ЖЭТФ, 2020, том 157, вып. 1, стр. 44–62

О ВРЕМЕНАХ И СКОРОСТЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО КВАНТОВОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТУННЕЛИРОВАНИЯ

М. В. Давидович [*]

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Россия

Поступила в редакцию 18 июня 2019 г.,
после переработки 18 июля 2019 г.
Принята к публикации 6 августа 2019 г.

Проведен обзор работ по квантовому туннелированию, описываемому одномерным уравнением Шредингера, а также электромагнитному туннелированию, в которых рассмотрены «сверхсветовые» скорости и времена туннелирования. Для туннелирования приведены интегральные и интегродифференциальные уравнения, на основе которых показано, что сверхсветовых движений быть не может. Рассмотрен и объяснен парадокс Хартмана. Показано, что в стационарном и нестационарном квантовом туннелировании скорость прохождения барьера частицей из потока равна скорости ее набегания на барьер, а квазифотоны внутри любого слоя вещества переносят энергию всегда с досветовой скоростью. Однако говорить о времени туннелирования отдельной частицей или фотоном бессмысленно.

DOI: 10.31857/S0044451020010058

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрены простейшие одномерные нестационарные задачи туннелирования для электромагнитных волн (ЭМВ) и квантовых частиц, описываемых соответственно одномерными уравнениями Максвелла и одномерным нестационарным уравнением Шредингера (УШ). Это задачи прохождения волновых пакетов (ВП) через области, в которых распространение невозможно, если они бесконечно широкие, но прохождение возможно для конечных областей. Такие области создают конечное затухание, которое для ЭМВ является радиационным и связано с отражением. В частности, запрещенные зоны в фотонных кристаллах возникают в результате брэгговских отражений. Но для ЭМВ возможно и диссипативное затухание, влияющее на туннелирование (диссипативное затухание для УШ связано с наличием стоков, т. е. с уменьшением числа частиц в потоке, что мы рассматривать не будем, как не будем рассматривать и многочастичное УШ с переменным числом частиц). Для ЭМВ сильно диссипативное туннелирование часто имеет место и требует рассмотрения. Для квантового туннелирования затухание связано с интерференцией волн де Бройля. ВП (также цуг или импульс) представляет собой нестационарную волну, поэтому задача состоит в решении проблемы распространения импульса или ВП [1, 2], но только при наличии границ раздела и неоднородности среды (для УШ соответственно локальной неоднородности потенциала). В обобщенном смысле следует говорить о времени и скорости распространения ВП, скорости переноса энергии и сигнала. Для простоты считаем, что указанный участок лежит в области $0 \leq z \leq d$. Вне этой области частица движется как свободная, а ЭМВ движется в вакууме. Для УШ вводим потенциал $V(z,t)$, а среду описываем диэлектрической проницаемостью (ДП) $\varepsilon(z,t)$. В нестационарном случае это ядро интегрального оператора, для которого можно получить спектральную ДП $\varepsilon(z,\omega)$. Такая постановка актуальна не только для туннелирования, но и для других приложений. В общем случае она определяет одномерную задачу рассеяния ВП.

Квантовое туннелирование — один из основных эффектов квантовой теории, который широко используется в различных областях, в частности, при создании источников электронов в автоэмиссионных электронных пушках вакуумной электроники, в плоских экранных панелях, устройствах с прыжковой проводимостью, туннельных диодах и транзисторах, приборах на эффекте Джозефсона и в ряде

[*] E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

других устройств [3–10]. Для всех них важно время пролета или время туннелирования через потенциальный барьер. Этот вопрос имеет место и для ЭМВ [11–13]. Он возник сразу после работ Г. А. Гамова, Р. Гёрни и Э. Кондона (1928), а затем Ф. Т. Смита [14], Т. Е. Хартмана [15], Дж. Р. Флетчера [16], М. Буттикера и Р. Ландауэра [17] и ряда других публикаций (см., например, обзоры в работах [18–36]). Известен парадокс Хартмана [15] (в большинстве работ он обозначен как эффект), заключающийся в насыщении времени туннелирования Бома – Вигнера τ_{BW} с ростом ширины барьера, когда возможно неравенство $\tau_{BW} < \tau_c = d/c$, т. е. сверхсветовое туннелирование. За последние несколько десятилетий после работы [15] введен ряд различных времен (см. [17–22, 26, 29, 31–33]), в том числе и комплексных, описывающих процессы туннелирования, но ни одному из них в литературе не отдается явное предпочтение [33]. Известны времена Буттикера – Ландауэра, Поллака – Миллера, ларморово время, различные времена пребывания (dwell time), взаимодействия, отражения и прохождения. Утверждается, что «эффект Хартмана» обнаружен и для туннелирования ЭМВ, и на протяжении последних десятилетий регулярно появляются публикации о распространении света «быстрее света» (см., например, [10–13, 20–26, 29]). Имеются публикации по нулевому времени туннелирования [37] и даже по отрицательному времени задержки [38–43]. На основании рассуждения об отрицательной групповой скорости (ГС) в ряде работ приводятся утверждения о появлении сигнала на выходе до его появления на входе и о сверхсветовой передаче информации. Абсурдность таких выводов показана в работе [44]. К настоящему времени имеется несколько сотен работ, где рассматривается сверхсветовое туннелирование, причем из них более сотни публикаций в самых престижных журналах.

Цель данной работы состоит в получении уравнений для нестационарного туннелирования и в доказательстве отсутствия сверхсветовых движений ВП. Как будет показано, они являются интегральными уравнениями (ИУ) или интегродифференциальными уравнениями (ИДУ). Сложность нестационарного туннелирования состоит в нелокальности [19, 45–47], проявляющейся в том, что пакет всегда существует во всем пространстве, в расплывании ВП и в его раздвоении за счет дифракции. Часто утверждается об однофотонном туннелировании в эксперименте, при этом используется источник с параметрическим понижением частоты: исходный родительский фотон, взаимодействуя с нелинейной средой, расщепляется на два с половинными энергиями, и опорный фотон служит для интерференционного детектирования в HOM интерферометре «фотона», туннелирующего через барьер (см., например, [11,12]). Сразу следует сказать, что прошедший многослойное зеркало из фотонного кристалла или туннель «фотон» не является исходным одиночным фотоном. Это поляритон или квазифотон — квазичастица, испытавшая многократные акты рассеяния (поглощения и испускания) на атомах вещества. «Фотон», прошедший с туннелированием многопериодный фотонный кристалл, собирается путем интерференции рассеянных волн или квазифотонов, и использовать интерферометр для его детектирования некорректно.

При стационарном туннелировании времени нет, и можно говорить только о вероятности обнаружения отраженных частиц слева $|R|^2$ и вероятности прохождения $|T|^2$, т. е. обнаружения их справа. В квантовом случае коэффициенты отражения и прохождения удовлетворяют условию $|R|^2 + |T|^2 = 1$. При туннелировании ЭМВ может быть поглощение, и тогда $|R|^2 + |T|^2 < 1$. Стационарное туннелирование на основе одночастичного УШ есть туннелирование потоков невзаимодействующих частиц (когда в разреженном потоке взаимодействием электронов можно пренебречь), поэтому следует задавать плотность частиц в потоке $|A\psi(z)|^2$ в точке z. Если использовать стационарное УШ для одной частицы, то амплитуда A волновой функции (ВФ) в силу нормировки интеграла от $|A\psi(z)|^2$ по бесконечной области на единицу должна быть нулевой, поэтому такую ВФ нормируют на дельта-функцию. Это позволяет говорить только о вероятностях обнаружения частицы $|R|^2$ при $z = -\infty$ и $|T|^2$ при $z = 0$ в бесконечном будущем ($t = \infty$), т. е. в такой постановке бессмысленно говорить о времени туннелирования. Обычно (например, при автоэлектронной эмиссии) реально имеется заданный поток частиц, часто многоскоростной [8]. При туннелировании до барьера и внутри него потоки всегда двунаправленные. Нормировка ВФ на дельта-функцию означает $|A\psi(z)|^2=1$, т. е. эквивалентна нормировке падающего потока на единицу — на единичную плотность частиц в падающем потоке. В односкоростном потоке можно ввести скорость частиц. В многоскоростном потоке это сделать сложнее и нужно использовать ВФ со спектром, т. е. ВП. ВП обычно также многоскоростной, за исключением падающего из вакуума электромагнитного ВП, движущегося со скоростью света c. Но уже при отражении такой пакет становится двускоростным и состоит из двух противоположно направленных потоков. В среде с дисперсией электромагнитный ВП также многоскоростной.

Стационарное туннелирование электронов внутри прямоугольного потенциального барьера описывается ВФ $\psi(z) = A^+ \exp(-k''z) + A^- \exp(k''z)$, где $k'' = \sqrt{\mu_e(V-\mathcal{E})/\hbar^2}$, $A^\pm = T(1 \mp i\kappa)\exp(\pm k''d)/2$, $\kappa = \sqrt{\mathcal{E}/(V-\mathcal{E})}$, $\mu_e = 2m_e$ — удвоенная масса электрона. Это приводит к постоянному значению плотности потока вероятности

$$j(z) = i\hbar\mu_e^{-1}\left[\partial_z\psi^*(z)\psi(z) - \psi^*(z)\partial_z\psi(z)\right] = v_z|T|^2,$$

где $v_z = \sqrt{2\mathcal{E}/m_e}$ — скорость набегающих частиц. Эта величина непрерывна, поэтому следует говорить, что скорость частиц в прямых потоках равна v_z, а в обратных равна $-v_z$ (с учетом того, что плотность в отраженном потоке есть $|R|^2$). Этот результат можно получить, определяя скорость как $v_\mathcal{E}(z) = j(z)/|\psi(z)|^2$. Для области слева $\psi(z) = \exp(ikz) + R\exp(-ikz)$, $k = \sqrt{\mu_e\mathcal{E}/\hbar^2}$, и зависящую от координаты скорость следует усреднять по нескольким длинам волн де Бройля, что и приводит к выражению $v_z = \sqrt{\mu_e\mathcal{E}}$. Если же брать части волновой функции: либо только падающую, либо только отраженную волны, сразу получаем $\pm v_z$. Внутри барьера

$$v_\mathcal{E}(z) = \frac{v_z}{\operatorname{ch}^2(k''(z-d)) + \kappa^2 \operatorname{sh}^2(k''(z-d))}.$$

Эта скорость движения плотности частиц (плотности вероятности) также не является сверхсветовой, причем $v_\mathcal{E}(d) = v_z$, т. е. частица выходит из барьера с сохранением скорости и энергии. Если энергия частицы $\mathcal{E} = V$, то

$$v_\mathcal{E}(z) = \frac{v_z}{1 + \mathcal{E}\mu_e(z-d)^2/\hbar^2}.$$

В электродинамике этому соответствует область под названием epsilon near zero (ENZ) [48], характеризуемая сверхсветовой (и даже бесконечной при отсутствии диссипации) фазовой скоростью. Вычисляя время прохождения частицей потока барьера путем интегрирования $v_\mathcal{E}^{-1}(z)$ по координате, видим, что оно существенно меньше светового $\tau_c = d/c$, причем с ростом толщины экспоненциально стремится к бесконечности. Стационарное туннелирование ЭМВ описывается уравнением Гельмгольца, совпадающим по форме со стационарным УШ, поэтому и для него нет сверхсветовых скоростей. Интерес представляют скорости и времена при нестационарном туннелировании.

2. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ

Будем решать одномерные уравнения Максвелла вида

$$\begin{aligned} -\partial_z H_y(z,t) &= \partial_t D_x(z,t) + J_x(z,t), \\ \partial_z E_x(z,t) &= -\mu_0\partial_t H_y(z,t), \end{aligned} \tag{1}$$

которые путем дифференцирования второго уравнения по координате с подстановкой в результат продифференцированного по времени первого уравнения сводятся к волновому уравнению

$$\partial_z^2 E_x(z,t) - \mu_0\partial_t^2 D_x(z,t) = \mu_0\partial_t J_x(z,t). \tag{2}$$

Его вид зависит от связи индукции и поля. В пренебрежении временной (частотной) дисперсией имеем мгновенную (локальную по времени) связь $D_x(z,t) = \varepsilon_0\varepsilon(z,t)E_x(z,t)$. Это обычно имеет место для медленных процессов, когда характерные времена изменения много больше обратных резонансных частот вещества. ДП $\varepsilon(z,t)$ часто можно считать медленной функцией времени или не зависящей от него. Далее будем обозначать $E_x = E$, $H_y = H$. Тогда

$$\partial_z^2 E(z,t) - c^{-2}\partial_t^2\left[\varepsilon(z,t)E(z,t)\right] = \mu_0\partial_t J_x(z,t). \tag{3}$$

Зависимость ДП от времени означает параметрическое возбуждение. Как пример такого возбуждения можно рассматривать изменение концентрации носителей в полупроводнике под действием лазерной накачки или путем инжекции. Амплитуда такой накачки должна быть медленной функцией времени [2]. Пренебречь дисперсией можно на весьма низких частотах (для медленно изменяющихся почти статических полей). В общем случае будем писать

$$D_x(z,t) = \varepsilon_0 \int\limits_{-\infty}^{t} \tilde{\varepsilon}(z,t-t')E(z,t')\,dt'. \tag{4}$$

Отсутствию дисперсии соответствует ядро $\tilde{\varepsilon}(z,t) = \varepsilon(z,t)\delta(t)$ интегрального оператора (4). Между ним и спектральной ДП имеет место связь через преобразование Фурье:

$$\tilde{\varepsilon}(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(z,\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega, \tag{5}$$

$$\varepsilon(z,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(z,t)\exp(-j\omega t)\,dt. \tag{6}$$

Для электромагнитных задач используется мнимая единица $j = -i$. В силу аналитичности $\varepsilon(z,\omega)$ в нижней полуплоскости комплексной плоскости ω интеграл (5) равен нулю при $t < 0$ [1, 2], что выражает принцип причинности в (4): отклик в виде поляризации возникает только от предыдущих воздействий поля. В общем случае ДП $\varepsilon(z,\omega) = \varepsilon'(z,\omega) - j\varepsilon''(z,\omega)$ является комплексной, а ее действительная и мнимая части — соответственно четной и нечетной функциями частоты и подчиняются соотношениям Крамерса–Кронига, также выражающим принцип причинности [49] (для плоской монохроматической ЭМВ мы используем зависимость от времени вида $\exp(j\omega t)$, а для ВФ квантовой частицы — $\exp(-i\mathcal{E}t/\hbar)$). Соотношение (4) также будем писать в форме $D_x(z,t) = \varepsilon_0 E(z,t) + P(z,t)$ через поляризацию. Поэтому уравнение (3) можно записать, как в случае вакуума, с правой частью $J(z,t) = \mu_0 \partial_t (J_x(z,t) + \partial_t P(z,t))$. Первый член в скобках соответствует плотности стороннего тока (тока возбуждения), а второй — плотности тока поляризации. Возбуждение весьма удобно для выяснения вопроса о скорости распространения импульса. Если оно задано в конечной области и возникает в некоторый момент, то до этого момента поле отсутствовало, поэтому очень просто решать вопрос о скорости распространения ВП. Все уравнения электродинамики показывают, что максимальная скорость равна c, а возбуждение, возникшее в точке z_0, не может попасть в точку z раньше, чем за время $|z_0 - z|/c$. Уже этого давно и хорошо известного факта вполне достаточно, чтобы не рассматривать туннелирование света быстрее скорости света. Тем не менее, больше сотни подобных публикаций появилось и продолжает появляться в солидных журналах, что требует более детального рассмотрения вопроса. Простейшим можно считать точечный источник $J_x(z,t) = \delta(z - z_0)\delta(t)$. В трехмерном случае точечному источнику соответствует скалярная функция Грина (ФГ) $g(\mathbf{r},t) = (4\pi|\mathbf{r}|)^{-1}\delta(t - |\mathbf{r}|/c)$, описывающая распространение вектор-потенциала [50]. Оно происходит со скоростью света. Эта ФГ есть обратное преобразование Фурье от спектральной скалярной ФГ $G(\mathbf{r},\omega) = (4\pi|\mathbf{r}|)^{-1}\exp(-j\omega|\mathbf{r}|/c)$. В нашем одномерном случае спектральная ФГ есть $G(z,\omega) = -jc\exp(-j\omega|z|/c)/(2\omega)$. Для нее пространственно-временная ФГ выражается через ступенчатую функцию Хевисайда:

$$g(z,t) = \frac{c\chi(t - |z|/c)}{2} = \\ = \frac{-jc}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-1}\exp\left(j\omega(t - |z|/c)\right) d\omega. \quad (7)$$

Здесь интеграл замыкается нижней полуокружностью комплексной плоскости ω. Нетрудно проверить, что эти функции удовлетворяют волновым уравнениям

$$(\nabla^2 - c^{-2}\partial_t^2)g(\mathbf{r},t) = -\delta(\mathbf{r})\delta(t),$$
$$(\partial_z^2 - c^{-2}\partial_t^2)g(z,t) = -\delta(z)\delta(t).$$

Действительно, взяв разложение ФГ в виде

$$g(z,t) = \frac{1}{4\pi^2}\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega,\alpha)\exp(j\omega t - j\alpha z)\,d\omega\,d\alpha \quad (8)$$

и потребовав выполнение этого уравнения, имеем $G(\omega,\alpha) = [-\alpha^2 + \omega^2/c^2]^{-1}$. Подставляя это выражение в (8) и вычисляя интеграл по α методом вычетов, получаем

$$g(z,t) = \frac{-j}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(j\omega t - j\omega|z|)\,d\omega}{\omega/c},$$

т. е. результат, совпадающий с (7). При разных знаках z контур замыкается либо нижней, либо верхней полуокружностями и считается, что имеется бесконечно малая отрицательная мнимая (диссипативная) добавка у k_0, т. е. на полуокружностях выполняется лемма Жордана. Источники в области $-z_1 < z < -z_2$ создают вектор-потенциал

$$\mathbf{A}(z,t) = \mathbf{x}_0 A(z,t) = \\ = \mathbf{x}_0 \int_{-\infty}^{t}\int_{-z_1}^{-z_2} g(z - z', t - t')J_x(z',t')\,dz'dt'. \quad (9)$$

В этой области $P = 0$. Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{A}(z,t) = 0$, имеем $E(z,t) = -\mu_0\partial_t A(z,t)$ или

$$E(z,t) = \frac{c\mu_0}{2}\int_{-z_1}^{-z_2} J_x(z', t - |z - z'|/c)\,dz'. \quad (10)$$

Дифференцирование по верхнему пределу в (9) дает нуль, а дифференцирование функции Хевисайда — дельта-функцию. Соотношение (10) следует и из представления решения (3) через ФГ, если затем проинтегрировать по частям. Задавая источники в указанной области, возникшие в некоторый момент t_0, из (10) видим, что в более поздний момент t в некоторой точке z они не могут появиться раньше, чем через время $|z - z'|/c$. Возьмем локализованный в точке $-z_1$ источник $J_x(z,t) = I(t)\delta(z+z_1)$. По смыслу одномерной задачи это излучающая плоскость диполей с поверхностной плотностью тока $I(t)$. В этом случае $E(z,t) = c\mu_0 I(t - |z+z_1|/c)/2$. Аргумент у функции I должен быть больше t_0, поэтому поле существует только в конечной области, если источник излучает конечное время, скажем, заканчивает действовать в момент t_1. В этом случае в точке источника можно определить спектр $I(\omega)$ функции $I(t)$, который определяет спектр поля $E(z_1,\omega) = c\mu_0 I(\omega)/2$. Этот спектр инфинитный (неограниченный), содержащий бесконечные частоты, но ВП с таким спектром обладает конечной энергией $\mathcal{E}$. Бесконечные частоты нельзя сопоставлять квантам поля, поскольку может случиться, что для некоторой частоты $\mathcal{E} < \hbar\omega$. Часто рассматривают ВП с финитным спектром. Такой ВП всегда делокализован в пространстве и во времени. Это относится и к классическому фотону: его можно представить монохроматической волной. Ее амплитуда должна быть бесконечно мала, чтобы энергия такой волны не разошлась и составила $\mathcal{E} = \hbar\omega$. В плоской монохроматической волне конечной амплитуды имеет место поток фотонов и можно говорить об их плотности на единицу длины и площади, т. е. на единицу объема. Такой фотон может поглотиться веществом путем перехода между уровнями $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ (бесконечно узкими спектральными линиями) с разностью энергий $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \hbar\omega$ за бесконечное время. Конечно, это абстракция, и все реальные процессы являются квазистационарными, т. е. чуть-чуть нестационарными, и происходят за конечное время. При этом существенно внешнее фоновое поле. Описываемый нестационарным УШ атом под воздействием ВП может с определенной вероятностью перейти из одного квазистационарного состояния (до воздействия) в другое (после воздействия). ВП, описывающий фотон, имеет ограниченный спектр вблизи частоты ω с энергией $\hbar\omega$. Такой ВП неограничен в пространстве и во времени, однако на бесконечностях он в силу теоремы Винера – Пэли [45] сильно затухает. Большое значение приобретает теория функций с ограниченным спектром и аналитические свойства ВП с ограниченным спектром, приводящие в силу теоремы Винера – Пэли к целым нелокальным ВФ [19, 45–47]. Для рассеяния важны также аналитические свойства S-матрицы и ФГ [47]. Возбуждению фотона частотой ω_0 можно сопоставить функцию источника $I(t) = I_0\chi(t-t_0)\sin(\omega_0(t-t_0))$ и поле $E(z,t) = c\mu_0 I_0 \chi(t - t_0 - |z+z_1|/c)/2$. Такой источник излучает в обе стороны. Величина $\varepsilon_0 E^2(z,t)$ есть плотность энергии (с учетом магнитного поля). В момент t правая часть цуга окажется в точке $z_2 = -z_1 + c(t-t_0)$. Можно говорить, что площадка единичной площади $S = 1$ источника излучила фотон вправо, если

$$\hbar\omega_0 = \varepsilon_0 S \int\limits_{-z_1}^{-z_1+c(t-t_0)} E^2(z,t)\,dz,$$

поэтому для данной задачи следует говорить о плотности фотонов на единицу площади и длины. Если источник перестал действовать в момент $t_1 = t_0 + \tau$, то следует взять множитель (прямоугольный формфактор) перед синусом в виде двух функций Хевисайда $\chi(t-t_0) - \chi(t_1 - t)$. Спектр такого ВП легко вычисляется и становится весьма узким (почти одночастотным) при большой длительности.

