664003, Иркутск, Россия*

<sup>c</sup> *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

<sup>d</sup> *Томский государственный университет  
634050, Томск, Россия*

<sup>e</sup> *Институт физики университета Сан-Паулу  
05508-090, Сан-Паулу, Бразилия*

Поступила в редакцию 17 июня 2019 г.,  
после переработки 19 августа 2019 г.  
Принята к публикации 28 августа 2019 г.

Построена гамильтонова теория для коллективных продольно-поляризованных бесцветных возбуждений (плазмонов) в высокотемпературной глюонной плазме. Применяется общий формализм построения теории волн в нелинейных средах с дисперсией, развитый В. Е. Захаровым. В рамках данного подхода получено в явном виде специальное каноническое преобразование, позволяющее упростить гамильтониан взаимодействия мягких глюонных возбуждений и тем самым определить новый эффективный гамильтониан. Развитый подход использован для построения кинетического уравнения бозе-газовского типа, которое описывает процесс упругого рассеяния коллективных продольно-поляризованных возбуждений в глюонной плазме и эффект так называемого нелинейного затухания Ландау. Проведено детальное сравнение эффективной амплитуды плазмон-плазмонного взаимодействия, найденной в рамках классической гамильтоновой теории, и соответствующего матричного элемента, вычисленного в рамках высокотемпературной квантовой хромодинамики, что позволило определить границы справедливости чисто классического подхода, представленного в работе.

DOI: 10.31857/S004445102002011X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В теории обычной электрон-ионной плазмы было показано, что слабая турбулентность плазмы может быть двух типов (см., например, [1]). Слабая турбулентность первого типа обусловлена процессами рассеяния волн на частицах плазмы. Слабая турбулентность второго типа обусловлена процессами распада, слияния и рассеяния волн друг на друге,

происходящими без обмена энергией между частицами и волнами. В ряде работ [2–7] были построены и детально исследованы кинетические уравнения для наиболее простых коллективных возбуждений (ленгмюровских плазмонов) электрон-ионной плазмы, описывающие процессы упругого рассеяния плазмонов друг на друге.

В настоящее время проявляется определенный интерес к построению кинетического описания нового фундаментального состояния материи: кварк-глюонной плазмы — плазмы, состоящей из асимптотически свободных кварков, антикварков и глюонов (см., например, обзор [8]), которая, возможно, образуется при столкновении ультра-

\* E-mail: markov@icc.ru

\*\* E-mail: markova@icc.ru

\*\*\* E-mail: dmitrygitman@hotmail.com

релятивистских тяжелых ядер. Показано, что в пределе больших температур кварк-глюонная плазма хорошо описывается эффективной пертурбативной теорией [9], переформулированной на языке кинетических уравнений [10]. Глюонная плазма (для простоты в данной работе будем пренебрегать существованием кварков и антикварков) может быть представлена в виде двух подсистем: подсистемы жестких термальных глюонов и подсистемы мягких плазменных возбуждений, которые обмениваются энергией между собой. В высокотемпературной глюонной плазме, так же как и в обычной электрон-ионной, существует два типа коллективных плазменных возбуждений: поперечно-поляризованные и продольно-поляризованные (плазмоны). В отсутствие внешних хромагнитного или хромоэлектрического полей цветовая матрица плотности числа коллективных глюонных возбуждений является диагональной, и поэтому данные возбуждения следует трактовать как бесцветные.

В работе [11] развито кинетическое описание процессов нелинейного взаимодействия бесцветных и цветных плазмонов в рамках приближения жестких температурных петель [9, 10]. Основой этого подхода является вычисление некоторых эффективных токов, порождающих эти процессы. С помощью данных токов далее определяются матричные элементы процессов нелинейного взаимодействия произвольного (четного) числа бесцветных плазмонов. В данной работе представлен альтернативный путь кинетического описания нелинейной динамики плазмонов, основанный на классическом гамильтоновом формализме для систем с распределенными параметрами, систематически развитый в работах Захарова [5–7], Гитмана и Тютюна [12]. Основой этого подхода в нашем случае является то, что уравнения, описывающие бесстолкновительную высокотемпературную плазму в приближении жестких температурных петель, обладают гамильтоновой структурой, которая была найдена в работах [13–15]. Последнее обстоятельство позволяет нам развить (по крайней мере, для слабо-возбужденных состояний, см. Заключение) независимый подход к выводу кинетического уравнения для мягких продольно-поляризованных глюонных плазменных возбуждений. В рамках гамильтонова подхода матричные элементы плазмон-плазмонного взаимодействия получаются в результате специальных канонических преобразований, упрощающих гамильтониан взаимодействия плазмонов.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 приведен вывод оператора эффективного гамильтониана четвертого порядка  $\hat{H}_4$ , описывающего процесс упругого рассеяния двух бесцветных плазмонов друг на друге. В разд. 3 введена в рассмотрение функция распределения плазмонов  $N_{\mathbf{k}}^l$  и дан анализ корреляционных функций четвертого и шестого порядков по операторам рождения и уничтожения плазмонов  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger b}$  и  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$ . Раздел 4 посвящен выводу кинетического уравнения для мягких глюонных возбуждений больцмановского типа с учетом эффекта нелинейного затухания Ландау плазмонов. Разделы 5 и 6 связаны с определением явного вида трехплазмонных и четырехплазмонных вершинных функций в рамках приближения жестких температурных петель и аппроксимации эффективно-глюонного пропагатора в плазмонном полюсе. В заключительном разд. 7 намечены возможные пути обобщения гамильтонова описания на случай сильно-возбужденной глюонной плазмы.

В Приложении приведены все основные выражения для эффективных глюонных вершинных функций и глюонного пропагатора в высокотемпературном приближении жестких температурных петель.

## 2. ГАМИЛЬТониан взаимодействия бесцветных плазмонов

Рассмотрим далее приложение общей теории В. Е. Захарова к конкретной системе — высокотемпературной глюонной плазме в квазиклассическом приближении. Потенциалы калибровочного поля, которые описывают глюонное поле в системе, являются  $N_c \times N_c$ -матрицами в цветовом пространстве и определены посредством  $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) t^a$  с  $N_c^2 - 1$  эрмитовыми генераторами  $t^a$  цветовой группы  $SU(N_c)$  в фундаментальном представлении<sup>1)</sup>. Тензор напряженности  $F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a(x) t^a$ , где

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

подчиняется уравнению Янга–Миллса в  $A_0$ -калибровке:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) - ig[A_\mu(x), F^{\mu\nu}(x)] - \xi_0^{-1} n_\mu n^\nu A_\nu(x) = -j^\nu(x),$$

<sup>1)</sup> Цветовой индекс  $a$  пробегает значения  $1, 2, \dots, N_c^2 - 1$ , в то время как векторный индекс  $\mu$  пробегает значения  $0, 1, 2, 3$ . Всюду в тексте статьи по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование и используется система единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ .

где  $\xi_0$  — калибровочный параметр в данной калибровке. 4-вектор  $n_\mu$  будем далее отождествлять с глобальной 4-скоростью  $u_\mu$  плазмы. Цветной ток  $j^\nu$  определяется обычным образом:

$$j^\nu(x) = g t^a \int d^4 p p^\nu \text{Tr} (T^a f_g(x, p)).$$

Здесь  $x = (t, \mathbf{x})$  — пространственно-временная переменная исходной динамической системы,  $(T^a)^{bc} \equiv \equiv -i f^{abc}$  — цветовая матрица в присоединенном представлении. Функция распределения глюонов  $f_g = f_g(x, p)$  является  $(N_c^2 - 1) \times (N_c^2 - 1)$ -эрмитовой матрицей в цветовом пространстве.

Как известно, в равновесной горячей кварк-глюонной плазме существуют два типа физических бозонных мягких полей: поперечно-поляризованное и продольно-поляризованное [8]. Для простоты ограничим свое рассмотрение только процессами с участием продольно-поляризованных плазменных возбуждений, которые носят название плазмонов. Эти возбуждения являются истинно коллективным эффектом среды, не имеющим аналогов в обычной квантовой теории поля. Рассмотрим продольную часть потенциала калибровочного поля в виде разложения

$$\hat{A}_\mu^a(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left( \frac{Z^l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} \times \left\{ \epsilon_\mu^l \hat{a}_{\mathbf{k}}^a e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon_\mu^{*l} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\}, \quad k_0 = \omega_{\mathbf{k}}^l, \quad (2.1)$$

где  $\epsilon_\mu^l = \epsilon_\mu^l(\mathbf{k})$  — вектор поляризации продольного плазмона, явный вид которого зависит от выбора калибровки (в частности, при  $A_0$ -калибровке данный вектор определяется выражением (5.6)). Множитель  $Z^l(\mathbf{k})$  есть вычет эффективного глюонного пропагатора в плазмонном полюсе. Коэффициенты  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^a$  и  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$  будем рассматривать как квазичастичные операторы уничтожения и рождения плазмонов, подчиняющиеся коммутационным соотношениям бозе-операторов

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^a, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^b] &= [\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger b}] = 0, \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}}^a, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger b}] &= \delta^{ab} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Многоплазмонные состояния получают многократным действием оператора  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$  на вакуумное состояние  $|0\rangle$ , которое подчиняется следующему условию:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^a |0\rangle = 0.$$

Таким образом, под вакуумом понимается основное, невозбужденное состояние системы, т. е. состояние,

не имеющее элементарных коллективных возбуждений. У операторов  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^a$  и  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$  отличны от нуля лишь матричные элементы, соответствующие изменению на единицу числа плазмонов.

