

ЗАДАЧА ЛАНДАУ – ХАЛАТНИКОВА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

*А. М. Камчатнов**

*Институт спектроскопии Российской академии наук
108840, Троицк, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 мая 2019 г.,
после переработки 27 мая 2019 г.
Принята к публикации 28 мая 2019 г.

Предложен альтернативный способ решения задачи Ландау–Халатникова об одномерной стадии расширения горячей адронной материи, образующейся при столкновениях высокоэнергичных частиц или атомных ядер. Решение уравнений релятивистской гидродинамики методом Римана дает новое представление для потенциала Халатникова, в котором явным образом соблюдается симметрия возникающего течения относительно отражения в центральной плоскости начального распределения материи. Получены новые точные соотношения, описывающие эволюцию плотности энергии в центре распределения и движение границ между общим решением и волнами разрежения. В приближении Ландау найдены распределения частиц по энергиям и скоростям, включающие в себя ранее неисследованные предэкспоненциальные множители.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию И. М. Халатникова

DOI: 10.1134/S0044451019100109

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1950 г. Ферми предположил [1, 2], что при столкновениях высокоэнергичных частиц образуется такое большое число новых частиц, что их длина свободного пробега становится много меньше образующегося облака ядерной (адронной) материи. В результате в этом облаке быстро устанавливается тепловое равновесие и, например, распределение вылетающих из облака частиц по энергиям можно описать с помощью формул статистической механики. Вскоре Померанчук [3] обратил внимание на то, что образующаяся материя расширяется с релятивистскими скоростями и конечные частицы образуются, когда температура в данной точке становится порядка их массы. В работе [4] Ландау указал на то, что при столкновениях ультрарелятивистских частиц возникающее облако ядерной материи в силу лоренцева сокращения длины имеет сначала форму тонкого диска, и поэтому начальная стадия течения имеет преимущественно одномерный характер. Если обозначить начальную толщину диска через $2l$,

а ось x направить по нормали к диску, то уравнения релятивистской гидродинамики упрощаются в предположении об ультрарелятивистских скоростях v течения ($c-v \ll c$, c — скорость света). Ландау нашел асимптотическое решение этих уравнений при $\ln(t/l) \gg 1$, $\ln[(ct-x)/l] \gg 1$ с логарифмической точностью, что позволило ему дать оценку основных параметров течения. В последующие годы теория Ландау послужила основой теории множественного рождения частиц при столкновениях ускоренных до ультрарелятивистских скоростей элементарных частиц и атомных ядер и получила в основном экспериментальные подтверждения (см., например, [5, 6]).

Точное решение для одномерной стадии течения было получено Халатниковым в работе [7]. Рассмотренную им постановку этой задачи можно сформулировать следующим образом. Пусть в начальный момент времени ядерная материя занимает в пространстве слой в области $-l \leq x \leq l$ и имеет температуру $T_0 \gg mc^2$, где m — характерная масса образующих материи адронов (скажем, пионов). При таких ультрарелятивистских температурах естественно предполагать выполняющимся уравнение состояния

$$p = \varepsilon/3, \quad (1)$$

* E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

где p — давление и ε — плотность энергии. Такому уравнению состояния отвечает скорость звука [8]

$$c_s = c \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad (2)$$

не зависящая от параметров среды. На самой начальной стадии расширения слоя от его краев побегут навстречу друг другу автомодельные волны разрежения, центрированные в точках $x = \pm l$. В момент $t_c = l/c_s = \sqrt{3}l/c$ они столкнутся в центре распределения материи в точке $x = 0$, после чего между ними образуется область общего решения уравнений релятивистской гидродинамики, граничащая на своих краях с волнами разрежения. Таким образом, общее решение должно удовлетворять граничным условиям, вытекающим из требования его «сшивки» с волнами разрежения. Халатников доказал [7] важную теорему о том, что одномерное релятивистское течение всегда является потенциальным, и с помощью преобразования годографа свел уравнение для потенциала к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. Это уравнение, часто называемое в контексте релятивистской гидродинамики уравнением Халатникова, математически эквивалентно телеграфному уравнению, которое в случае задач с начальными условиями обычно решается с помощью преобразования Лапласа [9]. Халатников с помощью искусного использования этого метода получил точное решение, удовлетворяющее требуемым граничным условиям, и показал, что оно воспроизводит в соответствующем пределе асимптотическое решение Ландау (см. также работу [10]). Более подробное исследование решения Халатникова было затем проведено в ряде последующих работ [11–13].

Несмотря на изящество решения Халатникова, оно найдено в такой форме, в которой не соблюдается явным образом симметрия течения относительно отражения в плоскости $x = 0$, что затрудняет в некоторых отношениях его исследование. Кроме того, избранный в работе [7] операторный метод решения уравнения Халатникова применим, по видимому, лишь к системам с постоянной скоростью звука и не обобщается на другие задачи, когда уравнение для потенциала течения на плоскости годографа, относящееся в общем случае к классу уравнений Эйлера–Пуассона, имеет переменные коэффициенты. Поэтому в настоящей работе мы используем для решения задачи Ландау–Халатникова альтернативный метод Римана [14–16], применимый к более широкому классу уравнений состояния материи. В частности, в недавней работе [17] этим ме-

тодом было получено решение задачи о расширении бозе-эйнштейновского конденсата при выключении ловушки с прямоугольным потенциалом в виде «ящика». Найденная в настоящей работе форма решения задачи Ландау–Халатникова явным образом отражает симметрию течения. С его помощью получено распределение по быстротам возникающих частиц и найдены точные соотношения, описывающие температуру в центре распределения и траектории движения краев расширяющегося облака материи. Проведено сравнение двух форм решения, подтверждающее их эквивалентность.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Начиная с этого раздела, для упрощения записи формул будем пользоваться системой единиц, в которой скорость света c и начальная температура материи в слое T_0 равны единице. Здесь мы изложим кратко основные факты из релятивистской гидродинамики, чтобы ввести необходимые определения и нужные нам соотношения теории.