Вопрос о распространении ВП в однородной среде решается с помощью пропагаторной ФГ [1, 2]. В вакууме ВП распространяется как целое со скоростью света, и такой вопрос не возникает. В диспергирующей однородной среде имеет место следующий закон распространения:

$$E(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(z-z_1, t-t')u(z_1,t')\,dt' = \int\limits_{-\infty}^{t} K_0(z-z_1, t-t')u(z_1,t')\,dt'. \quad (11)$$

Здесь для вакуума $K_0(z,t) = \delta(t - z/c)$, для идеальной среды без дисперсии с ДП $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon\delta(t)$ имеем $K_0(z,t) = \delta\left(t - z/(c\sqrt{\varepsilon})\right)$, а для однородной среды с дисперсией $\varepsilon(\omega)$ и постоянной распространения $k(\omega) = \omega\sqrt{\varepsilon(\omega)}/c$ величина $K_0(z,t)$ определяется интегралом [1, 2]:

$$K_0(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(j(\omega t - k(\omega)z)\right)\,d\omega. \quad (12)$$

Пропагаторная ФГ (12) удобна, если ВП с резким фронтом уже задан и движется в среде с дисперсией, а затем туннелирует. Например, для туннелирования на плазменном слое в волноводе импульс до взаимодействия со слоем распространяется по закону (11), для которого ФГ (12) известна и выражается через функции Бесселя [1]. Ее аналитические свойства свидетельствуют, что в диспергирующей диссипативной среде пакет не может двигаться быстрее скорости света [1]. Туннелирование проявляется в неоднородных структурах, поэтому требует других методов анализа. При этом удобно сразу задавать ВП с ограниченным спектром, передний фронт которого можно считать резким. Нерезкий быстро убывающий вперед основной части ВП передний фронт не может быть детектирован, а его энергия бесконечно мала. В работе [2] рассмотрено детектирование огибающей аналитического сигнала. Она имеет быстро убывающий вперед сверхсветовой предвестник, который также не может быть детектирован. Детектор определяет резкий перепад переднего фронта с задержкой на неидеальность. Поэтому рассмотрим пакет с резким фронтом. Это нужно просто для того, чтобы вычислить спектр. Вклад в спектр от предвестника весьма мал, и им обычно пренебрегают. Пусть падающий ВП с резким фронтом в момент $t_0 = 0$ подошел к началу барьера (слоя) $z = 0$. Волну запишем в виде

$$E_0(z,t) = A_0\chi(t - z/c)\sin\left(\omega_0(t - z/c)\right).$$

Если этот цуг полубесконечный, то в момент подхода волна расположена в области $(-\infty, 0)$. Передний фронт резкий, но начинается с нуля. Такой цуг имеет бесконечную энергию, т.е. принципиально многофотонный. Если рассмотреть конечный импульс длительности $\tau_0 = z_0/c$, то следует взять

$$E(z,t) = A_0\left[\chi(t - z/c) - \chi(t + \tau_0 - z/c)\right] \times \\ \times \sin\left(\omega_0(t - z/c)\right).$$

Энергия ограниченного импульса конечна:

$$\mathcal{E} = \varepsilon_0 A_0^2 \int\limits_{-c\tau_0}^{0} \sin^2\left(\omega_0 \frac{z}{c}\right) dz = \\ = \frac{c\varepsilon_0\tau_0 A_0^2}{2}\left(1 + \frac{\sin(2\omega_0\tau_0)}{2\omega_0\tau_0}\right), \quad (13)$$

однако его математический спектр бесконечен. Он полностью определяется сигналом в точке $-z_1$. Естественно, в спектре не могут присутствовать фотоны с энергиями $\omega\hbar > \mathcal{E}$. В этом заключается причина того, почему нельзя использовать ограниченный в пространстве ВП при квантовом туннелировании спектрально ограниченного пакета. Энергия полуограниченного пакета бесконечна, и указанных трудностей не возникает. Однако такой ВП описывает поток фотонов. Неограниченный пакет существует везде во все времена, поэтому для него трудно определять времена прохождения каких-то участков. Это справедливо и для квантового туннелирования на основе УШ. Монохроматическая волна описывает поток фотонов частотой ω_0. В такой волне конечной амплитуды A_0 следует вводить плотность фотонов. Спектральная плотность энергии фотонов описывается спектральной интенсивностью:

$$W(\omega) = \frac{\hbar\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\varepsilon_0 cS|E(\omega)|^2}{\pi} \approx 2\pi A_0^2\varepsilon_0\delta(\omega - \omega_0).$$

Здесь $\Delta\omega$ — эффективная ширина спектра. Интеграл от $W(\omega)$ по положительным частотам дает энергию $\mathcal{E} = \hbar\omega_0$. Такой фотон может быть испущен или поглощен атомом с шириной лоренцевой спектральной линии $\Delta\omega$ за время $\Delta t \sim 1/\Delta\omega$. Эти процессы всегда многочастотные и многочастичные, поскольку атом не изолирован во вселенной, и время жизни его возбужденного состояния зависит в том числе от внешнего фонового поля, соседних частиц, температуры и т.п. Следовательно, система не является замкнутой, а энергия не определена точно. При $\Delta\omega \to 0$ имеем $W(\omega) = \hbar\omega_0\delta(\omega - \omega_0)$. Такой «чистый» фотон — это плоская монохроматическая ЭМВ, определенная в бесконечном пространстве-времени, которая является удобной абстракцией. Фотоны высоких энергий не испытывают дисперсию и проходят пластину или слой со скоростью света за время $\tau = d/c$. Напишем нестационарное ИУ. Слой сказывается на дифракции только как область с током поляризации. Вектор-потенциал поля дифракции определен таким током $J_p(z,t) = \partial_t P = \partial_t(D(z,t) - \varepsilon_0 E(z,t))$ и имеет вид

$$A_x(z,t) = \int\limits_0^d \int\limits_0^t g(z - z', t - t')J_p(z',t')\,dz'dt' = \\ = \frac{c}{2}\int\limits_0^d \int\limits_0^{t-|z-z'|/c} J_p(z',t')\,dt'dz'. \quad (14)$$

Теперь определяем само поле дифракции: $E_d(z,t) = -\mu_0\partial_t A_x(z,t)$, и полное поле: $E(z,t) = E_0(z,t) + E_d(z,t)$. Для плазмы следует найти ядро интегрального оператора ДП в соотношении (4), (6). Оно дается вычислением обратного преобразования Фурье от ДП плазмы:

$$\varepsilon(t) = \delta(t) - \frac{\omega_p^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\omega^2 - j\omega\omega_c)^{-1}\exp(j\omega t)\,d\omega = \\ = \delta(t) - \frac{\omega_p^2}{\omega_c}\chi(t)[1 - \exp(-\omega_c t)]. \quad (15)$$

Поэтому имеем соотношения

$$D(z,t) = \varepsilon_0 E(z,t) - \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_c} \times \\ \times \int\limits_0^t \exp(-\omega_c(t-t'))\, E(z,t')\, dt',$$

$$\partial_t D(z,t) = \varepsilon_0 \partial_t E(z,t) - \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_c} \times \\ \times \left[E(z,t) - \omega_c \int\limits_0^t \exp(-\omega_c(t-t'))\, E(z,t')\, dt' \right],$$

$$J_p(z,t) = -\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_c} \times \\ \times \left[E(z,t) - \omega_c \int\limits_0^t \exp(-\omega_c(t-t'))\, E(z,t')\, dt' \right],$$

$$E_d(z,t) = \frac{\omega_p^2}{c^2} \times \\ \times \int\limits_0^d \int\limits_0^{t-|z-z'|/c} \exp(-\omega_c(t-t'-|z-z'|/c))\, E(z,t')\, dt' dz'.$$

ИУ для однородного плазменного слоя имеет вид

$$E(z,t) = \chi(t-z/c) \left\{ \sin\left(\omega_0 \left(t - \frac{z}{c}\right)\right) + \right. \\ + \frac{\omega_p^2}{c^2} \int\limits_0^d \int\limits_0^{t-|z-z'|/c} \exp\left(-\omega_c \left(t - t' - \frac{|z-z'|}{c}\right)\right) \times \\ \left. \times E(z,t')\, dt' dz' \right\}. \quad (16)$$

В силу своего вида оно дает максимальную скорость туннелирования c. Это ИУ необходимо решать численно. Наиболее интересно рассмотреть пакет в точке d. Момент $t = \tau_c = d/c$ соответствует появлению начала предвестника, начинающегося с нуля: $E(d,\tau_c) = 0$. Затем вклад в это значение дает возбуждение в ближайших точках слоя. Интересно значение поля в этой точке при больших временах. Для них все высокоэнергетические фотоны фронта ушли вперед и остались только фотоны частоты ω_0 (установился монохроматический процесс) [2]. Скорость энергии в стационарной волне в пластине $v_{\mathcal{E}}(z,\omega_0) < c$ будет получена ниже. Время туннелирования τ определяется интегрированием $v_{\mathcal{E}}^{-1}(z,\omega_0)$ по пластине и всегда больше τ_c. Идеальный детектор в этой точке, определяющий момент прихода переднего фронта и работающий без задержки [2], определил бы, что это время больше $\tau + \pi/(2\omega_0)$. Для туннелирования через неоднородный слой следует использовать зависящую от координаты плазменную частоту $\omega_p(z)$. Собственно для туннелирования спектр ВП должен быть ограниченным именно этой частотой: $\omega < \omega_p(z)$. Если это не выполняется, то имеет место туннелирование низкочастотной части ВП и распространение высокочастотной его части. Часто дисперсию реальных разреженных сред моделируют несколькими членами дисперсии Лоренца:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\omega_c}.$$

Для нее оператор $\varepsilon(t)$ просто вычисляется методом вычетов и имеет вид

$$\varepsilon(t) = \delta(t) + \chi(t) \frac{\omega_p^2 \exp(-\omega_c t/2)}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2/4}} \times \\ \times \sin\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2/4}\right).$$

Величины ω_p^2 определяются через силы осцилляторов соответствующих квантовых переходов с частотами ω_0, а величины ω_c и $\tau_c = 1/\omega_c$ отвечают ширинам соответствующих спектральных линий и временам жизни возбужденных состояний. Полагая $\omega_0 = 0$ (не связанные заряды диполя), получаем $\varepsilon(t) = \delta(t) + \omega_p^2 \omega_c^{-1}[1 - \exp(-\omega_c t)]$, что совпадает с (15). Для дисперсии Лоренца возможно условие $\varepsilon'(\omega) = \mathrm{Re}(\varepsilon(\omega)) < 0$, при котором в соответствующем обычно узком диапазоне имеет место стационарное туннелирование. Нормируя все частоты на плазменную частоту и обозначая их буквой Ω, видим, что при предельно малой частоте столкновений это область $\Omega_0 < \Omega < \sqrt{1+\Omega_0^2}$, а при конечном времени жизни это область нормированных частот:

$$\left| \Omega^2 - \Omega_0^2 - \frac{1 - \Omega_c^2}{2} \right| \le \sqrt{\frac{(1-\Omega_c^2)^2}{4} - \Omega_0^2 \Omega_c^2}.$$

В случае большой диссипации (малой силы осциллятора), когда $\Omega_c > |1 - \Omega_c^2|/(2\Omega_0)$, область отрицательных значений ДП отсутствует.