Запишем квантовомеханический аналог уравнения Гамильтона, а именно, уравнение Гейзенберга для оператора  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^a$ :

$$\frac{\partial \hat{a}_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} = i [\hat{H}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^a]. \quad (2.3)$$

Здесь  $\hat{H}$  — гамильтониан системы плазмонов, равный сумме  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$ , где

$$\hat{H}_0 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}}^l \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{a}_{\mathbf{k}}^a \quad (2.4)$$

— гамильтониан невзаимодействующих плазмонов,  $\hat{H}_{int}$  — гамильтониан взаимодействия. Дисперсионное соотношение для плазмонов  $\omega_{\mathbf{k}}^l$  удовлетворяет следующему дисперсионному уравнению [16]:

$$\text{Re} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) &= 1 + \frac{3\omega_{pl}^2}{\mathbf{k}^2} \left[ 1 - F \left( \frac{\omega}{|\mathbf{k}|^2} \right) \right], \\ F(x) &= \frac{x}{2} \left[ \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - i\pi\theta(1-|x|) \right] \end{aligned}$$

— продольная диэлектрическая проницаемость и  $\omega_{pl}^2 = g^2 N_c T^2 / 9$ ,  $T$  — температура системы,  $g$  — постоянная сильного взаимодействия. В приближении малых амплитуд гамильтониан взаимодействия можно представить в виде формального интегрального ряда по  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^a$  и  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$ :

$$\hat{H}_{int} = \hat{H}_3 + \hat{H}_4 + \dots,$$

где гамильтонианы взаимодействия третьего и четвертого порядков имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \hat{H}_3 &= \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9} \left\{ V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + \right. \\ &+ V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*a a_1 a_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger a_2} \hat{a}_{\mathbf{k}}^a \left. \right\} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \\ &+ \frac{1}{3} \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9} \left\{ U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} \hat{a}_{\mathbf{k}}^a \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + \right. \\ &+ U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*a a_1 a_2} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger a_2} \left. \right\} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_4 &= \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^{12}} T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \times \\ &\times \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \quad (2.7) \end{aligned}$$

и т. д. Под символом «\*» понимается комплексное сопряжение. В выражении (2.7) мы оставили лишь «существенный» по терминологии В. Е. Захарова вклад, в силу того что резонансные условия

$$\begin{cases} \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0, \\ \omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l + \omega_{\mathbf{k}_3}^l = 0, \\ \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \\ \omega_{\mathbf{k}}^l = \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l + \omega_{\mathbf{k}_3}^l \end{cases}$$

не имеют решений для спектра плазмонов, определяемого дисперсионным уравнением (2.5).

Отметим, что подобного рода представление гамильтониана взаимодействия в виде формальных бесконечных рядов по степеням операторов рождения и уничтожения рассматривались в книге Шварца [17] в рамках квантовой теории поля для скалярных полей.

Коэффициенты  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a, a_1, a_2}$ ,  $U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a, a_1, a_2}$  и  $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a, a_1, a_2, a_3}$  обладают определенной симметрией

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a, a_1, a_2} &= V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{a, a_2, a_1}, \\ U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a, a_1, a_2} &= U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{a, a_2, a_1} = U_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{a_1, a_2, a}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a, a_1, a_2, a_3} &= T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a_1, a, a_2, a_3} = T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2}^{a, a_1, a_3, a_2} = \\ &= T_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*a_2, a_3, a, a_1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Эти коэффициентные функции определяют конкретные свойства среды, в данном случае высокотемпературной глюонной плазмы.

Рассмотрим преобразование от операторов  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^a$  к новым операторам  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$ :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}}^a &= \hat{c}_{\mathbf{k}}^a + \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6} \left[ V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a, a_1, a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + \right. \\ &+ V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a, a_1, a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1} + V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3) a, a_1, a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger a_2} \left. \right] + \\ &+ \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \left[ W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{(1) a, a_1, a_2, a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} + \dots \right. \\ &\left. \dots + W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{(4) a, a_1, a_2, a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{\dagger a_3} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Условия каноничности данного преобразования<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta \hat{a}_{\mathbf{k}}^a}{\delta \hat{c}_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta \hat{a}_{\mathbf{k}''}^b}{\delta \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger c}} - \frac{\delta \hat{a}_{\mathbf{k}}^a}{\delta \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger c}} \frac{\delta \hat{a}_{\mathbf{k}''}^b}{\delta \hat{c}_{\mathbf{k}'}^c} \right\} &= 0, \\ \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta \hat{a}_{\mathbf{k}}^a}{\delta \hat{c}_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta \hat{a}_{\mathbf{k}''}^{\dagger b}}{\delta \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger c}} - \frac{\delta \hat{a}_{\mathbf{k}}^a}{\delta \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger c}} \frac{\delta \hat{a}_{\mathbf{k}''}^{\dagger b}}{\delta \hat{c}_{\mathbf{k}'}^c} \right\} &= \delta^{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \end{aligned}$$

налагают определенные ограничения на коэффициентные функции ряда (2.10). Функции  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a, a_1, a_2}$ ,  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a, a_1, a_2}$  и  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3) a, a_1, a_2}$  должны удовлетворять условиям

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a, a_1, a_2} = -2V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{*(1) a_1, a, a_2},$$

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3) a, a_1, a_2} = V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(3) a, a_2, a_1} = V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{(3) a_1, a_2, a},$$

а функции  $W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  — условиям

$$\begin{aligned} 3W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{(1) a, a_1, a_2, a_3} + 4 \int \left\{ V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{*(1) a_2, a, a'} V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}'}^{*(3) a_1, a_3, a'} - \right. \\ \left. - V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'}^{(1) a, a_2, a'} V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3}^{(1) a', a_1, a_3} \right\} d\mathbf{k}' = -W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{*(3) a_1, a, a_2, a_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{(2) a, a_1, a_2, a_3} + 2 \int \left\{ V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}'}^{(1) a, a_1, a'} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'}^{*(1) a_3, a_1, a'} + \right. \\ \left. + V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(1) a', a, a_1} V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2}^{(1) a', a_3, a_2} - V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{*(1) a_1, a, a'} V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2}^{(1) a', a_3, a_2} - \right. \\ \left. - V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}'}^{(3) a, a_1, a'} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'}^{*(3) a_3, a_2, a'} \right\} d\mathbf{k}' = -W_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{*(2) a_3, a_1, a_2, a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{(3) a, a_1, a_2, a_3} + 2 \int \left\{ V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}'}^{(1) a_3, a_1, a'} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'}^{(3) a, a_2, a'} + \right. \\ \left. + V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{*(1) a_1, a, a'} V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2}^{*(1) a', a_3, a_2} - \right. \\ \left. - V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}'}^{*(1) a_1, a_3, a'} V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{*(1) a', a, a_2} - \right. \\ \left. - V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}'}^{(1) a, a_1, a'} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'}^{(3) a_3, a_2, a'} \right\} d\mathbf{k}' = \\ = W_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{(3) a_3, a_1, a_2, a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{(4) a, a_1, a_2, a_3} + 4 \int \left\{ V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{*(1) a', a, a_2} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}'}^{(3) a_3, a_1, a'} - \right. \\ \left. - V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1}^{*(1) a', a_3, a_1} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'}^{(3) a, a_2, a'} \right\} d\mathbf{k}' = 3W_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{(4) a_3, a_1, a_2, a}. \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Вариационные производные по операторам  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$  и  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$  следует понимать как пределы соответствующих функциональных производных по аддитивным классическим добавкам  $\varphi_{\mathbf{k}}^a$  и  $\varphi_{\mathbf{k}}^{*a}$  к квантовым  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$  и  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$  [18]:

$$\hat{c}_{\mathbf{k}}^a \rightarrow \hat{c}_{\mathbf{k}}^a + \varphi_{\mathbf{k}}^a, \quad \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \rightarrow \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} + \varphi_{\mathbf{k}}^{*a}.$$