2.1. Основные уравнения

Как известно [8, 18], уравнения релятивистской гидродинамики содержатся в законах сохранения релятивистского течения, которые в случае одномерного течения имеют вид

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{01}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T^{01}}{\partial t} + \frac{\partial T^{11}}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где компоненты тензора энергии-импульса T^{ik} равны

$$\begin{aligned} T^{00} &= (\varepsilon + p)u^0u^0 - p, & T^{01} &= (\varepsilon + p)u^0u^1, \\ T^{11} &= (\varepsilon + p)u^1u^1 + p, \end{aligned} \quad (4)$$

u^i — вектор 4-скорости

$$(u^0, u^1) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) = (\text{ch } y, \text{sh } y), \quad (5)$$

и мы ввели быстроту y , связанную со скоростью течения v соотношением $v = \text{th } y$, так что преобразование Лоренца сводится к гиперболическому повороту на «угол» y . После подстановки выражения (5) в (4) и с учетом определения скорости звука $c_s^2 = \partial p / \partial \varepsilon$ приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} & (\text{ch}^2 y + c_s^2 \text{sh}^2 y) \frac{\partial e}{\partial t} + 2(e + p) \text{sh} y \text{ch} y \frac{\partial y}{\partial t} + \\ & + (1 + c_s^2) \text{sh} y \text{ch} y \frac{\partial e}{\partial x} + (e + p)(\text{sh}^2 y + \text{ch}^2 y) \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \\ & (1 + c_s^2) \text{sh} y \text{ch} y \frac{\partial e}{\partial t} + (e + p)(\text{sh}^2 y + \text{ch}^2 y) \frac{\partial y}{\partial t} + \\ & + (\text{sh}^2 y + c_s^2 \text{ch}^2 y) \frac{\partial e}{\partial x} + 2(e + p) \text{sh} y \text{ch} y \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Характеристические скорости этой системы дифференциальных уравнений первого порядка,

$$v_{\pm} = \frac{v \pm c_s}{1 \pm v c_s}, \tag{6}$$

имеют ясный физический смысл: скорость распространения сигнала равна сумме скорости течения и скорости звука согласно релятивистскому закону сложения скоростей, причем звук может распространяться как по течению, так и против него. Не составляет труда найти римановы инварианты, соответствующие этим скоростям [8, 18, 19]:

$$r_{\pm} = y \pm \int_0^{\varepsilon} \frac{c_s d\varepsilon}{\varepsilon + p}, \tag{7}$$

что в случае ультрарелятивистского уравнения состояния (1) дает

$$r_{\pm} = y \pm \sqrt{3} \theta, \tag{8}$$

где мы ввели вместо температуры переменную $\theta = \ln T$ и учли, что из уравнения состояния (1) следует выражение для плотности энергии

$$\varepsilon = T^4. \tag{9}$$

Скорость течения и температура жидкости, выраженные как функции от римановых инвариантов, равны

$$\begin{aligned} v &= \text{th} y = \text{th} \left(\frac{r_+ + r_-}{2} \right), \\ T &= e^{\theta} = \exp \left(\frac{r_+ - r_-}{2\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \tag{10}$$

Гидродинамические уравнения, записанные через римановы инварианты, приобретают простой диагональный вид:

$$\frac{\partial r_{\pm}}{\partial t} + v_{\pm}(r_+, r_-) \frac{\partial r_{\pm}}{\partial x} = 0, \tag{11}$$

где характеристические скорости

$$v_{\pm} = \frac{\text{th}[(r_+ + r_-)/2] \pm 1/\sqrt{3}}{1 \pm \text{th}[(r_+ + r_-)/2]/\sqrt{3}} \tag{12}$$

также весьма просто выражаются через римановы инварианты.

2.2. Волны разрежения

Из уравнений (11), (12) мгновенно следуют решения для волн разрежения. Рассмотрим, например, правый край начального распределения, расположенный при $x = l$. Поскольку в начальном состоянии материя покоится, а температура повсюду равна единице, в начальном состоянии оба римановых инварианта равны нулю. До момента столкновения $t_c = \sqrt{3}l$ правая волна разрежения эволюционирует независимо от левой и параметр l входит в соответствующее решение в форме комбинации $x - l$. Поэтому римановы инварианты в нем могут зависеть лишь от автомодельной переменной $(x - l)/t$. Тогда из (11) немедленно следует, что один из римановых инвариантов должен быть постоянным, а переменная $(x - l)/t$ должна равняться характеристической скорости, соответствующей другому риманову инварианту. В правой волне разрежения скорость течения положительна, т. е. $y > 0$, а температура падает при расширении материи, т. е. $\theta < 0$. Следовательно, в правой волне разрежения должен оставаться постоянным риманов инвариант

$$r_+ = y + \sqrt{3} \theta = 0. \tag{13}$$

Тогда из соотношения

$$\frac{x - l}{t} = v_- = \frac{v - 1/\sqrt{3}}{1 - v/\sqrt{3}} \tag{14}$$

находим распределение скорости течения

$$v = \frac{\sqrt{3}(x - l)/t + 1}{\sqrt{3} + (x - l)/t}, \tag{15}$$

а из (9), (10) и (13) – распределение плотности энергии

$$\varepsilon = \left(\frac{1 - 1/\sqrt{3}}{1 + 1/\sqrt{3}} \frac{1 - (x - l)/t}{1 + (x - l)/t} \right)^{2/\sqrt{3}}. \tag{16}$$

Граница с вакуумом, где $\varepsilon \rightarrow 0$, движется вправо со скоростью света, что неудивительно, так как среда состоит из частиц с тепловыми скоростями, равными в нашем приближении скорости света. В глубь покоящейся среды, на границе с которой $\varepsilon = 1$, волна распространяется со скоростью звука $(x - l)/t = -1/\sqrt{3}$. Аналогичное решение точно так же строится для левой волны разрежения, зависящей от автомодельной переменной $(x + l)/t$. Вдоль нее постоянен риманов инвариант $r_- = y - \sqrt{3} \theta$, что соответствует отрицательной скорости течения с $y < 0$.