Итак, пусть конечный цуг длиной l в момент $t_0 = 0$ его подхода к слою имеет плотность энергии U на единицу площади поперечного сечения. Считая цуг поперечно ограниченным площадью S, имеем энергию $\mathcal{E} = SU$, плотность энергии $W = U/l$ и длительность цуга $\tau_0 = l/c$. В момент $t = -l/c$ цуг подходит к точке $z_1 = -l$. В этой точке известны поле $E(-l, t)$ на всем промежутке сигнала $-l/c \le t \le 0$, спектр $E(\omega)$, энергия U, плотность энергии $\varepsilon_0 E$ и спектральная плотность энергии W соответственно:

$$E(\omega) = \int\limits_{-l/c}^{0} E(-l, t) \exp(-j\omega t)\, dt = \\ = A \int\limits_{0}^{\tau_0} \sin(\omega_0 t) \exp(-j\omega t)\, dt, \quad (17)$$

$$U = \varepsilon_0 \int\limits_{-l}^{0} E^2(z, 0)\, dz = \varepsilon_0 c \int\limits_{-l/c}^{0} E^2(-l, t)\, dt = \\ = \frac{\varepsilon_0 c}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega, \quad (18)$$

$$W(\omega) = \varepsilon_0 c S |E(\omega)|^2/\pi. \quad (19)$$

Такой цуг тем лучше описывает идеальный фотон частоты ω_0, чем больше его длина. В силу теоремы Винера – Хинчина – Колмогорова – Эйнштейна энергия сигнала (18) может быть записана также через его спектр (17). Для спектра имеем

$$E(\omega) = \\ = A \frac{\omega_0 - \exp(-j\omega\tau_0)[\omega_0 \cos(\omega_0\tau_0) + j\omega \sin(\omega_0\tau_0)]}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

а энергия выражается как

$$\mathcal{E} = A^2 \varepsilon_0 c \tau_0 \left[1 - \sin(2\omega_0\tau_0)/(2\omega_0\tau_0)\right]/2.$$

Положим $2\omega_0\tau_0 = n\pi$. Спектральная плотность W имеет максимум на частоте «фотона» и при $n \to \infty$ стремится к $\hbar\omega_0\delta(\omega - \omega_0)$. Наиболее простое выражение имеем при четном n: $W(\omega_0) = \tau_0/c\pi$. Заметим, что при нечетном числе полуволн в спектре присутствуют фотоны нулевой частоты или энергии. Далее считаем, что спектральная задача решена, т. е. определены функции $R(\omega)$ и $T(\omega)$. Отраженный цуг теперь дается спектральным интегралом:

$$E_R(z, t) = \\ = \chi(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\omega) E(\omega) \exp\left(j\omega(t + z/c)\right) d\omega. \quad (20)$$

Если слой дисперсивный, т. е. $\varepsilon(t) \ne \varepsilon\delta(t)$, то длительность цуга (20) может увеличиться за счет хвоста импульса. Аналогично прошедший цуг имеет вид

$$E_T(z, t) = \chi(t - d/c) \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(\omega) E(\omega) \exp\left(j\omega\left(t - (z - d)/c\right)\right) d\omega. \quad (21)$$

В нем образуется предвестник, передний фронт и задний фронт (хвост). Такого одиночного «фотона» не существует. Фотон должен либо пройти «барьер» со скоростью света, либо рассеяться. Многократное рассеяние приводит к возникновению квазифотонов (20), (21). В частности, дисперсия в плазменном слое, или замедление в двойной призме с зазором и нарушенным полным внутренним отражением (НПВО) обусловлены именно этими многофотонными эффектами, т. е. они не могут проявляться для одиночного фотона. Момент прохода многофотонного цуга следует идентифицировать по времени установления в точке $z = d$ колебаний частоты ω_0. За счет отражения и возможной диссипации спектр прошедшего цуга может измениться. В сильном поле возможны нелинейные эффекты и появление комбинационных частот. Очевидно, интеграл (21) может быть вычислен, а указанный момент установлен. Однако всегда будет иметь место некоторая неопределенность его определения. Очевидно, что $\tau > d/c$, т. е. сверхсветовое туннелирование невозможно. Это определяется полюсами функции $T(\omega)$, которые лежат в верхней полуплоскости. Рассмотренная постановка удобна тем, что можно моделировать почти монохроматический «фотон». В однофотонном эксперименте излучающий атом должен иметь весьма узкую спектральную линию (большое время жизни), причем необходимо сгенерировать направленное на барьер излучение только одним атомом. Для существования такого «фотона» должно выполняться равенство $\tau_0 = 2\hbar\omega_0/(\varepsilon_0 c A^2 S)$, которое определяет время цуга. Здесь S может иметь смысл площади мишени. Такой цуг должен быть существенно длиннее барьера. Возможны процессы детектирования рассеянных фотонов перед и за мишенью. Однако прошедший с многократным переотражением «фотон» не может считаться исходным: он «провзаимодействовал» с веществом: часть цуга отразилась, часть поглотилась, поэтому он имеет другой спектр. Невзаимодействующий фотон — это гамма-квант высокой энергии. Для него любой барьер прозрачен, его скорость равна скорости света, а вероятности его упругого и неупругого рассеяния ничтожно малы.

Получим теперь значения коэффициентов отражения $R(\omega)$ и прохождения $T(\omega)$ для однородной пластины, а также скорость движения энергии монохроматической волны в ней. Это удобно сделать методом сшивания или с использованием метода матриц передачи. Результат имеет вид

$$T = \left[\cos(kd) + j\sin(kd)\left(\tilde{\rho} + \tilde{\rho}^{-1}\right)/2\right]^{-1}, \qquad (22)$$

$$R = R_0 \frac{1 - \exp(-2jkd)}{1 - \exp(-2jkd)R_0^2}, \qquad (23)$$

где $R_0 = (\tilde{\rho} - 1)/(\tilde{\rho} + 1)$ — коэффициент отражения от полубесконечного слоя. Здесь мы ввели нормированные импедансы для падения волны под углом $\theta = \mathrm{arctg}(k_x/k_{0z})$, который задается компонентой волнового вектора k_x: в вакууме $k_{0z} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$, а в пластине $k_z = \sqrt{k_0^2\varepsilon - k_x^2}$. При этом нормированные импедансы имеют вид $\rho_0 = k_{0z}/k_0$, $\rho = k_z/(k_0\varepsilon)$ для E-мод (p-поляризация) и $\rho_0 = k_0/k_{0z}$, $\rho = k_0/k_z$ для H-мод (s-поляризация), а $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$. При нормальном падении $\tilde{\rho} = \rho = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Внутри пластины $E(z) = A^+\exp(-jkz) + A^-\exp(jkz)$, причем $k = k' - jk''$ и имеют место связи

$$k' = k_0\sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}+\varepsilon'}{2}}, \quad k'' = k_0\sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}-\varepsilon'}{2}}.$$

Они показывают, что при малой диссипации, $\varepsilon''^2 \ll \varepsilon'^2$, имеют место соотношения

$$k' = k_0\sqrt{\frac{|\varepsilon'| + \varepsilon''^2/2|\varepsilon'| + \varepsilon'}{2}}$$

и

$$k'' = k_0\sqrt{\frac{|\varepsilon'| + \varepsilon''^2/2|\varepsilon'| - \varepsilon'}{2}},$$

т. е. в режиме распространения ($\varepsilon' > 1$) имеем $k' = k_0\sqrt{\varepsilon'}(1 + \varepsilon''^2/(8\varepsilon'^2))$ и $k'' = k_0\varepsilon''/(2\sqrt{\varepsilon'})$, а в режиме туннелирования ($\varepsilon' < 0$) постоянные распространения и затухания меняются местами: $k' = k_0\varepsilon''/(2\sqrt{\varepsilon'})$, $k'' = k_0\sqrt{\varepsilon'}(1 + \varepsilon''^2/(8\varepsilon'^2))$. Амплитуды волн двух направлений имеют вид $A^\pm = \exp(\pm jkd)T(1 \pm \tilde{\rho})/2$, что позволяет вычислить усредненную за период компоненту вектора Пойнтинга $S_z = \mathrm{Re}(EH^*)/2$ и плотность энергии W. Если слой недиссипативный, то $|R|^2 + |T|^2 = 1$. Если же слой диссипативный, т. е. $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$, то $|R|^2 + |T|^2 < 1$. Полученные соотношения удобны для решения задачи о туннелировании из среды при наклонном падении на воздушный зазор с НПВО, когда угол задается величиной k_x. В бесконечной однородной среде $H_y/E_x = \sqrt{\varepsilon}/Z_0$, $Z_0 = (\varepsilon_0 c)^{-1}$, поэтому $S_z = \mathrm{Re}(E_x H_y^*)/2 = c\varepsilon_0|E_x|^2 k'/(2k_0)$. Если в диссипативной среде нет накопленной потенциальной и кинетической энергии колебаний (например, в дистиллированной воде, описываемой формулой Дебая), то $W = \varepsilon_0\left(\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}\right)|E_x|^2/4$ [51–54], поэтому $v_{\mathcal{E}} = c/\sqrt{\left(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + \varepsilon'\right)/2}$. Без диссипации $v_{\mathcal{E}} = c/\sqrt{\varepsilon'}$. Диссипация уменьшает $|T|$ и увеличивает замедление. Для столкновительной плазмы имеем

$$W = \frac{\varepsilon_0|E|^2}{4}\left[\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2}\right)^2 + \frac{\omega_p^4\omega_c^2}{(\omega^2 + \omega_c^2)^2\omega^2}}\right], \qquad (24)$$

$$S_z = \frac{c\varepsilon_0|E|^2}{2^{3/2}}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2}\right)^2 + \frac{\omega_p^4\omega_c^2}{(\omega^2 + \omega_c^2)^2\omega^2}}}. \qquad (25)$$

Поэтому для скорости энергии получаем [51–54]

$$v_{\mathcal{E}} = 2^{1/2}c\frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2}\right)^2 + \frac{\omega_p^4\omega_c^2}{(\omega^2 + \omega_c^2)^2\omega^2}}}}{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2}\right)^2 + \frac{\omega_p^4\omega_c^2}{(\omega^2 + \omega_c^2)^2\omega^2}}}. \qquad (26)$$

Эти формулы можно записать в свернутом виде:

$$W = \frac{\varepsilon_0|E|^2}{4}\left[2-\varepsilon'+\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}\right],$$

$$S_z = \frac{c\varepsilon_0|E|^2\sqrt{\varepsilon'+\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}}}{2^{3/2}},$$

$$v_{\mathcal{E}} = \frac{2^{1/2}c\sqrt{\varepsilon'+\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}}}{2-\varepsilon'+\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}}.$$

Для слабо диссипативной плазмы $v_{\mathcal{E}} = c\varepsilon''/(2|\varepsilon'| + +2|\varepsilon'|^2+\varepsilon''^2/2)$. При туннелировании в приближении отсутствия диссипации

$$v_{\mathcal{E}} = c\frac{\sqrt{|\varepsilon'|}}{1+|\varepsilon'|} = \frac{c\omega\sqrt{1-\omega^2/\omega_p^2}}{2\omega_p} < c.$$

Заметим, что слабая диссипация возможна только в области $\omega \gg \omega_c$. Вблизи плазменной частоты $\varepsilon' \approx 0$ применять разложение нельзя, и непосредственно из (26) имеем $v_{\mathcal{E}} = c\sqrt{\varepsilon''/2}/(1+\varepsilon''/2) \ll c$. Средой без накопления энергии колебаний можно считать плазму на низких частотах $\omega \ll \omega_c$ [53]. Тогда $\varepsilon(\omega) = -j\omega_p^2/(\omega\omega_c) = -j\sigma\varepsilon_0/\omega$, и из (26) следует $v_{\mathcal{E}} \approx 2c\sqrt{\omega\omega_c}/\omega_p \ll c$. Дисперсия в такой среде обусловлена проводимостью σ. Можно получить аналогичное (26) выражение для $v_{\mathcal{E}}$ в случае дисперсии Лоренца, для которой также $v_{\mathcal{E}} \le c$. Соответствующее громоздкое выражение мы не приводим. В области аномальной отрицательной дисперсии при малой диссипации для такой среды возможен случай $\varepsilon' < 0$ и туннелирование. Отметим, что из дисперсии Лоренца при равной нулю резонансной частоте, $\omega_0 = 0$, (свободные осцилляторы) следует дисперсия плазмы, а предельный переход $\omega_0 \to \infty$, $\omega_c \to \infty$, $\omega_p \to \infty$ (бесконечно жесткие диполи) при условии $\omega_p^2/\omega_0^2 = \kappa$, $\omega_c^2/\omega_0^4/\tau^2$ дает формулу Дебая: $\varepsilon' = 1+\kappa/(1+\omega^2\tau^2)$, $\varepsilon'' = (\varepsilon'-1)\omega\tau$. В бесстолкновительной плазме $v_{\mathcal{E}} = c\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}$, что совпадает с ГС. Ниже плазменной частоты ГС мнимая, т. е. распространение невозможно. Однако туннелирование сквозь слой бесстолкновительной плазмы идет со скоростью меньшей скорости света как ниже плазменной частоты, так и выше нее, если учесть, что плотность потока мощности пропорциональна $|T|^2$. Как при диссипации, так и без нее эта скорость меньше c и зависит от координаты. ГС соответствует скорости распространения энергии, как ее определил У. Гамильтон, только в монохроматической волне и только в абсолютно недиссипативных (консервативных или гамильтоновых) системах и средах, когда выполняются условия теоремы Леонтовича–Лайтхилла–Рытова [55]. Только в этих случаях ГС является действительной величиной, преобразующейся как полярный вектор, т. е. как скорость материальной точки. В полосах непрозрачности, в том числе и внутри барьеров, ГС является величиной кинематической, определяющей скорость движения биений двух бесконечно близких по частоте волн (как ее определил Дж. Г. Стокс) и может быть любой: превышающей c, бесконечной и даже отрицательной (направленной против движения энергии) [56]. Это же относится и к групповому времени запаздывания или времени Бома–Вигнера, которое может стать нулевым и отрицательным [38–44]. Поэтому движение ВП и скорость переноса пакетом энергии, особенно при достаточно широком спектре, не следует отождествлять с ГС.