В силу специфики дисперсионного уравнения (2.5) в горячей глюонной плазме резонансные условия

$$\begin{cases} \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \\ \omega_{\mathbf{k}}^l = \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0, \\ \omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

не имеют решений, т.е. спектр продольных плазмонов является нераспадным. Тогда каноническое преобразование (2.10) позволяет исключить «несущественный» гамильтониан  $\hat{H}_3$  (2.6), просто полагая

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a a_1 a_2} = -\frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}}{\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2),$$

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3) a a_1 a_2} = -\frac{U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{* a a_1 a_2}}{\omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

Данная процедура исключения приводит нас к следующей структуре эффективного гамильтониана четвертого порядка  $\tilde{\hat{H}}_4$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{H}}_4 = & \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^{12}} \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \times \\ & \times \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} = & T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} - \\ & - 2 \frac{U_{-(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3), \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{b a_2 a_3} U_{-(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1), \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{* b a a_1}}{\omega_{-(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l} - \\ & - 2 \frac{V_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{b a_2 a_3} V_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{* b a a_1}}{\omega_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l} - \\ & - 2 \frac{V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^{a_1 a_2 b} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}}^{* a_3 a b}}{\omega_{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l} - \\ & - 2 \frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k} - \mathbf{k}_2}^{a a_2 b} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1}^{* a_3 a_1 b}}{\omega_{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l} - \\ & - 2 \frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_3, \mathbf{k} - \mathbf{k}_3}^{a a_3 b} V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^{* a_2 a_1 b}}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l} - \\ & - 2 \frac{V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3}^{a_1 a_3 b} V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}}^{* a_2 a b}}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Найденная эффективная амплитуда имеет простую диаграммную интерпретацию, которая представлена на рис. 1. Черный квадрат обозначает эффективную амплитуду  $\tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}$ . Первый член справа на рис. 1 определяет прямое взаимодействие четырех плазмонов, порождаемое обычной четырехплазменной амплитудой  $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}$ . Остальные члены

связаны с взаимодействием трех плазмонов, порождаемым амплитудами  $U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_1}$  и  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_1}$  с промежуточными «виртуальными» колебаниями. Условие малости амплитуд в нашем случае означает

$$|\tilde{T}^{(4)}||c|^2 \ll \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^l}{\partial \mathbf{k}}. \quad (2.14)$$

Таким образом, существуют два эквивалентных описания гамильтоновой системы бесцветных плазмонов для одних и тех же физических процессов. В первом мы можем использовать исходный оператор Гамильтона

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 + \dots, \quad (2.15)$$

где  $\hat{H}_0$ ,  $\hat{H}_3$  и  $\hat{H}_4$  задаются выражениями (2.4), (2.6) и (2.7) соответственно, а во втором — оператор Гамильтона  $\tilde{\hat{H}}$ , полученный в результате нелинейного преобразования бозонных операторов рождения и уничтожения,  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$  и  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^a$ :

$$\tilde{\hat{H}} = \tilde{\hat{H}}_0 + \tilde{\hat{H}}_4 + \dots, \quad (2.16)$$

где, в свою очередь,

$$\tilde{\hat{H}}_0 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}}^l \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{c}_{\mathbf{k}}^a,$$

а оператор  $\tilde{\hat{H}}_4$  определен выражением (2.12). Уравнения Гейзенберга для операторов  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^a$  и  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$  имеют полностью идентичную форму (2.3) с соответствующими операторами Гамильтона (2.15) и (2.16).

В связи с данным построением необходимо упомянуть близкую к теме нашего исследования работу Манько и др. [19], в которой было введено новое важное понятие нелинейных  $f$ -осцилляторов. Авторы рассматривали задачу о квантовании гармонического осциллятора, где бозонные операторы рождения и уничтожения преобразовывались нелинейным образом в новые операторы рождения и уничтожения, определяющие квантовые  $f$ -осцилляторы. Тем самым был получен новый оператор Гамильтона с весьма нетривиальной структурой, описывающий ту же самую динамику, что и исходный, как это имеет место и в нашем случае.

Однако несмотря на близкое сходство подходов, представленных в нашей работе и в статье [19], следует отметить их принципиальное различие. В представленном в данном разделе подходе операторы рождения и уничтожения ( $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^a$ ) и ( $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}, \hat{c}_{\mathbf{k}}^a$ ) и соответствующие гамильтонианы (2.15) и (2.16) связаны между собой каноническим преобразованием с сохранением стандартного вида коммутационных соотношений (2.2). В подходе работы [19] нелинейные преобразования являются неканоническими,

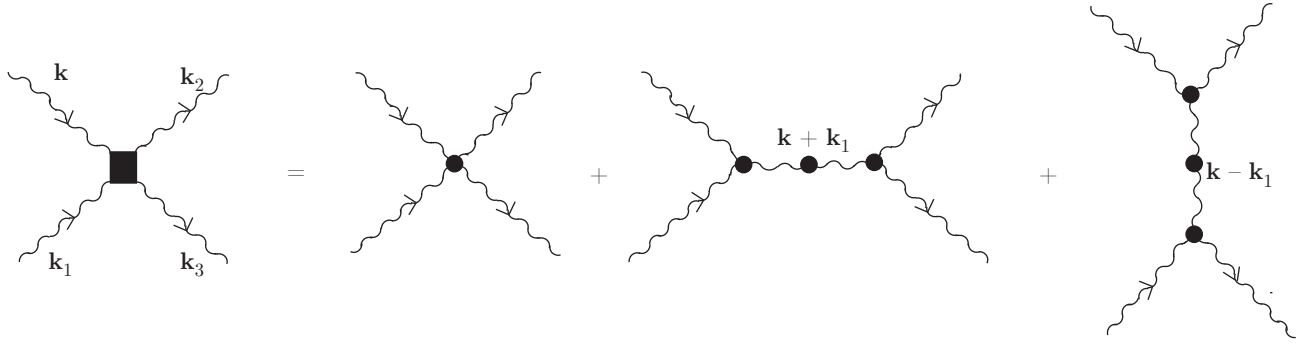


Рис. 1. Матричный элемент для четырехплазмонного распада. Волновые линии обозначают плазмоны

и поэтому для сохранения идентичности описываемой динамики авторы соответствующим образом модифицировали коммутационные соотношения типа (2.2). По этой причине в нашем случае нелинейные колебания, связанные с бозонными операторами, невозможно просто интерпретировать как колебания со специфической зависимостью частоты колебаний от энергии, как это имеет место для нелинейных  $f$ -осцилляторов, хотя отчасти данный факт может иметь место.

### 3. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Гамильтониан (2.12) описывает процесс упругого рассеяния цветных плазмонов друг на друге, т.е. процесс  $2 \rightarrow 2$ . Уравнения движения для  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$  и  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger b}$  здесь определяются соответствующими уравнениями Гейзенберга:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{c}_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} &= i \left[ \tilde{H}_0 + \tilde{H}_4, \hat{c}_{\mathbf{k}}^a \right] = -i \omega_{\mathbf{k}}^l \hat{c}_{\mathbf{k}}^a - \\ &- i \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} \times \\ &\times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}}{\partial t} &= i \left[ \tilde{H}_0 + \tilde{H}_4, \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \right] = i \omega_{\mathbf{k}}^l \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} + \\ &+ i \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{* a a_1 a_2 a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{\dagger a_3} \times \\ &\times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Данные точные уравнения, в отсутствие внешнего цветного поля в системе, позволяют определить кинетическое уравнение для плотности числа бесцветных плазмонов  $N_{\mathbf{k}}^{abl} \equiv \delta^{ab} N_{\mathbf{k}}^l$ .

Если совокупность волн при малом уровне нелинейности (2.14) имеет случайные фазы, то эту совокупность можно описывать статистически, вводя корреляционную функцию:

$$\langle \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{c}_{\mathbf{k}'}^b \rangle = \delta^{ab} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') N_{\mathbf{k}}^l. \quad (3.3)$$

Подчеркнем, что введение функции распределения  $N_{\mathbf{k}}^l \equiv N^l(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$  квазичастиц (плазмонов), зависящей как от импульса  $\hbar\mathbf{k}$  плазмона, так и от координат  $\mathbf{x}$  и времени  $t$ , имеет смысл только в том случае, когда число плазмонов медленно меняется в пространстве и времени. Это значит, что изменение функции на расстояниях порядка длины волны  $\lambda = 2\pi/k$  и в течение промежутков времени порядка длины волны  $T = 2\pi/\omega_{\mathbf{k}}^l$  должно быть значительно меньше самой функции  $N_{\mathbf{k}}^l$ .