2.3. Уравнение Халатникова

После столкновения волн разрежения в момент $t_c = \sqrt{3}l$ при $x = 0$ между ними образуется область общего решения, вдоль которой изменяются x и t оба римановых инварианта r_{\pm} , и нахождение этого решения является более сложной задачей.

Как показал Халатников [7], из законов сохранения (3) следует уравнение

$$\frac{\partial(Tu^1)}{\partial t} - \frac{\partial(Tu^0)}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

означающее, что мы можем ввести такой потенциал $\phi = \phi(x, t)$, что

$$d\phi = T \operatorname{ch} y \cdot dt - T \operatorname{sh} y \cdot dx.$$

Вводя также переменные светового конуса $x_{\pm} = t \pm x$ и переходя от T, y к римановым инвариантам r_{\pm} в качестве независимых переменных, этот дифференциал можно переписать в виде

$$d\phi = A(r_+, r_-) dx_- + B(r_+, r_-) dx_+, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A(r_+, r_-) &= \frac{1}{2} e^{\theta+y} = \\ &= \frac{1}{2} \exp \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) r_+ + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) r_- \right], \\ B(r_+, r_-) &= \frac{1}{2} e^{\theta-y} = \\ &= \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) r_+ - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) r_- \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Следуя Халатникову, мы делаем преобразование Лежандра

$$W = \phi - Ax_- - Bx_+,$$

где переменные W, x_-, x_+ считаются функциями римановых инвариантов, что соответствует известному в газовой динамике преобразованию годографа [8, 19]. В результате получаем

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{2} \left[- \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) Ax_- + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) Bx_+ \right] dr_+ + \\ &+ \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) Ax_- + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) Bx_+ \right] dr_-, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[- \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) Ax_- + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) Bx_+ \right] &= \frac{\partial W}{\partial r_+}, \\ \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) Ax_- + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) Bx_+ \right] &= \frac{\partial W}{\partial r_-}. \end{aligned}$$

Таким образом, если функция $W(r_+, r_-)$ будет найдена, то переменные x, t будут выражены через римановы инварианты:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} e^{-\theta} \left\{ \left(\frac{\operatorname{ch} y}{\sqrt{3}} + \operatorname{sh} y \right) \frac{\partial W}{\partial r_-} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\operatorname{ch} y}{\sqrt{3}} - \operatorname{sh} y \right) \frac{\partial W}{\partial r_+} \right\}, \\ t &= \sqrt{3} e^{-\theta} \left\{ \left(\frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{3}} + \operatorname{ch} y \right) \frac{\partial W}{\partial r_-} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{3}} - \operatorname{ch} y \right) \frac{\partial W}{\partial r_+} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

что даст решение задачи в неявной форме.

Пока что мы решили формально уравнение (17) введением потенциала $W = W(r_+, r_-)$. Чтобы получить уравнение для W , в качестве второго уравнения релятивистской гидродинамики можно использовать закон сохранения энтропии, плотность которой обозначим через σ [8]:

$$\frac{\partial(\sigma u^0)}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma u^1)}{\partial x} = 0. \quad (21)$$

Через римановы инварианты плотность энтропии для жидкости с ультрарелятивистским уравнением состояния выражается формулой

$$\sigma = \frac{4}{3} T^3 = \frac{4}{3} \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (r_+ - r_-) \right]. \quad (22)$$

Умножая уравнение (21) на якобиан $\partial(x, t)/\partial(r_+, r_-)$ и используя формулы (22) и (10), после простых преобразований приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_+ \partial r_-} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\partial W}{\partial r_+} - \frac{\partial W}{\partial r_-} \right) = 0. \quad (23)$$

Записанное вместо r_{\pm} через независимые переменные y, θ , оно было получено Халатниковым [7]. Математически оно эквивалентно известному телеграфному уравнению, для решения которого имеются хорошо разработанные математические методы [9, 15, 16]. Некоторые классы таких решений используются в теории множественного рождения частиц (см., например, [20, 21]). В случае задачи Ландау–Халатникова о расширении слоя, где важную роль играют конкретные граничные условия, весьма удобен, по-видимому, метод Римана, в котором решение сразу записывается через граничные условия задачи. Мы обратимся к этому методу в следующем разделе.

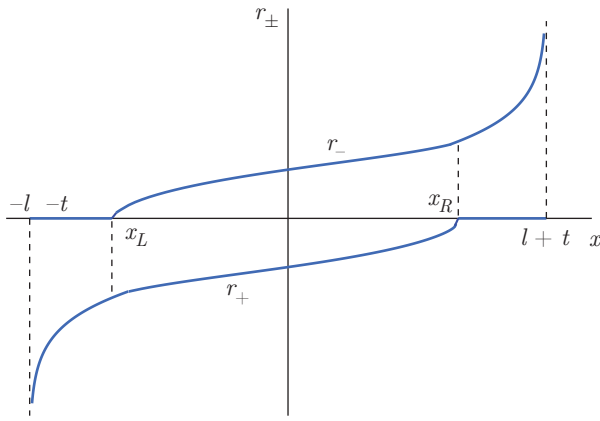


Рис. 1. Зависимости римановых инвариантов r_{\pm} от координаты x в фиксированный момент времени $t > l\sqrt{3}$; x_L и x_R обозначают края общего решения, а $-l-t$ и $l+t$ — границы левой и правой волн разрежения с вакуумом