Поскольку формулы (22), (23) получены сшиванием поперечных компонент, в отсутствие диссипации сразу следует непрерывность $S_z(z)$ во всех точках, включая точки 0 и d, причем $2Z_0S_z(d) = |T|^2$, $2Z_0S_z(0) = (1-|R|^2)$. Обозначая $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}' + j\tilde{\rho}''$, имеем

$$S_z(z) = \frac{c\varepsilon_0|T|^2\left(\rho'\alpha(z)-\rho''\beta(z)\right)}{2},$$

где

$$\alpha(z) = \frac{1}{4|\tilde{\rho}|^2}\times$$
$$\times\left[|1+\tilde{\rho}|^2\exp\left(-k''(z-d)\right)-|1-\tilde{\rho}|^2\exp\left(k''(z-d)\right)\right],$$

$$\beta(z) = \frac{1}{|\tilde{\rho}|^2}\times$$
$$\times\left[\sin\left(2k'(z-d)\right)\left(1-|\tilde{\rho}|^2\right)/2-\tilde{\rho}''\cos\left(2k'(z-d)\right)\right].$$

Считая, что пластина является слоем плазмы, имеем

$$W(z) = \varepsilon_0|T|^2\left(1+\frac{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}-\varepsilon'}{2}\right)\frac{a^2(z)+b^2(z)}{4},$$

$$a(z) = \cos\left(k'(z-d)\right)\left[\operatorname{ch}\left(k''(z-d)\right)-\right.$$
$$\left.-\,\tilde{\rho}'\operatorname{sh}\left(k''(z-d)\right)\right]+\tilde{\rho}''\sin\left(k'(z-d)\right)\operatorname{ch}\left(k''(z-d)\right),$$

$$b(z) = \tilde{\rho}''\cos\left(k'(z-d)\right)\operatorname{sh}\left(k''(z-d)\right)+$$
$$+\sin\left(k'(z-d)\right)\left[\tilde{\rho}'\operatorname{ch}\left(k''(z-d)\right)-\operatorname{sh}\left(k''(z-d)\right)\right].$$

Отсюда получаем скорость энергии

$$v_{\mathcal{E}}(z) =$$
$$= c\frac{\tilde{\rho}'\alpha(z)-\tilde{\rho}''\beta(z)}{\left[1+\left(\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}-\varepsilon'\right)/2\right]\left(a^2(z)+b^2(z)\right)}. \quad (27)$$

Она всегда меньше скорости света. Для идеально прозрачной пластины имеем скорость

$$v_{\mathcal{E}}(z) = \frac{2c}{\varepsilon + 1 + (\varepsilon - 1)\cos\left(2k_0\sqrt{\varepsilon}\,(z-d)\right)} \le c$$

и время туннелирования

$$\tau = \frac{d\left[\varepsilon + 1 + (\varepsilon - 1)\,\mathrm{sinc}\,(2k_0 d\sqrt{\varepsilon}\,)\right]}{2c} \ge \frac{d}{c}.$$

В случае туннелирования через недиссипативный слой с отрицательной ДП

$$E = A^+ \exp(-k'' z) + A^- \exp(k'' z),$$

$$H = -jc\varepsilon_0\sqrt{|\varepsilon|}\,\left(A^+ \exp(-k'' z) - A^- \exp(k'' z)\right),$$

$$k'' = k_0\sqrt{|\varepsilon|}, \quad A^{\pm} = \frac{\exp(\pm k'' d)T}{2}\left(1 \pm \frac{j}{\sqrt{|\varepsilon|}}\right),$$

поэтому имеют место соотношения

$$S_z(z) = \frac{c\varepsilon_0|T|^2}{2}, \quad W = \frac{\varepsilon_0|E|^2(2 - \varepsilon + |\varepsilon|)}{4},$$

$$|E|^2 = \frac{|T|^2}{4}\left[\mathrm{ch}^2\left(k''(z-d)\right) + \frac{\mathrm{sh}^2\left(k''(z-d)\right)}{|\varepsilon|}\right],$$

и для скорости энергии на частоте ниже плазменной получаем

$$v_{\mathcal{E}}(z,\omega) = \\ = \frac{c(\omega_p^2/\omega^2 - 1)}{(\omega_p^2/\omega^2)[\omega_p^2/\omega^2\,\mathrm{ch}^2(k''(z-d)) - 1]} < c. \quad (28)$$

Из (28) следует $v_{\mathcal{E}}(z,\omega_p) = 0$, $v_{\mathcal{E}}(d,\omega) = c(\omega/\omega_p)^2 \le c$, а при $\omega \ll \omega_p$ получаем $v_{\mathcal{E}}(\omega)/c \approx \omega^2/[\omega_p^2\,\mathrm{ch}^2(k''(z-d))]$. Эта скорость очень мала, особенно в начале широкого барьера.

Рассмотрим другой метод решения на основе обратного преобразования Фурье величины $E(z,\omega)T(\omega)$. Она определяет прошедшее поле. Величина (22) определена относительно точки $z = d$, а спектр $E(0,\omega)$ есть спектр падающего импульса перед барьером. Поэтому следует добавить множитель $\exp(-jk_0 z)$ и рассматривать интеграл

$$E_T(z,t) = \frac{1}{2\pi}\times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(0,\omega)T(\omega)\exp\left(j\omega(t - z/c)\right)d\omega. \quad (29)$$

Как видно, его ненулевое значение возникает, только если $t > z/c$, т. е. при рассмотрении точки $z = d$ в момент $t = d/c$. Действительно, $E(0,\omega)$ имеет полюсы на действительной оси частот, а у величины $T(\omega)$ все полюсы лежат в верхней полуплоскости [1, 2]. Смещая при $t < z/c$ контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, получаем равенство нулю интеграла (29).

Теперь рассмотрим вопрос о времени нестационарного туннелирования. Зная поле $E(z,t)$ и $H(z,t)$, можно вычислить $S_z(z,t) = E(z,t)H(z,t)$. Однако получить плотность энергии $W(z,t)$ в общем виде нельзя. Из теоремы Пойнтинга известна только величина $\partial_t W(z,t)$. Поэтому можно вычислить величину

$$W(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \partial_{t'} W(z,t')\,dt'$$

в каждой точке, зная предысторию процесса создания поля источниками или предысторию входа импульса с резким фронтом в точку z. Поэтому можно определить скорость

$$v_{\mathcal{E}}(z,t) = \frac{S_z(z,t)}{\int\limits_{-\infty}^{t} \partial_{t'} W(z,t')\,dt'}.$$

К сожалению, в общем случае нет доказательства того, что эта величина всегда меньше c. Можно только утверждать, что скорость движения резких фронтов для вектора Пойнтинга не превышает c. Соответственно имеем время

$$\tau(t) = \int\limits_0^d \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial_{t'} W(z,t')}{S_z(z,t)}\,dt'dz = \\ = \int\limits_0^d \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{E(z,t')\partial_{t'} D_x(z,t') + \mu_0 H(z,t')\partial_{t'} H(z,t')}{E(z,t)H(z,t)} \times \\ \times dt'dz.$$

Как положено в нестационарной теории, это время зависит от текущего времени.

3. НЕСТАЦИОНАРНОЕ КВАНТОВОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ

Квантовое нестационарное туннелирование есть следствие решения уравнения УШ

$$i\hbar\partial_t\psi(z,t) = \hat{H}\psi(z,t) = \left[\frac{\hat{p}^2}{\mu_e} + V(z,t)\right]\psi(z,t). \quad (30)$$

В уравнении (30) $\hat{p} = -i\hbar\partial_z$ — оператор импульса вдоль оси z, а $\mu_e = 2m_e$. Трудность задачи состоит в том, что ВФ $\psi(z,t)$ нелокальна и существует во всем пространстве. Плотность вероятности обнаружить электрон $|\psi(z,t)|^2$ также является нелокальной функцией, поэтому положение электрона нельзя измерить в точке $z=0$ в момент t_0 перед барьером и затем в точке $z=d$ в момент $t_0+\tau$: каждое такое измерение приводит к коллапсу волновой функции и неопределенности импульса электрона, т. е. опять к его делокализации. Если пакет почти односкоростной (монохроматический), т. е. почти бесконечно протяженный и намного шире барьера, то вопрос о моментах его прохождения тем более остается открытым. Именно в этом случае обычно используют метод стационарной фазы для коэффициента прохождения

$$T=\left[\operatorname{ch}(k''d)-i\operatorname{sh}(k''d)\frac{\tilde{\rho}''-\tilde{\rho}''^{-1}}{2}\right]^{-1},$$

приводящий к времени Бома–Вигнера $\tau_{BW}=\hbar\partial_{\mathcal{E}}\phi$ для фазы $\phi=\arg(T)$:

$$\phi=\operatorname{arctg}\left[\operatorname{th}\left(\sqrt{\mu_e(V-\mathcal{E})}\,\frac{d}{\hbar}\right)\left(\frac{2-V/\mathcal{E}}{2\sqrt{V/\mathcal{E}-1}}\right)\right].$$

Насыщение при большой ширине барьера дает $\tau_{BW}=\hbar/\sqrt{V\mathcal{E}-\mathcal{E}^2}$, что никак не отражает процесс туннелирования. Измерение следует трактовать как введение в момент измерения дополнительного потенциала в (30). Поэтому бессмысленно говорить о времени нестационарного туннелирования ВП. ВП всегда бесконечный, многоскоростной и диспергирующий, т. е. изменяющийся при движении даже без влияния потенциала. При набегании на барьер в нем возникают интерференционные максимумы до того, как главный максимум подошел к барьеру. ВП раздваивается и в нем возникают обратные потоки плотности вероятности перед барьером и внутри него. Поэтому энергетическая скорость $v_{\mathcal{E}}(z,t)=j(z,t)/|\psi(z,t)|^2$ также не определяет скорость движения конкретной частицы. Здесь

$$j(z,t)=i\hbar\mu_e^{-1}\left[\partial_z\psi^*(z,t)\psi(z,t)-\psi^*(z,t)\partial_z\psi(z,t)\right].$$

Однако скорость в стационарном потоке определить можно. В односкоростном стационарном потоке она совпадает со скоростью набегающих частиц даже внутри барьера, где для отрицательной энергии она должна быть мнимой, но при учете отраженного потока зависит от координаты. Если поток набегающих изнутри на барьер электронов (например, на границу катод–вакуум) задан и в момент t_0 начинает меняться анодное напряжение, имеет смысл ставить вопрос о времени запаздывания изменения анодного тока, т. е. о времени туннелирования сквозь барьер.