Исходя из уравнений Гейзенберга (3.1) и (3.2), определим кинетическое уравнение для плотности числа плазмонов  $N_{\mathbf{k}}^l$ . Для этой цели умножим уравнения (3.1) и (3.2) соответственно на  $\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger b}$  и  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{c}_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger b} &= -i \omega_{\mathbf{k}}^l \hat{c}_{\mathbf{k}}^a \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger b} - i \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \times \\ &\times \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger b} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_{\mathbf{k}}^a \frac{\partial \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger b}}{\partial t} &= i \omega_{\mathbf{k}}^l \hat{c}_{\mathbf{k}}^a \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger b} + i \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \times \\ &\times \tilde{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{* b a_1 a_2 a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}}^a \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{\dagger a_3} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3). \end{aligned}$$

Складывая последние два уравнения и усредняя их, получаем

$$\delta^{ab}(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = -i \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \times \\ \times \left\{ \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} I_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{b a_1 a_2 a_3} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) - \right. \\ \left. - \tilde{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{* b a_1 a_2 a_3} I_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{a_2 a_3 a a_1} \times \right. \\ \left. \times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \right\}, \quad (3.4)$$

где

$$I_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} = \langle \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} \rangle$$

— четырехточечная корреляционная функция. Дифференцируя далее корреляционную функцию  $I_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}$  по  $t$ , с учетом (3.1) и (3.2) мы получаем уравнение, правая часть которого будет содержать корреляционные функции шестого порядка по операторам  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$  и  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$ :

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}}{\partial t} = i [\omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l] I_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} + \\ + i \int \frac{d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}'_2 d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9} \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3}^{* a a_1 a_2 a_3} \times \\ \times \langle \hat{c}_{\mathbf{k}'_1}^{a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}'_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}'_3}^{\dagger a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} \rangle (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_3) + \\ + i \int \frac{d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}'_2 d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9} \tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3}^{* a a_1 a_2 a_3} \times \\ \times \langle \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{c}_{\mathbf{k}'_1}^{a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}'_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}'_3}^{\dagger a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} \rangle (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_3) - \\ - i \int \frac{d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}'_2 d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9} \tilde{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3}^{a_2 a_1 a_2 a_3} \times \\ \times \langle \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}'_1}^{a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}'_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}'_3}^{\dagger a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} \rangle (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_3) - \\ - i \int \frac{d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}'_2 d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9} \tilde{T}_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3}^{a_3 a_1 a_2 a_3} \times \\ \times \langle \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}'_1}^{a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}'_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}'_3}^{\dagger a_3} \rangle \times \\ \times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_3). \quad (3.5)$$

Замкнем цепочку уравнений для корреляционных функций тем, что выражения для корреляционных функций шестого порядка выразим в терминах парных корреляционных функций. Так, например, первая корреляционная функция в правой части (3.5) имеет следующую структуру:

$$\langle \hat{c}_{\mathbf{k}'_1}^{a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}'_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}'_3}^{\dagger a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_1}^{\dagger a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} \rangle = 3(2\pi)^9 \left\{ \delta^{a_3 a_3} \delta^{a_2 a_2} \delta^{a_1 a_1} \times \right. \\ \times \delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) N_{\mathbf{k}_3}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_1}^l + \\ + \delta^{a_3 a_3} \delta^{a_1 a_1} \delta^{a_2 a_2} \times \\ \times \delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_1) N_{\mathbf{k}_3}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l + \\ + \delta^{a_3 a_1} \delta^{a_1 a_3} \delta^{a_2 a_2} \times \\ \times \delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}'_1) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2) N_{\mathbf{k}'_1}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l + \\ + \delta^{a_3 a_1} \delta^{a_1 a_2} \delta^{a_2 a_3} \times \\ \times \delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}'_1) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_3) N_{\mathbf{k}'_1}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_3}^l + \\ + \delta^{a_3 a_2} \delta^{a_1 a_3} \delta^{a_2 a_1} \times \\ \times \delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}'_1) N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}'_1}^l + \\ \left. + \delta^{a_3 a_2} \delta^{a_1 a_1} \delta^{a_2 a_3} \times \right. \\ \left. \times \delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_3) N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}'_1}^l N_{\mathbf{k}_3}^l \right\}. \quad (3.6)$$

В данном выражении только первый и последний члены дают необходимый вклад в искомое кинетическое уравнение. Подставляем эти члены в первый интеграл в правой части (3.5) и выполняем суммирование по цветным индексам  $a'_1, a'_2, a'_3$  и интегрирование по импульсам  $\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3$ . В итоге получаем

$$3i \left\{ \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{* a a_1 a_2 a_3} N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l + \right. \\ \left. + \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{* a a_1 a_2 a_3} N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l \right\} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) = \\ = 6i \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{* a a_1 a_2 a_3} N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l \times \\ \times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3). \quad (3.7)$$

Для примера приведем явный вид вклада, который генерирует второй член в разбиении корреляционной функции (3.6):

$$N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) \delta^{a_1 a_2} i \int \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}', \mathbf{k}}^{* a b b a_3} N_{\mathbf{k}'}^l d\mathbf{k}'.$$

Сравнивая два последних выражения, видим, что они имеют совершенно разную структуру.

Смотрим далее вторую шеститочечную корреляционную функцию в (3.5). В данном корреляторе выписываем в явном виде только «правильные» члены:

$$\langle \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} \hat{c}_{\mathbf{k}'_1}^{a_1} \hat{c}_{\mathbf{k}'_2}^{\dagger a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}'_3}^{\dagger a_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \hat{c}_{\mathbf{k}_3}^{a_3} \rangle = \\ = 3(2\pi)^9 \left\{ \delta^{a a_1} \delta^{a_2 a_2} \delta^{a_3 a_3} \delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2) \times \right. \\ \left. \times \delta(\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}_3) N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l + (2 \rightleftharpoons 3) + \dots \right\}.$$

Подставляя данное выражение во второй интеграл в (3.5), получаем выражение, аналогичное выражению (3.7):

$$6i \tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{*a_1 a a_2 a_3} N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3).$$

Аналогичные рассуждения для третьего и четвертого корреляторов в (3.5) дают нам два оставшихся вклада соответственно

$$-6i \tilde{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{a_2 a_3 a a_1} N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_3}^l (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)$$

и

$$-6i \tilde{T}_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{a_3 a_2 a a_1} N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3).$$

Учитывая соотношения симметрии для амплитуды рассеяния

$$\tilde{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{a_2 a_3 a a_1} = \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{*a a_1 a_2 a_3},$$

$$\tilde{T}_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{a_3 a_2 a a_1} = \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{*a a_1 a_2 a_3},$$

находим уравнение для корреляционной функции четвертого порядка, вместо (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}}{\partial t} &= i[\omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l] I_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} + \\ &+ 6i \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{*a a_1 a_2 a_3} \left( N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l + N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l - \right. \\ &\left. - N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_3}^l - N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l \right) \times \\ &\times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (3.8)$$

#### 4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГЛЮОННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Перейдем теперь к непосредственному выводу кинетического уравнения для плазмонов. В принципе, самосогласованная система двух уравнений (3.4) и (3.8) определяет эволюцию плотности числа плазмонов  $N_{\mathbf{k}}^l$ . Однако мы сделаем еще одно упрощение: в уравнении (3.8) пренебрежем членом с производной по времени в сравнении с членом, содержащим разность собственных частот волновых пакетов. Вместо (3.8) тогда будем иметь

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} &\simeq N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l (2\pi)^6 \left[ \delta^{a a_2} \delta^{a_1 a_3} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2) \times \right. \\ &\times \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) + \delta^{a a_3} \delta^{a_1 a_2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left. \right] - \\ &- \frac{6}{\Delta\omega + i0} \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{*a a_1 a_2 a_3} \left( N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l + N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l - \right. \\ &\left. - N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_3}^l - N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l \right) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3), \end{aligned}$$

где

$$\Delta\omega \equiv \omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l.$$

Здесь первый член в правой части, соответствующий полностью некоррелированным волнам (чисто гауссовым флуктуациям), является решением однородного уравнения для корреляционной функции четвертого порядка  $I_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}$ . Второй член определяет отклонение четырехточечного коррелятора от гауссова приближения для малого уровня нелинейности взаимодействующих волн.