3. ЗАДАЧА ЛАНДАУ – ХАЛАТНИКОВА

3.1. Граничные условия

Потенциал W , определяющий течение жидкости формулами (20), должен удовлетворять уравнению (23), а также граничным условиям, следующим из «сшивки» общего решения на его краях с волнами разрежения. Если решить уравнения (20) относительно производных $\partial W/\partial r_{\pm}$, то после простых преобразований решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r_-} &= \frac{e^\theta}{2} \left(\operatorname{ch} y - \frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{\operatorname{th} y - 1/\sqrt{3}}{1 - \operatorname{th} y/\sqrt{3}} t \right), \\ \frac{\partial W}{\partial r_+} &= \frac{e^\theta}{2} \left(\operatorname{ch} y + \frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{\operatorname{th} y + 1/\sqrt{3}}{1 + \operatorname{th} y/\sqrt{3}} t \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Графики зависимости римановых инвариантов от координаты x в фиксированный момент времени t показаны на рис. 1. На правой границе общего решения в нуль обращается риманов инвариант r_+ , а на левой — риманов инвариант r_- , где x и t удовлетворяют решениям в виде волн разрежения (см. (14)):

$$\begin{aligned} x - \frac{\operatorname{th} y - 1/\sqrt{3}}{1 - \operatorname{th} y/\sqrt{3}} t &= l, \quad r_+ = 0, \\ x - \frac{\operatorname{th} y + 1/\sqrt{3}}{1 + \operatorname{th} y/\sqrt{3}} t &= -l, \quad r_- = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Подстановка этих формул в (24) дает граничные условия в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r_-} \Big|_{r_+=0} &= \frac{l}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \times \right. \\ &\quad \times \exp \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) r_- \right] + \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) r_- \right] \right\}, \\ \frac{\partial W}{\partial r_+} \Big|_{r_-=0} &= -\frac{l}{4} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \times \right. \\ &\quad \times \exp \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) r_+ \right] + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \times \\ &\quad \left. \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) r_+ \right] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку потенциал W определен с точностью до аддитивной постоянной, мы можем задать его значение $W(0, 0) = 0$ в начале координат на плоскости годографа (r_+, r_-) . Тогда интегрирование уравнений (26) дает окончательную форму граничных условий вдоль границ общего решения с волнами разрежения:

$$\begin{aligned} W(0, r_-) &= \frac{l}{2} \exp \left(\frac{r_-}{2\sqrt{3}} \right) \operatorname{sh} \frac{r_-}{2}, \\ W(r_+, 0) &= -\frac{l}{2} \exp \left(-\frac{r_+}{2\sqrt{3}} \right) \operatorname{sh} \frac{r_+}{2}. \end{aligned} \quad (27)$$

3.2. Метод Римана

Итак, мы должны решить уравнение (23) с граничными условиями (27), заданными на характеристиках $r_+ = 0$ и $r_- = 0$ этого уравнения. В своей основополагающей работе [14] Риман дал следующий метод решения этой задачи. Если нас интересует значение функции W в точке $P = (r_+, r_-)$ (см. рис. 2), то мы проводим на плоскости годографа (r'_+, r'_-) из точки P характеристики PA ($r'_+ = r_+ = \operatorname{const}$) и PB ($r'_- = r_- = \operatorname{const}$), которые вместе с характеристиками AO и OB с известными значениями $W(r'_+, 0)$ и $W(0, r'_-)$ на них образуют замкнутый контур $C = PAOB$ на этой плоскости. Поскольку величины (r_+, r_-) обозначают координаты точки «наблюдения» на плоскости годографа, мы вводим здесь обозначения (r'_+, r'_-) для текущих координат точек вдоль указанного контура. Определим на этой плоскости такой вектор (V, U) , что интеграл $\int_C (V dr'_+ + U dr'_-) = 0$ обращается в нуль, причем компоненты вектора (V, U) зависят как от функции W , удовлетворяющей уравнению (23), так и от другой функции $R = R(r'_+, r'_-; r_+, r_-)$, на которую можно наложить подходящие условия, не изменяя при этом нулевое значение указанного интеграла. Риман указал, что если в качестве таких условий потребо-

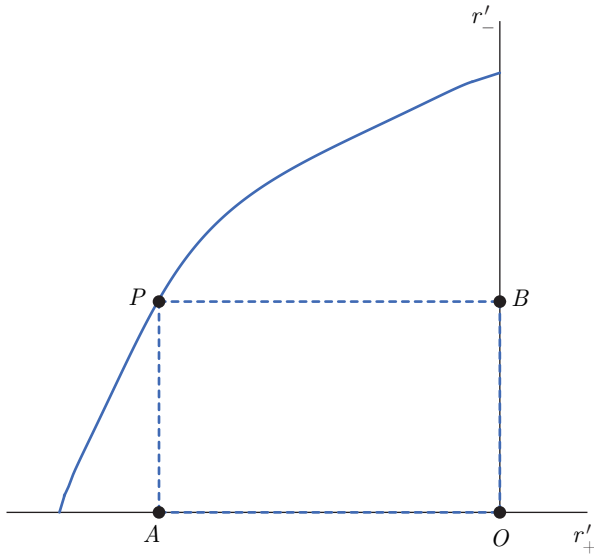


Рис. 2. Кривая римановых инвариантов r_{\pm} на плоскости годографа (r'_+, r'_-)

вать, чтобы функция R удовлетворяла, во-первых, сопряженному уравнению, имеющему в нашем случае вид

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r'_+ \partial r'_-} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\partial R}{\partial r'_+} - \frac{\partial R}{\partial r'_-} \right) = 0, \quad (28)$$

во-вторых, граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial r'_+} - \frac{R}{2\sqrt{3}} &= 0 \quad \text{вдоль } PB, \\ \frac{\partial R}{\partial r'_-} + \frac{R}{2\sqrt{3}} &= 0 \quad \text{вдоль } PA \end{aligned} \quad (29)$$

и, в-третьих, зафиксированному ее значению в точке P ,

$$R(r_+, r_-; r_+, r_-) = 1, \quad (30)$$

то значение W в точке $P = (r_+, r_-)$ будет даваться выражением

$$\begin{aligned} W(P) &= \frac{1}{2}(RW)_A + \frac{1}{2}(RW)_B + \\ &+ \int_A^O V dr'_+ + \int_O^B U dr'_-, \end{aligned} \quad (31)$$

где $A = (r_+, 0)$, $B = (0, r_-)$, $O = (0, 0)$ и U, V выражаются через граничные значения (27) формулами