Обычно задача о туннелировании ставится в бесконечной области. В релятивистской квантовой теории рассеяния интересуются падающими и рассеянными амплитудами при $z=\pm\infty$ в моменты $t=\pm\infty$, а временем взаимодействия обычно не интересуются. Для УШ, однако, ВП при $t\to\infty$ расплывается по бесконечной области. Нестационарное УШ — уравнение не релятивистски ковариантное, поэтому ему могут соответствовать бесконечные скорости. Так, ВФ в виде ВП с фиксированной областью импульсов бесконечна в пространстве [19]. ФГ при появлении в некоторой области плотности вероятности имеет отклик во всей бесконечной области [57]. Соответственно можно ввести пропагаторную ФГ (функцию распространения) $K_0(z,t)=\sqrt{\mu_e/(4i\pi\hbar t)}\exp(iz^2\mu_e/(4\hbar|t|))$ свободного поля ψ [57]. Даже если имеем пространственно-ограниченный в области $a<z<b$ ВП $\varphi(z)$ в момент $t_0=0$, то в момент $t>t_0$ он становится неограниченным:

$$\psi(z,t)=\int\limits_a^b K_0(z-z',t)\varphi(z')\,dz'.$$

Однако ограниченный в пространстве пакет не может быть представлен как интеграл в конечной области импульсов. Мы должны положить

$$\varphi(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}A(k_0)\exp(-ik_0z)\,dk_0. \tag{31}$$

В силу (31) такая «частица» может иметь бесконечные импульсы и энергии, которые «фиксирует» ВФ (31) в области $a\le z\le b$, и при локализации частицы $(a=b)$ имеем

$$|\varphi(z)|^2=\delta(z-a)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\cos(k_0(z-a))\,dk_0.$$

Такую частицу нельзя рассматривать как свободную и набегающую на барьер. Локализация свободной частицы приводит к коллапсу ВФ и невозможна при отсутствии внешних полей. Поэтому свободную частицу следует описывать волновым пакетом с конечной областью импульсов, который не ограничен в пространстве. Чем более узкий спектр, тем более ВП соответствует плоской волне и тем более точно туннелирование будет соответствовать стационарному случаю. Для нестационарного туннелирования частиц следует определить пропагаторную ФГ в области с потенциалом. Она удовлетворяет ИУ [57]

$$G(z,t|z',t') = K_0(z,t|z',t') - i\hbar^{-1} \times \times \iint K_0(z,t|z'',t'')V(z'',t'') \times \times G(z'',t''|z',t')\,dz''dt'', \quad (32)$$

при этом движение «частицы» описывается как

$$\psi(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(z,t|z',t')\psi(z',t')\,dz'dt'. \quad (33)$$

В силу действия потенциала энергия не сохраняется во времени (система не консервативна). Пусть в начальный момент $t_0 = 0$ ВФ представляла собой ВП $\varphi(z,t)$, а потенциал до момента $t_0 = 0$ отсутствовал. Такой пакет в точке $-z_0$ можно взять гауссовым, например

$$\varphi(z,t) = = \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \exp\left(ik(z+z_0) - \frac{i\hbar k^2}{\mu_e}\,t - \frac{(k-k_0)^2}{2\Delta k^2}\right) dk. \quad (34)$$

Он удовлетворяет УШ при $V \equiv 0$ и имеет разброс по импульсам $\pm\Delta p = \pm\hbar\Delta k$, плотность вероятности для которых имеет максимум при $k = k_0$, а его спектральная плотность $\Phi(k) = \exp(-(k-k_0)^2/(2\Delta k))$ начинает меняться при включении потенциала согласно уравнениям (32) и (33). При свободном движении без потенциала она также расплывается в силу многоскоростного движения (34). Это видно при разложении

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \partial_k\omega(k_0)\Delta k + \partial_k^2\omega(k_0)\frac{\Delta k^2}{2}$$

и подстановке в (34). Учитывая, что $\partial_k\omega(k_0) = v_g(k_0)$, $\partial_k^2\omega(k_0) = \partial_k v_g(k_0)$, видим, что к расплыванию пакета приводит дисперсия ГС. Поправка дается на основе функции Эйри [1]. Здесь при $\Delta k \to 0$ можно говорить о локализации в пространстве импульсов (поскольку гауссов формфактор стремится к $\delta(k-k_0)$), а при $\Delta k = \infty$ пакет имеет бесконечные пределы и равномерную плотность распределения по всем импульсам. Для описания широкого в импульсном пространстве (т. е. сильно локализованного по координате) пакета одной ГС явно недостаточно. Более точное описание основывают на нескольких ГС $v_g(k_n) = \hbar k_n/m_e$, взятых для нескольких значений n из спектра [1]. Возьмем теперь пакет в виде

$$\varphi(z,t) = \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \exp\left(ik(z+z_0) - \frac{i\hbar k^2}{\mu_e}\,t - - \frac{|z+z_0||k-k_0|}{2\Delta z\Delta k}\right) dk. \quad (35)$$

Он локализован вблизи точки z_0 и в пространстве импульсов вблизи $\hbar k_0$, но не удовлетворяет УШ свободной частицы. При действии оператора Шредингера $\hat{S} = i\hbar\partial_t + \hbar^2\partial_z^2/\mu_e$ на (35) возникает не нуль, а функция $\varphi'(z,t) = V(z,t)\varphi(z,t)$ в правой части, которую можно связать с неким потенциалом

$$V(z,t) = -\frac{\delta(z+z_0)\varphi_1(z,t) - \varphi_2(z,t)}{\mu_e\Delta z\Delta k\varphi(z,t)},$$

где

$$\varphi_1(t) = \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} |k-k_0| \exp\left(-\frac{i\hbar k^2 t}{\mu_e}\right) dk,$$

$$\varphi_2(z,t) = \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \frac{(k-k_0)^2}{4\Delta z\Delta k} \times \times \exp\left(ik(z+z_0) - \frac{i\hbar k^2}{\mu_e}\,t - \frac{|z+z_0||k-k_0|}{2\Delta z\Delta k}\right) dk.$$

Можно считать, что локализация пакета эквивалентна дополнительному потенциалу воздействия (возникающему, например, при ионизации атома с образованием электрона). Пакет, локализованный в координатном и импульсном пространствах, записываем в виде

$$\varphi(z,t) = \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \exp\left(ik(z+z_0) - \frac{i\hbar k^2}{\mu_e}\,t - - \alpha\frac{|z+z_0||k-k_0|}{2\Delta z\Delta k}\right) dk. \quad (36)$$

Множитель α отвечает за локализацию огибающей. При $\alpha = 0$ имеем локализацию только за счет стационарности фазы. Пакет (36) движется с расплыванием в обе стороны и удовлетворяет неоднородному УШ $\hat{S}\varphi(z,t) = \delta(z+z_0)\varphi_1(z,t) + \varphi_2(z,t)$. Функция $\varphi_2(z,t)$ отличается от (36) множителем $\hbar^2\alpha^2/(4\Delta z^2\Delta k^2\mu_e)$ перед интегралом и множителем $(k-k_0)^2$ под интегралом. Полагая $\alpha = 0$, т. е. $\varphi_2(z,t) = 0$, видим, что ВФ (36) удовлетворяет УШ с потенциалом $V(z,t) = \delta(z+z_0)\varphi_1(z,t)/\varphi(z,t)$, где

$$\varphi_1(z,t) = \frac{2\hbar^2}{\mu_e} \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \left(ik + \alpha \frac{|k-k_0|}{2\Delta z \Delta k} \right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{i\hbar k^2}{\mu_e} t \right) dk.$$

Здесь в момент t_0 в точке $-z_0$ имеет место максимальная (но не полная) локализация, но это возможно только при потенциале, пропорциональном дельта-функции. Наконец, пусть в момент t_0 в точке $-z_0$ имеет место полная локализация частицы. Ее ВФ должна удовлетворять начальному условию $\varphi(z,t_0) = \delta(z-z_0)$ и УШ при $t > t_0$. Поэтому она совпадает с введенной выше пропагаторной ФГ: $\varphi(z,t) = K_0(z-z_0, t-t_0)$. Как видно, небольшое отклонение $t = t_0 + \Delta t$ приведет к делокализации: функция отлична от нуля во всем пространстве при любом Δt. Правда, на больших дистанциях отличие экспоненциально мало. Со временем делокализация увеличивается: пакет расплывается во все стороны. Теперь распространение такого пакета (и любого другого) можно описать этой функцией распространения вида

$$\varphi(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(z-z', t-t')\varphi(z',t')\, dz'.$$

Здесь принципиальна нелокальность: движение из точки z' в момент t' требует интегрирования по всей бесконечной области координат. Часто используют представление ВП с произвольной спектральной амплитудой $A(k)$. В этом случае первое приближение теории дисперсии для узкого по k ВП дает ВФ $\psi(z,t) \approx \tilde{A}(z,t,k_0) \exp(ik_0(z+z_0) - \omega t)$ с огибающей $\tilde{A}(z,t,k_0) = 2A(k_0)\,\mathrm{sinc}((z+z_0) - tv_g(k_0))$. Здесь $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Такая ВФ не локализована, хотя и имеет главный максимум в точке $-z_0$.

В силу суперпозиции ВФ при $t > t_0$ следует искать как сумму решения УШ при $V = 0$

$$\psi_0(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(z-z', t)\varphi(z')\, dz'$$

и решения, обусловленного включением взаимодействия:

$$\psi_V(z,t) = \\ = -i\hbar \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(z,z',t-t')V(z',t')\psi(z',t')\, dz' dt'.$$

В результате получаем ИУ для ВФ:

$$\psi(z,t) = \psi_0(z,t) + \psi_V(z,t). \qquad (37)$$

Действуя на его левую и правую части оператором $\hat{S}$, видим, что $\psi(z,t)$ удовлетворяет УШ (30).

Итак, можно обеспечить довольно хорошую локализацию частицы в заданный момент с некоторым разбросом импульсов вокруг среднего, когда взаимодействие не включено, и посмотреть, как такая «частица» подойдет к области барьера. При движении ВП расплывается и расширяется на всю область, а также интерферирует с барьером уже до подхода главного максимума. Поэтому необходимо определить некую границу пакета, и при ее приближении включить барьер. Использовать для этого максимум не очень удобно, это не отражает постановку задачи. Возможно плавное и резкое включение барьера. Затем следует использовать пропагаторную ФГ G и формулу (33). Решение требует вычисления сложных интегралов и может быть получено только численно. Часто используется диаграммная техника и теория возмущений [57]. Заметим, что в работе Хартмана [15] потенциал считался стационарным, а пакеты вне барьера удовлетворяли УШ свободной частицы, что неверно. Максимум движется со скоростью $v_z = \hbar k_0/m_e$, но при его подходе к барьеру возникают отражения, интерференция, и может возникнуть несколько максимумов. Тем не менее, момент его подхода можно интерполировать по скорости. Зная время стационарного туннелирования, можно определить примерное время прохода максимума к барьеру. Пропагаторная ФГ позволяет приближенно определить максимум на выходе спустя некоторое время. Это время должно быть больше, чем необходимо для прохода барьера со скоростью v_z. По положению максимума и скорости v_z можно рассчитать и время туннелирования. Следует, правда, отметить, что туннелирование искажает спектральный состав выходного пакета: для больших k прохождение (прозрачность) обычно выше. За выходной спектр ответственна функция $T(\omega)$. Определение потока, спектра и всех связанных с ними величин имеет смысл только по области за барьером, где поток однонаправленный. Приведенная схема, наверное, наиболее естественна для введения скорости и времени нестационарного туннелирования. По-видимому, результат будет близок к результату среднего времени и скорости в стационарной задаче.