Подставим первый член в правую часть уравнения для  $N_{\mathbf{k}}^l$  (3.4):

$$\begin{aligned} &- i(2\pi)^3 N_{\mathbf{k}}^l \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{k}_1}^l \left\{ \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}', \mathbf{k}_1}^{a a_1 b a_1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}'}^{a a_1 b a_1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*b a_1 a a_1} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) - \tilde{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{*b a_1 a a_1} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \right\} = \\ &= -i2(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') N_{\mathbf{k}}^l \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{k}_1}^l \times \\ &\quad \times \left\{ \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{a a_1 b a_1} - \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{*b a_1 a a_1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подставим далее второй член в правую часть уравнения (3.4):

$$\begin{aligned} &- 6i \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \left\{ \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} \left( \frac{1}{\Delta\omega + i0} \right) \times \right. \\ &\quad \times \tilde{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{*b a_1 a_2 a_3} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \times \\ &\quad \times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \left[ N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l + \dots \right] - \\ &\quad - \tilde{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}', \mathbf{k}_1}^{a_2 a_3 b a_1} \left( \frac{1}{\Delta\omega - i0} \right) \tilde{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*a_2 a_3 a a_1} \times \\ &\quad \times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \times \\ &\quad \times \left[ N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l + \dots \right]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) &= \\ &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3), \end{aligned}$$

последнее выражение можно записать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} &- 6i(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \times \\ &\quad \times (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \left[ N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l + \dots \right] \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} \tilde{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{*b a_1 a_2 a_3}}{\Delta\omega + i0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}', \mathbf{k}_1}^{a_2 a_3 b a_1} \tilde{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*a_2 a_3 a a_1}}{\Delta\omega - i0} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$



Свертывая далее полученные выражения (3.4), (4.1) и (4.2) с  $\delta^{ab}$ , учитывая, что

$$\frac{1}{\Delta\omega + i0} - \frac{1}{\Delta\omega - i0} = -2i\pi\delta(\Delta\omega),$$

и сокращая на множитель  $(2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , находим искомое кинетическое уравнение для бесцветных продольных глюонных возбуждений:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{k}}^l}{dt} &= \frac{4}{d_A} N_{\mathbf{k}}^l \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{k}_1}^l \text{Im} \left[ \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{a a_1 a a_1} \right] + \\ &+ \frac{6}{d_A} \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} (2\pi)^4 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l) \times \\ &\times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{*a a_1 a_2 a_3} \times \\ &\times \left( N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l + N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l - N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_3}^l - \right. \\ &\left. - N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь  $d_A = N_c^2 - 1$ . Первое слагаемое в правой части (4.3) описывает процесс нелинейного затухания Ландау [20], декремент которого представляет собой линейный функционал плотности числа плазмонов  $N_{\mathbf{k}}^l$ :

$$\hat{\gamma}\{N_{\mathbf{k}}^l\} \equiv \gamma^l(\mathbf{k}) = \frac{4}{d_A} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{k}_1}^l \text{Im} \left[ \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{a a_1 a a_1} \right].$$

Второе слагаемое в (4.3) связано с процессом упругого плазмон-плазмонного рассеяния. Уравнение (4.3) можно представить также в более наглядном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{k}}^l}{dt} &\equiv \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^l \cdot \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial \mathbf{x}} = \\ &= -\hat{\gamma}\{N_{\mathbf{k}}^l\} N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}}^l \Gamma_d[N_{\mathbf{k}}^l] + (1 + N_{\mathbf{k}}^l) \Gamma_i[N_{\mathbf{k}}^l], \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^l = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^l}{\partial \mathbf{k}} = - \left[ \left( \frac{\partial \text{Re} \varepsilon^l(k)}{\partial \mathbf{k}} \right) \left( \frac{\partial \text{Re} \varepsilon^l(k)}{\partial \omega} \right)^{-1} \right] \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}^l}$$

— групповая скорость продольных колебаний, а обобщенная скорость распада  $\Gamma_d$  и обратная скорость регенерации  $\Gamma_i$  представляют собой нелинейные функционалы плотности числа плазмонов:

$$\Gamma_d[N_{\mathbf{k}}^l] = \int d\mathcal{T}^{(3)} w_4(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) N_{\mathbf{k}_1}^l (1 + N_{\mathbf{k}_2}^l) (1 + N_{\mathbf{k}_3}^l)$$

и соответственно

$$\Gamma_i[N_{\mathbf{k}}^l] = \int d\mathcal{T}^{(3)} w_4(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) (1 + N_{\mathbf{k}_1}^l) N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}_3}^l.$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_4(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \\ &= \frac{6}{d_A} \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{*a a_1 a_2 a_3} \end{aligned} \quad (4.5)$$

— вероятность рассеяния для процесса упругого столкновения двух бесцветных плазмонов, а мера интегрирования определена как

$$\begin{aligned} d\mathcal{T}^{(3)} &\equiv (2\pi)^4 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l) \times \\ &\times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}. \end{aligned}$$

В пределе больших чисел заполнения плазмонных состояний,  $N_{\mathbf{k}}^l \gg 1$ , правая часть уравнения Больцмана (4.4) переходит в (4.3).

## 5. ЯВНЫЙ ВИД ФУНКЦИИ $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}$

Нам осталось определить явный вид вершинных функций  $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}$ ,  $U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$  и  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$ , которые входят в эффективную амплитуду (2.13). В данном разделе мы определим вид функции  $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}$  в приближении так называемых жестких температурных петель (НТЛ) [8]. В работе [11], в рамках НТЛ-приближения была вычислена вероятность упругого рассеяния двух плазмонов

$$\begin{aligned} w_4(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= 3M^{aa_1a_2a_3}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) \times \\ &\times M^{*aa_1a_2a_3}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь матричный элемент четырехплазмонного распада имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} M^{aa_1a_2a_3}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3) &= g^2 \left( \frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} \times \\ &\times \left( \frac{\tilde{u}^\mu(k)}{\sqrt{\tilde{u}^2(k)}} \right) \prod_{i=1}^3 \left( \frac{Z_l(\mathbf{k}_i)}{2\omega_{\mathbf{k}_i}^l} \right)^{1/2} \left( \frac{\tilde{u}^{\mu_i}(k_i)}{\sqrt{\tilde{u}^2(k_i)}} \right) \times \\ &\times \tilde{\Gamma}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}^{aa_1a_2a_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) \Big|_{on-shell}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

и, в свою очередь, эффективная амплитуда  $*\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}^{aa_1a_2a_3}(k, k_1, -k_2, -k_3)$  определяется выражением

$$\begin{aligned} *\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}^{aa_1a_2a_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) &= -f^{aa_1b} f^{ba_2a_3} \times \\ &\times *\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) - \\ &- f^{aa_2b} f^{ba_1a_3} *\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_2\mu_1\mu_3}(k, -k_2, k_1, -k_3), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $f^{abc}$  — антисимметричные структурные константы цветовой алгебры Ли  $\text{su}(N_c)$ . Цветные факторы

в последнем выражении умножаются на чисто кинематические коэффициенты — эффективные субамплитуды, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^*\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) &\equiv \\ &\equiv {}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) - \\ &- {}^*\Gamma_{\mu\mu_1\nu}(k, k_1, -k - k_1) {}^*\tilde{\mathcal{D}}^{\nu\nu'}(k_2 + k_3) \times \\ &\times {}^*\Gamma_{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2 + k_3, -k_2, -k_3) - \\ &- {}^*\Gamma_{\mu\mu_3\nu}(k, -k_3, -k + k_3) {}^*\tilde{\mathcal{D}}^{\nu\nu'}(k_2 - k_1) \times \\ &\times {}^*\Gamma_{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2 - k_1, -k_2, k_1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

В Приложении приведен вид вершинных функций  ${}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, k_2, k_3)$  и  ${}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(k, k_1, k_2)$ , (A.1)–(A.7), а также глюонного пропагатора  ${}^*\tilde{\mathcal{D}}^{\nu\mu}(k)$  в приближении жестких температурных петель, (A.8)–(A.10). Два 4-вектора

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\mu(k) &= \frac{k^2}{(k \cdot u)} (k_\mu - u_\mu(k \cdot u)) \quad \text{и} \\ \tilde{u}_\mu(k) &= k^2 u_\mu - k_\mu(k \cdot u) \end{aligned} \quad (5.5)$$

представляют собой проекторы на продольное направление волнового вектора  $\mathbf{k}$ , записанные в лоренц-инвариантной форме в гамильтоновой и лоренцевой калибровках соответственно. Здесь  $u^\mu$  — 4-скорость среды, которая в системе покоя равна  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Наконец, 4-векторы вида

$$\left( \frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} \frac{\tilde{u}_\mu(k)}{\sqrt{\tilde{u}^2(k)}} \Big|_{on-shell} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) \quad (5.6)$$

в правой части (5.2) представляют собой обычные волновые функции продольного физического глюона в  $A_0$ -калибровке, где фактор  $\sqrt{Z_l(\mathbf{k})}$  обеспечивает ренормировку глюонной волновой функции за счет температурных эффектов. Множитель 3 в правой части (5.1) учитывает три возможных канала четырехплазмонного распада, которые меняют плотность числа плазмонов:

$$\begin{aligned} g^* + g_1^* &\rightleftharpoons g_2^* + g_3^*, & g^* + g_2^* &\rightleftharpoons g_1^* + g_3^*, \\ g^* + g_3^* &\rightleftharpoons g_1^* + g_2^*. \end{aligned}$$