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left(W \frac{\partial R}{\partial r'_+} - R \frac{\partial W}{\partial r'_+} \right) - \frac{WR}{2\sqrt{3}}, \\ V &= \frac{1}{2} \left(R \frac{\partial W}{\partial r'_-} - W \frac{\partial R}{\partial r'_-} \right) - \frac{WR}{2\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Хотя, на первый взгляд, кажется, что решить уравнение (28) для R ничуть не проще, чем исходное

уравнение (23) для W , но теперь граничные условия (29) оказываются настолько простыми, что функция R , называемая в этой теории функцией Римана, находится в нашем случае без особого труда. Поскольку уравнение состояния (1) аналогично нерелятивистскому изотермическому уравнению состояния Бойля–Мариотта $p = c_s^2 \rho$, в котором изотермическая скорость звука c_s также не зависит от плотности газа ρ , фактически требуемую нам функцию R нашел сам Риман [14], рассмотревший такой газ. Для нашего случая релятивистской гидродинамики она равна

$$\begin{aligned} R(r'_+, r'_-; r_+, r_-) &= \exp \left[\frac{(r'_+ - r_+) + (r_- - r'_-)}{2\sqrt{3}} \right] \times \\ &\times I_0 \left(\sqrt{\frac{(r'_+ - r_+)(r_- - r'_-)}{3}} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента (см., например, [22]; в то время это обозначение еще не было введено в науку, и Риман дал выражение для I_0 в виде степенного ряда).

Имея формулу Римана (31) и выражение для функции Римана (33), нетрудно получить решение для потенциала W . Прежде всего заметим, что подстановка (32) в (31) и элементарное интегрирование по частям с учетом $W(0, 0) = 0$ позволяют преобразовать формулу Римана к виду

$$\begin{aligned} W(P) &= - \int_A^O R \left(\frac{\partial W}{\partial r'_+} + \frac{W}{2\sqrt{3}} \right) dr'_+ + \\ &+ \int_O^B R \left(\frac{\partial W}{\partial r'_-} - \frac{W}{2\sqrt{3}} \right) dr'_-. \end{aligned} \quad (34)$$

Подстановка сюда граничных выражений (27) для W после простых преобразований дает

$$\begin{aligned} W(r_+, r_-) &= \frac{l}{2} \exp \left(\frac{r_- - r_+}{2\sqrt{3}} \right) \times \\ &\times \left\{ \int_{r_+}^0 \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sh} \frac{r}{2} \right) \exp \left(\frac{r}{\sqrt{3}} \right) \times \right. \\ &\times I_0 \left(\sqrt{\frac{(r - r_+)r_-}{3}} \right) dr + \\ &+ \int_0^{r_-} \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sh} \frac{r}{2} \right) \exp \left(-\frac{r}{\sqrt{3}} \right) \times \\ &\left. \times I_0 \left(\sqrt{\frac{-r_+(r_- - r)}{3}} \right) dr \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Вместе с формулами (20) это выражение определяет неявным образом зависимость римановых инвариантов r_{\pm} от x и t , откуда с помощью (10) мы находим и зависимость физических величин от координаты и времени. Полученное выражение для W несколько сложнее, чем аналогичное выражение для потенциала в решении Халатникова [7] (см. ниже разд. 4), но оно инвариантно относительно преобразования $r_+ \rightarrow -r_-, r_- \rightarrow -r_+$, соответствующего изменению знака скорости течения, что означает симметрию течения относительно отражения в плоскости $x = 0$, отсутствующую в выбранной Халатниковым форме решения задачи. Получим конкретные следствия из найденного решения.

3.3. Начальная стадия эволюции области общего решения

При малых временах $t - t_c \ll t_c$ после момента столкновения $t_c = l\sqrt{3}$ волн разрежения римановы инварианты r_{\pm} малы по абсолютной величине и мы можем разложить производные $\partial W/\partial r_{\pm}$ по их степеням:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r_+} &\approx l \left(-\frac{1}{2} - \frac{r_+ + r_-}{2\sqrt{3}} - \frac{r_+^2}{8} \right), \\ \frac{\partial W}{\partial r_-} &\approx l \left(\frac{1}{2} - \frac{r_+ + r_-}{2\sqrt{3}} + \frac{r_-^2}{8} \right). \end{aligned} \tag{36}$$

Тогда из (20) следуют разложения

$$\begin{aligned} x &\approx l(r_+ + r_-) \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{5(r_+ - r_-)}{24} \right), \\ t &\approx l \left(\sqrt{3} + \frac{r_- - r_+}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}(r_+^2 + r_-^2) - \frac{r_+ r_-}{2\sqrt{3}} \right), \quad |r_+|, r_- \ll 1. \end{aligned} \tag{37}$$

В момент зарождения общего решения при $r_+ = r_- = 0$, как и должно быть, имеем $t = l\sqrt{3}$, и при дальнейшей эволюции в центре распределения при $x = 0$ всегда $r_+ = -r_-$ (см. рис. 1).

На правой границе между общим решением и волной разрежения имеем $r_+ = 0$ и получаем закон движения этой границы в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x_R &\approx lr \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{5r}{24} \right), \\ t &\approx l \left(\sqrt{3} + \frac{r}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}r^2 \right), \quad r \ll 1, \end{aligned} \tag{38}$$

т. е., с той же точностью,

$$\begin{aligned} x_R(t) &\approx l \left\{ \frac{t}{l\sqrt{3}} - 1 - 4 \left(\frac{t}{l\sqrt{3}} - 1 \right)^2 \right\}, \\ \frac{t}{l\sqrt{3}} - 1 &\ll 1. \end{aligned} \tag{39}$$

Следовательно, в главном приближении эта граница движется на начальном этапе со скоростью звука.