Рассмотрим введение энергетической скорости $v_{\mathcal{E}}$. Решив ИУ (19), определяем

$$j(z,t) = \frac{1}{i\hbar\mu_e} \left[\partial_z \psi^*(z,t)\psi(z,t) - \psi^*(z,t)\partial_z\psi(z,t) \right],$$

$$v_{\mathcal{E}}(z,t) = \frac{j(z,t)}{|\psi(z,t)|^2}.$$

Эта скорость (как и положено в нестационарном случае) зависит от координаты и времени и может быть определена в любой области, включая барьер. Ее можно усреднить по области барьера: $\overline{v}_{\mathcal{E}}(t)$, и тогда она зависит только от времени. Целесообразно определить время туннелирования как

$$\tau(t) = \int\limits_0^d \frac{dz}{v_e(z,t)}.$$

Это время есть функция времени, и оно же определяет время пребывания (dwell time). Следует искать момент времени t_{min}, когда время туннелирования минимально. Можно говорить о некоторой средней скорости $\langle v_{\mathcal{E}}\rangle$ и о среднем времени туннелирования $\overline{\tau} = d/\langle v_{\mathcal{E}}\rangle$, если усреднить $\overline{v}_{\mathcal{E}}(t)$ около этого момента:

$$\langle v_{\mathcal{E}}\rangle = \frac{1}{\tau_{min}} \int\limits_{t_{min}-\tau_{min}/2}^{t_{min}+\tau_{min}/2} \overline{v}_{\mathcal{E}}(t)\,dt.$$

Из-за переотражений от границ ВФ внутри не исчезает резко со временем, и неограниченные пределы интегрирования могут искажать время туннелирования. При прохождении конечного ВП ЭМВ через пластину из-за бесконечных переотражений возникают бесконечные хвосты у прошедшего и отраженного импульсов, а в области пластины — затухающие колебания.

4. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЙ ПОДХОД К КВАНТОВОМУ ТУННЕЛИРОВАНИЮ

Пусть до момента $t_0 = 0$ имелся стационарный прямоугольный барьер $V(z) = V_0 > E$, падающий поток электронов с энергией $\mathcal{E}$ и единичной плотностью $|\psi^+(z)|^2 = 1$, были известны коэффициенты отражения $R(\mathcal{E})$ и прохождения $T(\mathcal{E})$, а также волновая функция $\psi(z) = A^+\exp(-k''z) + A^-\exp(k''z)$ в области $0 \le z \le d$, слева $\psi(z) = \exp(ikz) + R\exp(-ikz)$ и справа $\psi(z) = T\exp(ik_0(z-d))$ от барьера. В нее входят следующие величины:

$$A^{\pm} = \frac{T(1\mp i\kappa)\exp(\pm k''d)}{2}, \quad T = |T|\exp(i\phi),$$

$$k'' = \sqrt{\frac{\mu_e(V-\mathcal{E})}{\hbar^2}}, \quad \kappa = \rho'' = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{V-\mathcal{E}}},$$

$$k = \frac{\sqrt{\mu_e\mathcal{E}}}{\hbar}.$$

Пусть в момент $t_0 = 0$ на время τ включается переменный потенциал $U(z,t)$. Задачу нельзя решать раздельно, т. е. порознь удовлетворяя УШ в трех областях и сшивая решение (в этом была одна из ошибок Хартмана). Как можно показать, такое решение в области барьера в виде

$$\psi(z,t) = \exp\left(-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar}\right)\left[\psi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\cos(n\pi z/d)\right]$$

позволяет получить дифференциальные уравнения для $a_n(t)$ и их решения, но приводит к противоречию при сшивании ВФ. Будем искать решение в виде суперпозиции во всей области: $\psi(z,t) = \exp(-i\mathcal{E}t/\hbar)\psi(z) + \Delta\psi(z,t)$, что в силу линейности дает

$$\psi(z,t) = \exp\left(-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar}\right)\psi(z) + \\ + \int\limits_0^t\int\limits_0^d K_0(z-z',t-t')U(z',t')\psi(z',t')\,dz'dt'. \quad (38)$$

Это ИУ упрощается для постоянного прямоугольного скачка потенциала $U(z,t) = U_0$. В бесконечной области удобно использовать метод возмущений, который можно трактовать как многократное рассеяние на потенциале U_0. В случае однократного рассеяния при $t > \tau$

$$\psi(z,t) = \exp\left(-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar}\right)\psi(z) - i\frac{U_0}{\hbar} \times \\ \times \int\limits_0^\tau\int\limits_0^d K_0(z-z',t-t')\exp\left(-\frac{i\mathcal{E}(t-t')}{\hbar}\right)\psi(z-z')\,dz'dt'.$$

Этот интеграл можно вычислить численно и оценить изменение величины $|\psi(d,t)|^2$ по сравнению с $|T|^2$. Если предположить, что временная зависимость включения потенциала имеет вид дельта-функции $\delta(t)$, то

$$\psi(z,t) = \exp\left(-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar}\right)\psi(z) - i\hbar U_0\exp\left(-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar}\right) \times \\ \times \int\limits_0^d K_0(z-z',t)\psi(z')\,dz'.$$

Для широкого барьера

$$\psi(z) \approx \frac{|T|}{2}\exp(i\phi)(1-i\kappa)\exp\left(-k''(z-d)\right).$$

Теперь следует вычислить интеграл. Оценим его по теореме о среднем в точке $z' = d/2$. Имеем

$$\psi(d,t) = |T| \exp\left(-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar} + i\phi\right) \times \left[1 - \frac{id\hbar^{-1}U_0(1-i\kappa)}{2} \exp\left(\frac{k''d}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\mu_e}{4i\pi\hbar t}} \exp\left(i\frac{d^2\mu_e}{16\hbar t}\right)\right].$$

Этот результат показывает мгновенное изменение волновой функции. Однако он никак не отражает время туннелирования. Потенциал мгновенно воздействует на волну де Бройля внутри барьера и вне его. Как видно, при больших временах волновая функция изменилась. Это изменение связано с воздействием потенциала, изменяющего энергию системы. Наконец, возьмем бесконечно узкий ВП по спектру $\Delta k \to 0$ в свободном от потенциала пространстве: $\psi_0(z,t) = \operatorname{sinc}(\Delta k(z - tv)) \exp(ik_0 z - i\mathcal{E}t/\hbar)$. Здесь $v = \sqrt{\mu_e \mathcal{E}}$ — скорость набегающей частицы. В момент $t = 0$ в точке $z = 0$ имеется максимум $|\psi(z,t)|^2 = 1$, поэтому включив в этот момент на время τ прямоугольный барьерный потенциал V_0, можно посмотреть, где окажется максимум, например, в момент $\tau = d/v$. Имеем

$$\psi(z,\tau) = \psi_0(z,\tau) - i\hbar^{-1}V_0\sqrt{\frac{\mu_e}{4i\pi\hbar}} \times \int_0^\tau\int_0^d \frac{\sin\left(\Delta k[(z-z') - (\tau - t)v]\right)}{\Delta k[(z-z') - (\tau-t)v]} \times \exp(i\varphi(z,z',t,\tau))\, dz'dt. \quad (39)$$

Фаза φ в (39) равна

$$\varphi(z,z',t,\tau) = \frac{(z-z')^2\mu_e}{4\hbar(\tau - t)} + k_0(z - z') - \frac{E(\tau - t)}{\hbar}.$$

Здесь мы опять использовали первое приближение теории возмущений. Интеграл является быстро осциллирующей функцией. Уже по структуре ВФ (39) видно, что при очень малом V_0 максимум будет определять член $\psi_0(z,\tau)$, т. е. точка максимума $z_0 = d$. При этом возможны любые соотношения между V_0 и $\mathcal{E}$. Применим к вычислению интеграла в (39) метод стационарной фазы. Имеем $\partial_{z'}\varphi(z,z',t,\tau) = 0$, или $z'_s(t) = z + 2\hbar(\tau - t)k_0/\mu_e$. В результате двойной интеграл сводится к одномерному:

$$\frac{d}{2\Delta kv}\int_0^\tau \frac{\sin(2\Delta ktv)}{t} \exp\left(-\frac{2it\mathcal{E}}{\hbar}\right) dt = I_0 - I_1 + \ldots$$

Здесь мы воспользовались малостью Δk, положив $\sin(2\Delta ktv) \approx 2\Delta ktv - 8(\Delta ktv)^3/3 + \ldots$, однако интеграл можно вычислить через интегральную показательную функцию. В результате $I_0 = d(1 - \exp(-2i\tau\mathcal{E}/\hbar))/(2i\mathcal{E}/\hbar)$. Интеграл I_1 вычисляется элементарно, как и следующие поправки, но мы оставим только I_0. В результате получаем

$$\psi(z,\tau) = \psi_0(z,\tau) - d(V_0/\mathcal{E})\sqrt{\frac{\mu_e}{4i\pi\hbar}}\left[1 - \exp\left(-\frac{2i\mathcal{E}\tau}{\hbar}\right)\right].$$

Добавка к ВФ не зависит от z, поэтому максимум остается в точке d, но становится более размазанным. Строгое рассмотрение требует решения ИУ (38), однако и в этом случае скорость движения максимума должна иметь такой же порядок.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Постановка задач о скоростях и временах туннелирования или прохождения каких-то областей должна основываться на правильных определениях. Стационарное туннелирование фотонов — это многофотонный процесс: имеется падающий поток с плотностью фотонов одной частоты. В области барьера или слоя распространяются квазифотоны (поляритоны), с другой фазовой скоростью, которая может превышать c, но скорость переноса ими энергии всегда меньше c. Для определения скоростей важны спектральные свойства линейной среды, $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)$ и $\hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)$, которая в общем случае может быть неоднородной анизотропной (даже бианизотропной), а также правильные выражения для плотности энергии. Спектральные свойства обеспечивают принцип причинности. Параметры рассеяния для неоднородного барьера или слоя получаются как решение ИУ или путем интегрирования волнового дифференциального уравнения типа Гельмгольца [58–60]. Для нестационарного туннелирования следует рассматривать движение ВП, который не является локальным. Здесь важен его спектр. Для ЭМВ ВП может иметь резкий фронт с разрывом, идущим со скоростью света, при этом вся остальная его часть в веществе движется медленнее c. Цуг ЭМВ с конечной энергией принципиально не локализован. Однако и в этом случае движение основной его части не может быть сверхсветовым. Конечный цуг не является однофотонным, а после взаимодействия почти однофотонный цуг уже не является тем исходным (падающим) «фотоном». Поэтому вызывает сомнение сверхсветовое детектирование такого «фотона» в ряде экспериментов, тем более с использованием интерферометров. Также вызывают сомнения публикации типа [61] по сверхсветовому распространению СВЧ через суженные участки волноводов или света через зазор в двойных призмах с НПВО. Картина распространения нестационарных волн в волноводе похожа на движение волн в канале с жидкостью, только она трехмерная (см. [62]). Сужение канала приведет к отражению, прохождению малой части быстрых волн с той же скоростью, а время прохождения основной медленной части импульса только увеличится. Для спектральной задачи можно получить ИУ и функционалы для $R(\omega)$ и $T(\omega)$. Задав приближенно поле на сужении, легко найти их явный вид. Проведя преобразование Фурье, получим прошедший и отраженный ВП. Приближенное решение не меняет полюсы коэффициента прохождения $T(\omega)$, которые лежат в верхней полуплоскости. Это означает, что сигнал не может появиться раньше времени прохождения узкого участка со скоростью света. Дисперсия не может быть без диссипации, которая (как и отражения) меняет спектральный состав цуга и приводит к его расплыванию. Детектирование ВП требует определения его огибающей на основе аналитического сигнала. Время прихода переднего фронта следует определять как время максимума производной огибающей (максимальной крутизны фронта). Туннелирование есть интерференция процессов многократных отражений и прохождений слоя или барьера с досветовой скоростью, что не может приводить к результирующим сверхсветовым скоростям.