Сравнивая два выражения для вероятности плазмон-плазмонного рассеяния (4.5) и (5.1), видим, что эффективную амплитуду  $\tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}$ , определяемую выражением (2.13), с точностью до числового множителя следует отождествить с матричным элементом  $M^{a a_1 a_2 a_3}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3)$ ,

вычисленным в рамках высокотемпературной квантовой теории поля, т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} &= \\ &= \left( \frac{d_A}{2} \right)^{1/2} M^{a a_1 a_2 a_3}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из выражений для эффективных амплитуд (2.13) и (5.2), (5.3) мы можем сразу получить явный вид амплитуды  $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3}$ , которая входит в качестве коэффициентной функции в определение оператора Гамильтона четвертого порядка  $\hat{H}_4$  (2.7):

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a a_1 a_2 a_3} &= - \left( \frac{d_A}{2} \right)^{1/2} g^2 \left( \frac{\epsilon_\mu^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \right) \times \\ &\times \prod_{i=1}^3 \left( \frac{\epsilon_{\mu_i}^l(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}^l}} \right) \left[ f^{a a_1 b} f^{b a_2 a_3} \times \right. \\ &\times {}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) + f^{a a_2 b} f^{b a_1 a_3} \times \\ &\left. \times {}^*\Gamma^{\mu\mu_2\mu_1\mu_3}(k, -k_2, k_1, -k_3) \right] \Big|_{on-shell}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь мы приняли во внимание связь продольного проектора с вектором поляризации, (5.6). Явный вид эффективной четырехглюонной вершины  ${}^*\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2, k_3)$  в правой части последнего выражения определяется формулами (A.5)–(A.7).

## 6. ЯВНЫЙ ВИД ФУНКЦИЙ $U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$ И $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$

Перейдем теперь к определению явного вида коэффициентных функций  $U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$  и  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$  в подынтегральных выражениях оператора Гамильтона третьего порядка  $\hat{H}_3$  (2.6). Однако в отличие от предыдущего случая, здесь мы имеем более сложную ситуацию. С учетом (2.13) и (5.2)–(5.4) из (5.7) следует исходное для анализа выражение

$$\begin{aligned}
& \frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3), \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{b a_2 a_3} U_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1), \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{* b a a_1}}{\omega_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{b a_2 a_3} V_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{* b a a_1}}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}^{a_1 a_2 b} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_3-\mathbf{k}}^{* a_3 a b}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}-\mathbf{k}_2}^{a a_2 b} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}^{* a_3 a_1 b}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}-\mathbf{k}_3}^{a a_3 b} V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^{* a_2 a_1 b}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3}^{a_1 a_3 b} V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2-\mathbf{k}}^{* a_2 a b}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l} = \\
& = \frac{1}{2} \left( \frac{d_A}{2} \right)^{1/2} g^2 \left( \frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \right) \prod_{i=1}^3 \left( \frac{\epsilon_{\mu_i}^l(k_i)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}^l}} \right) \times \\
& \times \left[ f^{aa_1b} f^{ba_2a_3} \left( * \Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k, k_1, -k-k_1) * \tilde{D}_{\nu\nu'}(k_2+k_3) \times \right. \right. \\
& \times * \Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2+k_3, -k_2, -k_3) + * \Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k, -k_3, -k+k_3) \times \\
& \times * \tilde{D}_{\nu\nu'}(k_2-k_1) * \Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2-k_1, -k_2, k_1) \left. \right) + \\
& + f^{aa_2b} f^{ba_1a_3} \left( * \Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k, -k_2, -k+k_2) \times \right. \\
& \times * \tilde{D}_{\nu\nu'}(-k_1+k_3) * \Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(-k_1+k_3, k_1, -k_3) + \\
& + * \Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k, -k_3, -k+k_3) * \tilde{D}_{\nu\nu'}(-k_1+k_2) \times \\
& \left. \left. \times * \Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(-k_1+k_2, k_1, -k_2) \right) \right] \Big|_{on-shell}. \quad (6.1)
\end{aligned}$$

Первым шагом нам необходимо «распутать» цветовую структуру данного выражения. Для этой цели полагаем для трехточечных амплитуд  $U$  и  $V$ :

$$U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} = f^{aa_1a_2} U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2},$$

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} = f^{aa_1a_2} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}.$$

Такое представление является однозначным. В силу полной антисимметричности структурных констант  $f^{a a_1 a_2}$  по перестановке цветных индексов, из свойств (2.8) немедленно следует

$$\begin{aligned}
V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} &= -V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}, \\
U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} &= -U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1} = U_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}.
\end{aligned} \quad (6.2)$$

Далее, используя тождество для антисимметричных структурных констант

$$f^{a_1 a_2 b} f^{b a_3 a} = -f^{a a_2 b} f^{b a_1 a_3} + f^{a a_1 b} f^{b a_2 a_3},$$

левую часть (6.1) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& f^{aa_1b} f^{ba_2a_3} \left[ \frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3), \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} U_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1), \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*}}{\omega_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l} + \right. \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*}}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_3-\mathbf{k}}^{*}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_3-\mathbf{k}}^{*}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l} + \\
& \left. + \frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}-\mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^{*}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l} \right] - \\
& - f^{aa_2b} f^{ba_1a_3} \left[ \frac{V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_3-\mathbf{k}}^{*}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l} + \right. \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}-\mathbf{k}_2} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}^{*}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_3}^l} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}-\mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^{*}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l} + \\
& \left. + \frac{V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2-\mathbf{k}}^{*}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l} \right].
\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты после произведений антисимметричных структурных констант  $f^{a a_1 b} f^{b a_2 a_3}$  и  $f^{a a_2 b} f^{b a_1 a_3}$  полученного выше выражения и правой части (6.1), находим

$$\begin{aligned}
& \frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3), \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} U_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1), \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*}}{\omega_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)} + \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1}} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*}}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1}} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_3-\mathbf{k}}^{*}}{\omega_{-(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)} + \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_1}} + \\
& + \frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}-\mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^{*}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}} = \\
& = \frac{1}{2} \left( \frac{d_A}{2} \right)^{1/2} g^2 \left( \frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \right) \prod_{i=1}^3 \left( \frac{\epsilon_{\mu_i}^l(k_i)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}^l}} \right) \times \\
& \times \left[ * \Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k, k_1, -k-k_1) * \tilde{D}_{\nu\nu'}(k+k_1) \times \right. \\
& \times * \Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2+k_3, -k_2, -k_3) + \\
& + * \Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k, -k_3, -k+k_3) * \tilde{D}_{\nu\nu'}(k_2-k_1) \times \\
& \left. \times * \Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2-k_1, -k_2, k_1) \right] \Big|_{on-shell}
\end{aligned}$$

плюс аналогичное соотношение для второй коэффициентной функции. Наконец, из структуры данного выражения ясно, что здесь мы фактически имеем два независимых соотношения: первое

$$\begin{aligned}
 & \frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3), \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} U_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1), \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^*}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l} + \\
 & + \frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^*}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l} = \\
 & = \frac{1}{2} \left( \frac{d_A}{2} \right)^{1/2} g^2 \left( \frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \right) \prod_{i=1}^3 \left( \frac{\epsilon_{\mu_i}^l(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}^l}} \right) \times \\
 & \times \left[ {}^* \Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k, k_1, -k - k_1) {}^* \tilde{D}_{\nu\nu'}(k + k_1) \times \right. \\
 & \left. \times {}^* \Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2 + k_3, -k_2, -k_3) \right] \Big|_{on-shell} \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

и второе

$$\begin{aligned}
 & \frac{V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} V_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_3-\mathbf{k}}^*}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l} + \\
 & + \frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}-\mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^*}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l} = \\
 & = \frac{1}{2} \left( \frac{d_A}{2} \right)^{1/2} g^2 \left( \frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \right) \prod_{i=1}^3 \left( \frac{\epsilon_{\mu_i}^l(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}^l}} \right) \times \\
 & \times \left[ {}^* \Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k, -k_3, -k + k_3) {}^* \tilde{D}_{\nu\nu'}(k_2 - k_1) \times \right. \\
 & \left. \times {}^* \Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2 - k_1, -k_2, k_1) \right] \Big|_{on-shell}. \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

В левых частях (6.3) и (6.4) мы учли четность дисперсионного соотношения, т. е.  $\omega_{-\mathbf{k}}^l = \omega_{\mathbf{k}}^l$ .