В центре распределения при $r_- = -r_+ \equiv r$ получаем

$$t \approx l \left(\sqrt{3} + r + \frac{\sqrt{3}}{12}r^2 \right),$$

так что температура материи в этом месте убывает сначала по закону

$$\begin{aligned} T &= \exp \left(-\frac{r}{\sqrt{3}} \right) \approx 1 - \left(\frac{t}{l\sqrt{3}} - 1 \right) + \\ &+ \frac{3}{4} \left(\frac{t}{l\sqrt{3}} - 1 \right)^2, \quad \frac{t}{l\sqrt{3}} - 1 \ll 1. \end{aligned} \tag{40}$$

3.4. Движение границ области общего решения

Поскольку течение симметрично относительно плоскости $x = 0$, достаточно рассмотреть движение правой границы $x_R(t)$, где $r_+ = 0$. Здесь значение $\partial W/\partial r_-|_{r_+=0}$ нам уже известно из граничного условия (26), а вычисление аналогичного предела для $\partial W/\partial r_+$ с помощью решения (35) проводится без особого труда. В результате имеем ($r = r_-$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r_+} \Big|_{r_+=0} &= \frac{l}{2} \exp \left(-\frac{r}{2\sqrt{3}} \right) \times \\ &\times \left[\operatorname{ch} \frac{r}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sh} \frac{r}{2} - 2 \exp \left(\frac{r}{\sqrt{3}} \right) \right], \\ \frac{\partial W}{\partial r_-} \Big|_{r_+=0} &= \frac{l}{2} \exp \left(-\frac{r}{2\sqrt{3}} \right) \times \\ &\times \left(\operatorname{ch} \frac{r}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sh} \frac{r}{2} \right). \end{aligned} \tag{41}$$

Подстановка этих формул в (20) дает параметрический закон движения правой границы:

$$\begin{aligned} x_R &= l \left[1 + \exp \left(\frac{r}{\sqrt{3}} \right) \left(\sqrt{3} \operatorname{sh} \frac{r}{2} - \operatorname{ch} \frac{r}{2} \right) \right], \\ t &= l \exp \left(\frac{r}{\sqrt{3}} \right) \left(\sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{r}{2} - \operatorname{sh} \frac{r}{2} \right). \end{aligned} \tag{42}$$

При малых $r \ll 1$ эти формулы сводятся, естественно, к (38), а при асимптотически больших временах $t/l \gg 1$, когда $r \gg 1$, получаем

$$x \approx l + t - l \left(\sqrt{3} + 1 \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1} \frac{t}{l} \right)^{(2 - \sqrt{3})/(2 + \sqrt{3})}, \tag{43}$$

$t \gg l$.

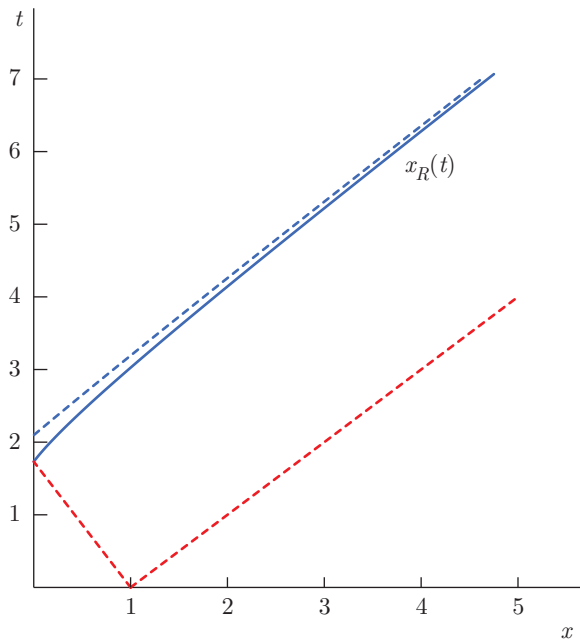


Рис. 3. Сплошной линией показано движение правой границы $x_R(t)$ согласно точным соотношениям (42) с $l = 1$, а штриховой линией — согласно асимптотической формуле (43). Пунктирными линиями показано движение границ правой волны разрежения: ее правый край распространяется в вакуум со скоростью света, а левый край в глубь материи со скоростью звука $1/\sqrt{3}$ до момента столкновения с левой волной разрежения в центре распределения материи при $x = 0$

Как мы видим, хотя эта граница движется со скоростью, близкой к скорости света, она отстает от правой границы волны разрежения с вакуумом по степенному закону. Однако относительная величина области, занимаемой волной разрежения, со временем уменьшается. Легко выписать аналогичные формулы для движения левой границы. Общая картина движения краев волн разрежения и общего решения показана на рис. 3.

Изменение плотности энергии на границе области общего решения естественно искать в зависимости от собственного времени \bar{t} по часам, движущимся вместе с этой границей:

$$\bar{t} = \int_{\sqrt{3}l}^t dt \sqrt{1-v^2} = \int_0^r \frac{dt/dr}{\text{ch}(r/2)} dr \approx \approx l \frac{\sqrt{3}+1}{2} \exp\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right), \quad (44)$$

где $t = t(r)$ выражается второй формулой (42) и $r = -2\sqrt{3}\theta$. Следовательно, плотность энергии $\varepsilon =$

$= T^4 = e^{4\theta}$ убывает с ростом собственного времени по квадратичному закону:

$$\varepsilon \approx \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{l}{\bar{t}}\right)^2. \quad (45)$$

3.5. Эволюция плотности энергии в центре распределения

В центре распределения при $x = 0$, где $r_- = -r_+ \equiv r$, вторая формула (20) сводится после простых преобразований к

$$t = l\sqrt{3} \exp\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) \frac{d}{dr} \times \times \left\{ \exp\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) \int_0^r \left(\text{ch} \frac{r'}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sh} \frac{r'}{2} \right) \times \times \exp\left(-\frac{r'}{\sqrt{3}}\right) I_0\left(\sqrt{\frac{r(r-r')}{3}}\right) dr' \right\}, \quad (46)$$

что определяет зависимость параметра r от времени t . Поскольку в этой точке $T = \exp(\theta) = \exp(-r/\sqrt{3})$, тем самым мы находим зависимость температуры и плотности энергии от времени в центре распределения. При асимптотически больших временах $t \gg l$ и $r \gg 1$, учитывая, что интеграл в (46) сходится при $r' \sim 1$ благодаря наличию множителя $\exp(-r'/\sqrt{3})$ в подынтегральном выражении, мы можем использовать для функции Бесселя асимптотическое приближение [22]