ВФ электрона и другой частицы, описываемой нестационарным УШ, не локализована в координатном и в импульсном пространствах, а также и во времени. Строго определить скорость движения и время туннелирования отдельной частицы нельзя. Ее описание ВП является приближенным в том смысле, что ни координата, ни импульс точно не заданы. Пакет начинает сильно интерферировать с образованием нескольких максимумов уже при подходе к барьеру и разделяется на два пакета, идущих с расплыванием в разные стороны после «туннелирования». Туннелирует не частица, а ВП и плотность вероятности, что означает возможность нахождения частиц при серии одинаковых экспериментов в состояниях $z = \pm\infty$ в отношении $|T/R|^2$. Возможно определение скоростей максимумов отраженного и прошедшего пакетов вдали от барьера, или максимума производной их огибающей в некой точке конфигурационной плоскости (z,t), что нельзя сделать аналитически. Необходимо численное моделирование, в том числе и на основе приведенных уравнений. Для произвольного барьера не очевидно, что имеет место один максимум $|\psi(z,t)|^2$ в области $0 < z < d$. Определение времен стационарного туннелирования на основе комплексного коэффициента $T(\omega)$ бессмысленно, так же как и для квазистационарного односкоростного (длинного) пакета. Чем больше длина пакета, тем точнее он соответствует частице, но когда длина существенно превышает d, говорить о каких-то временах нереально. В этом и проявляется корпускулярно-волновой дуализм. Фазу $T(\omega)$ для простоты определяют относительно конца слоя, т. е. с точностью до kd относительно начала, что дает множитель $\exp(-jkd)$. В прозрачной среде он вносит вклад в задержку $\tau = d\sqrt{\varepsilon}/c$. В непрозрачной среде коэффициент распространения превращается в коэффициент затухания, и этой задержки как бы нет, но ее надо вводить. Однако такая постановка задачи некорректна. Имеет смысл скорость стационарного туннелирования частиц в потоке, которая не является сверхсветовой. Ее следует определять в энергетической трактовке через поток вероятности и его плотность. Соответственно для нее можно ввести время, которое нельзя привязать к туннелированию отдельной частицы. Бессмысленно применять и метод стационарной фазы к выходной амплитуде ВП. Во-первых, ее надо сначала найти как решение ИУ или ИДУ. Как нам известно, ни в одной работе, рассматривающей времена туннелирования, этого сделано не было. Ошибка Хартмана в том, что единую волновую функцию, являющуюся решением нестационарного УШ, он разделил на три подобно тому, как это делается в методе сшивания при решении стационарного УШ. Вторая его ошибка — использование метода стационарной фазы. Во-вторых, следует определить, какую же скорость мы ищем. Принципиально пакет $\psi(z,t)$ расплывающийся и многоскоростной. Можно искать скорость максимума, а можно, например, усредненную энергетическую скорость $\overline{v}(t) = \langle\psi|v_{\mathcal{E}}(z,t)|\psi\rangle/\langle\psi/\psi\rangle$. Скорость $v_{\mathcal{E}}(z,t)$, естественно, следует определять через поток $j(z,t)$ и его плотность $|\psi(z,t)|^2$. Она определяет скорость плотности вероятности. Поскольку справа от барьера поток идет вправо, там для усреднения следует использовать правую от барьера область (d,∞), иначе на скорость будет влиять отраженная от барьера часть ВФ и волны внутри барьера. Определяя спектр $\Phi(k,t)$ части ВФ за барьером, можно усреднять по спектру спектральную энергетическую скорость, т. е. брать средневзвешенную энергетическую скорость многоимпульсного потока. Этот спектр мгновенный, т. е. зависящий от времени. Если исходная ВФ имеет бесконечный пологий возрастающий передний фронт, то основная часть импульса в точке $z = d$ появится спустя некоторое время. Собственно в этой точке и надо определять функцию $\psi(d,t)$, которую следует раскладывать в мгновенный спектр $\Phi(k,t)$. Соответственно скорость будет определяться в этой точке. Полученную волновую функцию с помощью пропагаторной ФГ можно переместить в другую точку (z,t) и определить скорость в ней. Во всяком случае, нестационарная теория должна давать величины, зависящие от координат и времени. Поэтому постановка вопроса о времени туннелирования пакета в целом бессмысленна: это время в каждой точке зависит от текущего времени. То же самое можно делать и для определения скорости внутри барьера. Спектральную энергетическую скорость ЭМВ удобно усреднять по спектру $W(\omega)$ [27]. Однако есть простая формула: $v_e(z,t) = Z_0E^2(z,t)/W(z,t)$. Надо только решить ИДУ для $E(z,t)$ и знать, как найти плотность энергии $W(z,t)$ (см. [51–54]). Это проблема непростая, поскольку из теоремы Пойнтинга известна только величина $\partial_t W(z,t)$, и в общем случае определение $W(z,t)$ требует интегрирования с учетом всей предыстории процесса.

В электронике СВЧ известны приборы — ЛБВ (лампы бегущей волны), работающие в импульсном режиме как в областях прозрачности, так и за их пределами. Во всех случаях сигнал появляется на выходе спустя некоторое время $\tau \sim l/v < l/c$, где l — длина прибора, относительно сигнала на входе. Работа за пределами полосы прозрачности, по сути, является туннелированием волны, которую усиливает электронный поток. И только когда туннельное затухание становится больше усиления, прибор прекращает работу. Недавно исследованы переходные процессы в резонансно-туннельных диодах, не показывающие сверхсветовых движений. В технике СВЧ известны волноводные фильтры на запредельных участках волновода с включением диэлектрических резонаторов. Такие резонаторы, представляющие собой отрезки запредельного волновода, заполненные диэлектриком, поддерживают распространение, тогда как в областях между ними идет туннелирование. Известны гиперболические метаматериалы — периодические структуры, в частности, состоящие из слоев металла и диэлектрика. Во всех таких структурах экспериментально не наблюдалось сверхсветовое распространение. Моделирование на основе стандартных пакетов программ для них тоже не дает таких движений. Принципиально не составляет особого труда поставить весьма точные эксперименты для диафрагмированных отрезков волноводов (в том числе и с запредельными секциями), запитываемых импульсными сигналами, и опровергнуть результаты работ типа [61] о сверхсветовом туннелировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, УФН **118**, 339 (1976).

2. Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман, *Разделение частот в теории колебаний и волн*, Наука, Москва (1983).

3. Ю. Кениг, Х. Шеллер, Г. Шен, УФН **168**, 170 (1998).

4. А. А. Абрикосов, УФН **168**, 683 (1998).

5. В. Н. Мурзин, Ю. А. Митягин, УФН **169**, 464 (1999).

6. Е. С. Солдатов, А. С. Трифонов, В. В. Ханин, С. П. Губин, С. А. Яковенко, Г. Б. Хомутов, УФН **166**, 903 (1996).

7. П. И. Арсеев, В. Н. Манцевич, Н. С. Маслова, В. И. Панов, УФН **187**, 1147 (2017).

8. М. В. Давидович, Р. К. Яфаров, ЖТФ **89**, 1282 (2019).

9. М. Я. Азбель, УФН **168**, 613 (1998).

10. А. Б. Шварцбург, Н. С. Ерохин, УФН **181**, 1212 (2011).

11. A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, Phys. Rev. Lett. **71**, 708 (1993).

12. R. Y. Chiao, P. G. Kwiat, and A. M. Steinberg, arXiv: quant-ph/9501016v1 (1995).

13. A. M. Steinberg, Phys. Rev. A **52**, 32 (1995).

14. F. T. Smith, Phys. Rev. **118**, 1349 (1960).

15. T. E. Hartman, J. Appl. Phys. **33**, 3427 (1962).

16. J. R. Fletcher, J. Phys. **18**, L55 (1985).

17. M. Buttiker and R. Landauer, Phys. Rev. Lett. **49**, 1739 (1982).

18. M. Jonson, in *Quantum Transport in Semiconductors*, ed. by D. K. Ferry and C. Jacoboni, Physics of Solids and Liquids, Springer, Boston, MA (1992), p. 193–238.

19. Л. А. Халфин, УФН **166**, 688 (1996).

20. E. H. Hauge and J. A. Støvneng, Rev. Mod. Phys. **61**, 917 (1989).

21. V. S. Olkhovsky and E. Recami, Phys. Rep. **214**, 339 (1992); arXiv:cond-mat/9802162 (1998).

22. C. A. A. de Carvalho and H. M. Nussenzveig, Phys. Rep. **364**, 83 (2002).

23. H. Winful, Phys. Rev. Lett. **91**, 260401 (2003).

24. H. G. Winful, Phys. Rep. **436**, 1 (2006).

25. H. G. Winful, New J. Phys. **8**, 1 (2006).

26. А. Б. Шварцбург, УФН **177**, 43 (2007).

27. М. В. Давидович, УФН **179**, 443 (2009).

28. В. С. Ольховский, УФН **181**, 859 (2011).

29. E. E. Kolomeitsev and D. N. Voskresensky, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **40**, 113101 (2013).

30. В. С. Ольховский, УФН **184**, 1255 (2014).

31. M. Büttiker, in *Electronic Properties of Multilayers and Low Dimensional Semiconductor Structures*, ed. by J. M. Chamberlain, L. Eaves, and J. C. Portal, Plenum Press, New York (1990), p. 297–315.

32. N. Yamada, Phys. Rev. Lett. **93**, 170401 (2004).

33. Y. Ban, E. Ya. Sherman, J. G. Muga, and M. Büttiker, Phys. Rev. A **82**, 062121 (2010).

34. P. Hraskó, Found. Phys. **33**, 1009 (2003).

35. N. Yamada, Phys. Rev. Lett. **83**, 3350 (1999).

36. J. G. Muga and C. R. Leavens, Phys. Rep. **338**, 353 (2000).

37. L. A. MacColl, Phys. Rev. **40**, 621 (1932).

38. M. W. Mitchell and R. Y. Chiao, Amer. J. Phys. **66**, 14 (1998).

39. N. Borjemscaia, S. V. Polyakov, P. D. Lett, and A. Migdall, Opt. Express **18**, 2279 (2010).

40. J. G. Muga and J. P. Palao, Ann. Physik (Leipzig) **7**, 671 (1998).

41. J. G. Muga, I. L. Egusquiza, J. A. Damborenea, and F. Delgado, Phys. Rev. A **66**, 042115 (2002).

42. X. Chen and C.-F. Li, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **11**, 085004 (2009).

43. A. Dogariu, A. Kuzmich, and L. H. Wang, Phys. Rev. A **63**, 053806 (2001).

44. М. В. Давидович, ЖТФ **82**(3) 15 (2012).

45. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, *Финитные функции в физике и технике*, Наука, Москва (1971).

46. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, *Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике*, Физматгиз, Москва (1962).

47. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).

48. A. Alù, M. G. Silveirinha, A. Salandrino, and N. Engheta, Phys. Rev. **75**, 155410 (2007).

49. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 8, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

50. Л. Фелсен, Н. Маркувиц, *Излучение и рассеяние волн*, Мир, Москва (1978).

51. М. В. Давидович, *Законы сохранения и плотности энергии и импульса электромагнитного поля в диспергирующей среде*, Изд-во Сарат. унив., Саратов (2012).

52. М. В. Давидович, Письма в ЖТФ **32**(22), 53 (2006).

53. М. В. Давидович, ЖТФ **80**(5), 40 (2010).

54. М. В. Давидович, УФН **180**, 623 (2010).

55. С. М. Рытов, ЖЭТФ **17**, 930 (1947).

56. М. В. Давидович, КЭ **47**, 567 (2017).

57. В. Н. Грибов, *Квантовая электродинамика*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва–Ижевск (2001).

58. М. В. Давидович, Радиотехн. и электрон. **55**, 492 (2010).

59. М. В. Давидович, Радиотехн. и электрон. **55**, 105 (2010).

60. М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк, Изв. вузов. ПНД **18**(3), 160 (2010).

61. A. Enders and G. Nimtz, Phys. Rev. B **47**, 9605 (1993).

62. М. В. Давидович, Радиотехн. и электрон. **46**, 1285 (2001).