Далее, вторым шагом в эффективных глюонных пропагаторах  ${}^* \tilde{D}_{\nu\nu'}$  в правых частях (6.3) и (6.4) мы оставляем только члены с продольным проектором  $\tilde{Q}_{\nu\nu'}$ . Так, для первого пропагатора  ${}^* \tilde{D}_{\nu\nu'}(k + k_1)$  делаем замену

$${}^* \tilde{D}_{\nu\nu'}(k + k_1) \Rightarrow -\tilde{Q}_{\nu\nu'}(k + k_1) {}^* \Delta^l(k + k_1),$$

где правая часть, с учетом (A.10) и (A.9), в явном виде задается выражением

$$-\frac{\tilde{u}_{\nu}(k+k_1) \tilde{u}_{\nu'}(k+k_1)}{\tilde{u}^2(k+k_1)} \frac{1}{(k+k_1)^2 - \Pi^l(k+k_1)}, \quad (6.5)$$

и аналогично для второго пропагатора  ${}^* \tilde{D}_{\nu\nu'}(k_2 - k_1)$ . Вблизи полюса  $\omega \sim \omega_{\mathbf{k}}^l$  продольный скалярный пропагатор  ${}^* \Delta^l(k) = {}^* \Delta^l(\omega, \mathbf{k})$  ведет себя как (см., например, [21])

$$\begin{aligned}
 {}^* \Delta^l(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 - \Pi^l(\omega, \mathbf{k})} \simeq \frac{Z_l(\mathbf{k})}{\omega^2 - (\omega_{\mathbf{k}}^l)^2} = \\
 &= \frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \left[ \frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{k}}^l} - \frac{1}{\omega + \omega_{\mathbf{k}}^l} \right].
 \end{aligned}$$

Используя данное приближение, получаем, в частности, для первого пропагатора

$$\begin{aligned}
 {}^* \Delta^l(k + k_1) &\simeq -\frac{Z_l(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)}{2\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^l} \times \\
 &\times \left[ \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l} \right] \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

и для второго

$$\begin{aligned}
 {}^* \Delta^l(k_2 - k_1) &\simeq -\frac{Z_l(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)}{2\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^l} \times \\
 &\times \left[ \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l} \right]. \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание приведенные выше выражения (6.3)–(6.7), мы можем выписать искомый вид трехплазмонных вершинных функций:

$$\begin{aligned}
 V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} &= g \left( \frac{d_A}{8} \right)^{1/4} \frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \frac{\epsilon_{\mu_1}^l(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}^l}} \frac{\epsilon_{\mu_2}^l(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}^l}} \times \\
 &\times {}^* \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k, -k_1, -k_2) \Big|_{on-shell} \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} &= g \left( \frac{d_A}{8} \right)^{1/4} \frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \frac{\epsilon_{\mu_1}^l(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}^l}} \frac{\epsilon_{\mu_2}^l(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}^l}} \times \\
 &\times {}^* \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(-k, -k_1, -k_2) \Big|_{on-shell}. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Отметим, что вершинные функции (6.8) и (6.9) описывают существенно различные процессы. Возьмем для примера процесс, который описывается вторым графиком на рис. 1 ( $s$ -канал). Фактически он включает в себя два подпроцесса рассеяния. Первый из них в рамках рассматриваемого приближения можно описать следующим образом (рис. 2): два плазмона с частотами  $\omega_{\mathbf{k}}^l$  и  $\omega_{\mathbf{k}_1}^l$  и волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$  сливаются в вершине 1 в один плазмон с частотой  $\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^l$  и волновым вектором  $\mathbf{k} + \mathbf{k}_1$ , который затем в вершине 2 распадается в два плазмона с частотами  $\omega_{\mathbf{k}_2}^l$  и  $\omega_{\mathbf{k}_3}^l$  и волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$  (рис. 2а). Функция  $1/(\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l)$  играет в классическом гамильтоновом описании роль пропагатора промежуточного «виртуального» состояния коллективных продольных возбуждений, а взаимодействие в вершинах 1 и 2 здесь задается функцией  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$  (6.8).

Второй подпроцесс определяется таким образом (рис. 2б): в вершине 2 происходит трехплазмонный распад — два плазмона с частотами  $\omega_{\mathbf{k}_2}^l$  и  $\omega_{\mathbf{k}_3}^l$ , и волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$  уходят в систему, а третий плазмон с частотой  $\omega_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3}^l$  и волновым вектором

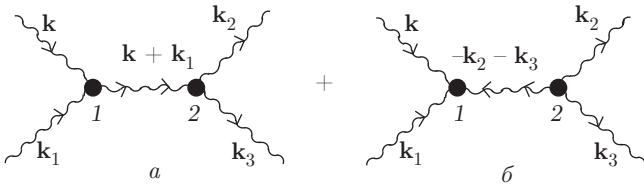


Рис. 2. Подпроцессы четырехплазмонного упругого рассеяния, определяемые процессами трехплазмонных распадов и слияний в  $s$ -канале

$\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$  в вершине 1 сливается с двумя плазмонами с частотами  $\omega_{\mathbf{k}}^l$  и  $\omega_{\mathbf{k}_1}^l$  и волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$ , которые приходят из системы. Роль пропагатора здесь играет функция  $1/(\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l)$ . Взаимодействие в вершинах 1 и 2 определяется функцией  $U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$  (6.9).

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе сделан первый шаг к построению классического гамильтонова формализма для описания процессов нелинейного взаимодействия мягких глюонных возбуждений в высокотемпературной теории поля Янга – Миллса. Построено в явной форме каноническое преобразование (2.10), позволяющее исключить гамильтониан взаимодействия третьего порядка  $\hat{H}_3$  (2.6) и тем самым определить новый эффективный гамильтониан взаимодействия  $\tilde{\hat{H}}_4$  (2.12), с калибровочно-ковариантной амплитудой рассеяния  $\tilde{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{a_1 a_2 a_3}$ . Данный гамильтониан взаимодействия определяет конкретный физический процесс — упругое рассеяние двух бесцветных плазмонов друг на друге. Данный процесс рассеяния будет доминирующим, когда значение амплитуды калибровочного поля имеет порядок [11]

$$|A_\mu(x)| \sim \sqrt{g}T \text{ и, соответственно, } N_{\mathbf{k}}^l \sim \frac{1}{g},$$

фактически отвечающий уровню тепловых флуктуаций в горячей глюонной плазме. Для данного значения амплитуды калибровочного поля при  $g \ll 1$  плотность числа плазмонов  $N_{\mathbf{k}}^l$  является большой, и использование чисто классического описания оправдано. Более того, здесь справедливо использование линеаризованного уравнения Больцмана, вместо точного (2.12), для бесцветных плазмонов, так как распределение Планка, относительно которого измеряется отклонение плотности числа плазмонов  $\delta N_{\mathbf{k}}^l$ , имеет порядок

$$N_{eq}^l(\mathbf{k}) \sim \frac{T}{\omega_{\mathbf{k}}^l} \sim \frac{1}{g}.$$

В этом случае можно говорить, что теория плазмон-плазмонного взаимодействия для малых амплитуд мягких возбуждений является линейной, а нелинейные эффекты, связанные с неравновесными флуктуациями плотности числа плазмонов  $\delta N_{\mathbf{k}}^l$ , могут трактоваться как возмущения.

Ситуация качественно меняется, когда система сильно возбуждена, что может иметь место в столкновениях ультрарелятивистских тяжелых ионов в экспериментах на Большом адронном коллайдере. При увеличении интенсивности возбуждений в глюонной плазме необходимо учитывать дальнейшие члены в разложении  $\hat{H}_{int}$ . Так как процессы нелинейного взаимодействия с участием нечетного числа плазмонов запрещены, то мы можем, в принципе, определяя подходящим образом канонические преобразования, избавиться от всех «нечетных» гамильтонианов взаимодействия  $\hat{H}_{2n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  В предельном случае сильных возбуждений, когда

$$|A_\mu(x)| \sim T \text{ и, соответственно, } N_{\mathbf{k}}^l \sim \frac{1}{g^2},$$

данные канонические преобразования будут содержать бесконечное число членов произвольной степени по операторам рождения  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$  и уничтожения  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$ . Это, в свою очередь, приведет к необходимости учета в правой части кинетического уравнения (4.4) всех высших процессов упругого рассеяния плазмонов:  $3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4, \dots$ , так как все они одного порядка по константе взаимодействия  $g$ . Ясно, что процедура линеаризации кинетического уравнения для плотности числа плазмонов  $N_{\mathbf{k}}^l$  в данном случае становится неприменимой и здесь мы приходим к истинно нелинейной теории взаимодействия мягких глюонных возбуждений в плазме с неабелевым типом взаимодействия.