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad (47)$$

так что

$$I_0\left(\sqrt{\frac{r(r-r')}{3}}\right) \approx \frac{\exp\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) \exp\left(-\frac{r'}{2\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{2\pi r/\sqrt{3}}}, \quad (48)$$

$r \gg r' \sim 1,$

и заменить верхний предел интегрирования на бесконечность. В результате получаем

$$t \approx l \sqrt{\frac{2}{3\pi(-\theta)}} e^{-3\theta}, \quad |\theta| \gg 1. \quad (49)$$

Это уравнение можно решить с логарифмической точностью относительно $-\theta$,

$$-\theta \approx \frac{1}{3} \ln\left(\frac{t}{l}\right),$$

т. е.

$$T \approx \left(\frac{2}{\pi \ln(t/l)}\right)^{1/6} \left(\frac{l}{t}\right)^{1/3}, \quad (50)$$

а плотность энергии убывает со временем как

$$\varepsilon = T^4 \approx \frac{1}{[2\pi \ln(t/l)]^{2/3}} \left(\frac{2l}{t}\right)^{4/3}, \quad t \gg l. \quad (51)$$

Закон $\varepsilon \propto (l/t)^{4/3}$ был получен Ландау [4] в приближении, не учитывающем логарифмически зависящих от времени коэффициентов.

3.6. Течение вдали от границ общего решения с волнами разрежения

При больших временах температура материи сильно уменьшается по сравнению с ее начальным значением, так что $|\theta| = |\ln T| \gg 1$. Если нас интересует течение вдали от границ общего решения, на которых один из римановых инвариантов обращается в нуль, то можно считать, что оба римановых инварианта, $r_{\pm} = y \pm \sqrt{3}\theta$, велики по абсолютной величине, и использовать асимптотическую формулу (47) для вычисления интегралов в (35), снова заменяя пределы интегрирования на $r_+ \rightarrow -\infty, r_- \rightarrow \infty$. В результате приходим к простой формуле для W :

$$W(r_+, r_-) \approx l \cdot 3^{3/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-r_+ r_-)^{1/4}}{r_- - r_+ + 4\sqrt{-r_+ r_-}} \times \exp \left[\frac{(\sqrt{r_-} + \sqrt{-r_+})^2}{2\sqrt{3}} \right]. \quad (52)$$

Если опустить предэкспоненциальный множитель, то мы возвращаемся к решению, найденному Ландау [4, 10]. При вычислении производных в главном приближении достаточно дифференцировать лишь показатель экспоненты, так как при этом не понижается степень предэкспоненциального множителя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r_+} &\approx -l \frac{3^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{r_-}{-r_+}\right)^{1/4} \frac{\sqrt{r_-} + \sqrt{-r_+}}{r_- - r_+ + 4\sqrt{-r_+ r_-}} \times \\ &\quad \times \exp \left[\frac{(\sqrt{r_-} + \sqrt{-r_+})^2}{2\sqrt{3}} \right], \\ \frac{\partial W}{\partial r_-} &\approx l \frac{3^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-r_+}{r_-}\right)^{1/4} \frac{\sqrt{r_-} + \sqrt{-r_+}}{r_- - r_+ + 4\sqrt{-r_+ r_-}} \times \\ &\quad \times \exp \left[\frac{(\sqrt{r_-} + \sqrt{-r_+})^2}{2\sqrt{3}} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Подстановка этих формул в (20) определяет зависимость римановых инвариантов от x и t . Интервалы изменения r_+, r_- при фиксированном значении времени t находим из второй формулы (42):

$$\begin{aligned} -r_m \lesssim r_+ \lesssim 0, \quad 0 \lesssim r_- \lesssim r_m, \\ r_m \approx \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \ln \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1} \frac{t}{l} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

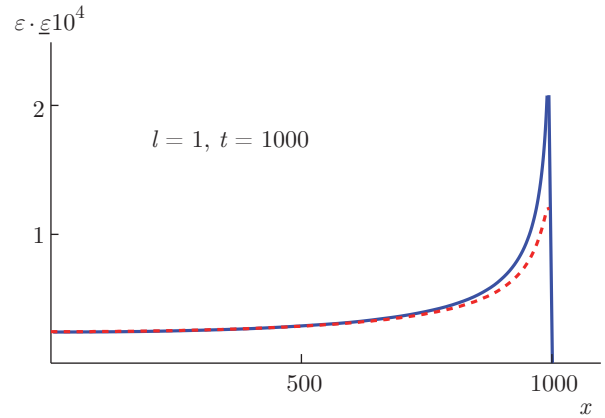


Рис. 4. Сплошной линией показано распределение энергии $\varepsilon(x)$ при $x > 0$ и $t = 1000$ при длине начального распределения $l = 1$ для асимптотического решения, определяемого функцией (52) и волной разрежения. Штриховая линия соответствует приближению Ландау, когда предэкспоненциальный множитель в (52) заменен на постоянный коэффициент, подобранный так, чтобы решения совпадали при $x = 0$

Зафиксировав, допустим, r_+ в указанном интервале, мы находим при заданном t соответствующее значение r_- из второго уравнения (20), и тогда соответствующее значение x определяется первой формулой (20). Таким образом, мы находим значения римановых инвариантов при фиксированном t в зависимости от x , что определяет распределения физических величин согласно формулам (10). Общий характер поведения этого решения выяснен в работах [4, 10], где показано, что распределение энергии находится в ультрарелятивистской области течения, тогда как плотность числа частиц сосредоточена при относительно малых скоростях течения. Мы не будем останавливаться на деталях и отметим лишь, что теперь распределения физических величин могут быть найдены с учетом предэкспоненциального множителя. Пример распределения плотности энергии показан на рис. 4. Время эволюции $t = 1000$ выбрано большим для того, чтобы приближение Ландау имело достаточно хорошую точность при значениях римановых инвариантов $r_{\pm} \sim 5$. Однако при не слишком больших временах роль предэкспоненциального множителя становится более существенной, что сказывается на распределении измеряемого в эксперименте распределения частиц по быстротам.