Таким образом, возникает нетривиальная проблема построения явного вида канонических преобразований. Данные нелинейные канонические преобразования должны приводить исходный гамильтониан взаимодействия к новому эффективному виду:

$$\hat{H}_{int} \longrightarrow \tilde{\hat{H}}_{int} = \tilde{\hat{H}}_4 + \tilde{\hat{H}}_6 + \dots + \tilde{\hat{H}}_{2n+2} + \dots$$

Однако прямой подход в определении явного вида необходимых канонических преобразований, который был использован в данной работе, становится малоэффективным при попытке исключения уже следующего нечетного гамильтониана  $\hat{H}_5$  ввиду чрезвычайной громоздкости вычислений. Для сильновозбужденных состояний, когда мы имеем дело с

бесконечным числом членов, необходим качественно иной, более адекватный в данной ситуации аппарат, например, введение множества нелокальных канонических переменных, зависящих от дополнительного трехмерного единичного вектора, как это было предложено в работе [22]. Другой подход заключается в использовании связи

$$A_\mu^a(k) = A_\mu^{(0)a}(k) + {}^* \tilde{D}_{\mu\nu}(k) \{ \tilde{J}^{(2)av}(A^{(0)}, A^{(0)}) + \tilde{J}^{(3)av}(A^{(0)}, A^{(0)}, A^{(0)}) + \dots \}, \quad (7.1)$$

где  $A_\mu^a(k)$  и  $A_\mu^{(0)a}(k)$  представляют собой взаимодействующее и свободное калибровочные поля системы, а  $\tilde{J}_\mu^{(n)a}(A^{(0)}, A^{(0)}, \dots)$  — некоторые эффективные токи, являющиеся нелинейными функционалами от свободного поля и определяемые рекуррентным образом в рамках приближения жестких температурных петель [11]. Коэффициентные функции в  $\tilde{J}_\mu^{(n)a}$  есть эффективные амплитуды типа (5.3). В качестве взаимодействующего поля необходимо взять выражение (2.1), а в качестве свободного поля — выражение вида

$$\hat{A}_\mu^{(0)a}(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left( \frac{Z^l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} \times \left\{ \epsilon_\mu^l \hat{c}_{\mathbf{k}}^a e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon_\mu^{*l} \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\}$$

с операторами  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^a$  и  $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger a}$ , которые входят в правую часть канонических преобразований (2.10). Соотношение (7.1) фактически содержит в себе искомое каноническое преобразование с любой степенью точности, если использовать соответствующие аппроксимации для пропагаторов типа (6.6), (6.7) и вершинных функций (6.8), (6.9), (5.7) и т. п. Соотношение (7.1) позволяет дать нам совершенно новую интерпретацию канонических преобразований: преобразования (2.10) определяют переход от невзаимодействующего поля  $A_\mu^{(0)a}(k)$  к взаимодействующему  $A_\mu^a(k)$ , которое учитывает все эффекты взаимодействия в среде. Анализ данной связи требует отдельного рассмотрения.

**Финансирование.** Работа Д. М. Гитмана и Ю. А. Маркова поддержана программой повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского государственного университета среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Также работа Д. М. Гитмана частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 18-02-00149), Фондом исследований Сан-Паулу (FAPESP, грант 2016/03319-6) и Национальным Советом по науке (CNPq).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Эффективные вершины и глюонный пропагатор

В данном приложении мы приводим явный вид эффективных вершинных функций и глюонного пропагатора в высокотемпературном приближении жестких температурных петель (НТЛ) [8, 9].

Эффективная трехглюонная вершина

$${}^* \Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2) \equiv \Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2) + \delta\Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2) \quad (A.1)$$

представляет собой сумму голой трехглюонной вершины

$$\Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2) = g^{\mu\nu}(k - k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_1 - k_2)^\mu + g^{\mu\rho}(k_2 - k)^\nu \quad (A.2)$$

и соответствующей НТЛ-поправки

$$\delta\Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2) = 3\omega_{pl}^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v^\mu v^\nu v^\rho}{v \cdot k + i\epsilon} \times \left( \frac{\omega_2}{v \cdot k_2 - i\epsilon} - \frac{\omega_1}{v \cdot k_1 - i\epsilon} \right), \quad (A.3)$$

где  $v^\mu = (1, \mathbf{v})$ ,  $k + k_1 + k_2 = 0$ ,  $d\Omega$  — элемент телесного угла. Ниже приведены полезные свойства трехглюонной НТЛ-ресуммированной вершинной функции при комплексном сопряжении и перестановке импульсов:

$$\begin{aligned} ({}^* \Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(-k_1 - k_2, k_1, k_2))^* &= \\ &= -{}^* \Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(k_1 + k_2, -k_1, -k_2) = \\ &= {}^* \Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(k_1 + k_2, -k_2, -k_1). \end{aligned} \quad (A.4)$$

Далее, эффективная четырехглюонная вершина

$${}^* \Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2, k_3) \equiv \Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2, k_3) + \delta\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2, k_3) \quad (A.5)$$

есть сумма голой четырехглюонной вершины

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma} = 2g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\sigma\nu} \quad (A.6)$$

и соответствующей НТЛ-поправки

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2, k_3) &= 3\omega_{pl}^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v^\mu v^\nu v^\lambda v^\sigma}{v \cdot k + i\epsilon} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{v \cdot (k + k_1) + i\epsilon} \left( \frac{\omega_2}{v \cdot k_2 - i\epsilon} - \frac{\omega_3}{v \cdot k_3 - i\epsilon} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{v \cdot (k + k_3) + i\epsilon} \left( \frac{\omega_1}{v \cdot k_1 - i\epsilon} - \frac{\omega_2}{v \cdot k_2 - i\epsilon} \right) \right]. \end{aligned} \quad (A.7)$$

Наконец, выражение

$${}^* \tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -P_{\mu\nu}(k) {}^* \Delta^t(k) - \tilde{Q}_{\mu\nu}(k) {}^* \Delta^l(k) - \xi_0 \frac{k^2}{(k \cdot u)^2} D_{\mu\nu}(k) \quad (\text{A.8})$$

представляет собой модифицированный эффектами среды глюонный (запаздывающий) пропагатор в  $A_0$ -калибровке. Здесь «скалярные» поперечный и продольный пропагаторы имеют вид

$${}^* \Delta^t(k) = \frac{1}{k^2 - \Pi^t(k)}, \quad {}^* \Delta^l(k) = \frac{1}{k^2 - \Pi^l(k)}, \quad (\text{A.9})$$

где

$$\Pi^t(k) = \frac{1}{2} \Pi^{\mu\nu}(k) P_{\mu\nu}(k), \quad \Pi^l(k) = \Pi^{\mu\nu}(k) \tilde{Q}_{\mu\nu}(k).$$

Поляризационный тензор  $\Pi_{\mu\nu}(k)$  в приближении жестких температурных петель имеет вид

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = 3\omega_{pl}^2 \left( u^\mu u^\nu - \omega \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v^\mu v^\nu}{v \cdot k + i\epsilon} \right),$$

а продольный и поперечный проекторы определяются, соответственно, следующими выражениями:

$$\tilde{Q}_{\mu\nu}(k) = \frac{\tilde{u}_\mu(k) \tilde{u}_\nu(k)}{\tilde{u}^2(k)}, \quad (\text{A.10})$$

$$P_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu - \tilde{Q}_{\mu\nu}(k) \frac{(k \cdot u)^2}{k^2},$$

где, в свою очередь, лоренц-ковариантный 4-вектор  $\tilde{u}_\mu(k)$  задается формулой (5.5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев, в сб. *Вопросы теории плазмы*, вып. 4, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1964), с. 188–339.
2. Л. Коврижных, ЖЭТФ **49**, 237 (1965).
3. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **51**, 688 (1966).
4. В. А. Липеровский, В. Н. Цыгович, Изв. вузов. Радиофизика **XII**, 823 (1969).
5. V. E. Zakharov, Phys. Rep. **129**, 285 (1985).
6. В. Е. Захаров, Изв. вузов. Радиофизика **XVII**, 431 (1974).
7. А. М. Балк, В. Е. Захаров, в сб. науч. тр. *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, под ред. В. Г. Барьяхтара, В. Е. Захарова, В. М. Черноусенко, Наук. думка, Киев (1990), с. 417–472.
8. J.-P. Blaizot and E. Iancu, Phys. Rep. **359**, 335 (2002).
9. E. Braaten and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. B **337**, 569 (1990).
10. J.-P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. B **417**, 608 (1994).
11. Yu. A. Markov and M. A. Markova, Ann. Phys. **302**, 172 (2002).
12. Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, Москва (1986).
13. V. P. Nair, Phys. Rev. D **48**, 3432 (1993).
14. V. P. Nair, Phys. Rev. D **50**, 4201 (1994).
15. J.-P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. B **434**, 662 (1995).
16. О. К. Калашников, В. В. Климов, ЯФ **31**, 1357 (1980).
17. А. С. Шварц, *Математические основы квантовой теории поля*, Атомиздат, Москва (1975).
18. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).
19. V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria, Phys. Scripta **55**, 528 (1997).
20. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин и др., *Электродинамика плазмы*, Наука, Москва (1974).
21. H. A. Weldon, Phys. Rev. D **58**, 105002 (1998).
22. D. Metaxas and V. P. Nair, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 1249 (2001).