3.7. Распределение по быстротам

Экспериментально наблюдаемой величиной является распределение частиц по быстротам y [23], и

обычно проводится сравнение с гауссовым распределением, следующим из приближения Ландау. Здесь мы приведем более точные формулы, учитывающие предэкспоненциальный множитель.

Согласно Ландау [4], распределение числа частиц воспроизводит распределение энтропии. Поэтому распределение по быстротам пропорционально распределению энтропии в каждом элементе материи в момент, когда она превращается в реальные адроны при температуре порядка их массы [11]. В собственной системе координат элемента жидкости количество энтропии в слое с толщиной dx' равно $\sigma dx' = \sigma(u^0)' dx'$, где $(u^0)' = 1$ — временная компонента 4-скорости. Это является произведением временной компоненты вектора потока энтропии на пространственную компоненту 4-вектора dx^i . Величину $(u^0)' dx'$ в двумерной геометрии Минковского можно считать элементом «площади» $A'^{01} = (u^0)' dx' - (u^1)' dt'$, где $(u^1)' = 0$ в собственной системе координат. Эта компонента тензора инвариантна относительно преобразований Лоренца, и поэтому для дифференциала энтропии в произвольной системе координат получаем выражение

$$dS = \sigma(u^0 dx - u^1 dt). \tag{55}$$

В системе центра инерции координаты t и x связаны с параметрами θ, y течения формулами

$$\begin{aligned} t &= e^{-\theta} \left(\text{sh } y \frac{\partial W}{\partial y} - \text{ch } y \frac{\partial W}{\partial \theta} \right), \\ x &= e^{-\theta} \left(\text{ch } y \frac{\partial W}{\partial y} - \text{sh } y \frac{\partial W}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \tag{56}$$

которые получаются из (20) в результате замены (8). Подставляя их в (56) и учитывая, что $\sigma \propto T^3 = e^{3\theta}$, $u^0 = \text{ch } y$, $u^1 = \text{sh } y$, находим

$$dS \propto e^{2\theta} \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) dy + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) d\theta \right\}.$$

В момент образования свободных частиц изменением температуры можно пренебречь, а их распределение по быстротам повторяет распределение энтропии:

$$dN \propto dS \propto e^{2\theta} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) dy,$$

где dN — число частиц с быстротами в интервале $(y, y + dy)$. В асимптотической области вдали от границ, на которых $y = \pm\sqrt{3}\theta$, простое вычисление дает

$$dN = G(-\theta) \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 - y^2/3}}{(\theta^2 - y^2/3)^{1/4} (\theta - 2\sqrt{\theta^2 - y^2/3})} \times \exp \left[\theta + \sqrt{\theta^2 - \frac{y^2}{3}} \right] dy, \tag{57}$$

где $G(-\theta)$ — нормировочный множитель, определяемый условием $\int_{-\sqrt{3}\theta}^{\sqrt{3}\theta} dN = 1$, и $\theta = \ln T$ соответствует температуре распада ядерной материи на отдельные частицы. Фактически $G(-\theta)$ зависит от $-\theta$ слабо, изменяясь от значения $G(3) \approx 0.3597$ до предельного значения $G(\infty) = (1/2)\sqrt{3/(2\pi)} \approx 0.3455$ всего на 4%. При $-\theta \gg 1$, $y \ll |\theta|$ это распределение превращается в гауссово:

$$dN = \frac{1}{\sqrt{6\pi(-\theta)}} \exp \left(-\frac{y^2}{6(-\theta)} \right) dy \tag{58}$$

в согласии с экспериментом при очень высоких энергиях столкновения ядер [23]. Однако при более умеренных энергиях следует, по-видимому, пользоваться более точной формулой (57).

4. СРАВНЕНИЕ С РЕШЕНИЕМ В ФОРМЕ ХАЛАТНИКОВА

В работе [7] Халатников пользуется системой координат, в которой правый край начального распределения материи находится в точке $x = 0$ (а не $x = l$, как в нашей работе). При этом для связи между x, t и переменными θ, y по-прежнему используются формулы (56) без трансляционной замены $x \rightarrow x - l$. Вследствие этого полученное им выражение для потенциала,

$$\widetilde{W}(\theta, y) = l\sqrt{3} e^\theta \int_{y/\sqrt{3}}^{-\theta} e^{2z} I_0 \left(\sqrt{z^2 - y^2/3} \right) dz, \tag{59}$$

не инвариантно относительно изменения знака скорости ($y \rightarrow -y$), но зато приобретает более простую форму по сравнению с нашим выражением (35). Записанное через римановы инварианты, решение в форме Халатникова имеет вид

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(r_+, r_-) &= l\sqrt{3} \exp \left(\frac{r_+ - r_-}{2\sqrt{3}} \right) \times \\ &\times \int_{(r_- + r_+)/2\sqrt{3}}^{(r_- - r_+)/2\sqrt{3}} e^{2z} I_0 \left(\sqrt{z^2 - \frac{(r_+ - r_-)^2}{12}} \right) dz. \end{aligned} \tag{60}$$

Очевидно, что функции W в (35) и \widetilde{W} в (60) не совпадают друг с другом, имея разные свойства симметрии. Однако получаемые из них физические следствия, конечно, одинаковы. Например, на правой границе общего решения с волной разрежения при $y = -\sqrt{3}\theta$ находим значения производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial y} \\ \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \theta} \end{aligned} \right|_{y=-\sqrt{3}\theta} = \begin{aligned} -le^{-\theta}, \\ -l\sqrt{3}e^{-\theta}, \end{aligned} \quad (61)$$

и их подстановка в (56) дает закон движения границы, совпадающий с (42) с учетом переноса начала координат в точку $x = l$. В центре распределения при $y = 0$ формула (59) дает ($r = -\sqrt{3}\theta$)

$$t = l\sqrt{3} \times \left\{ \exp\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) I_0\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) - \int_0^{r/\sqrt{3}} e^{2z} I_0(z) dz \right\}, \quad (62)$$

что отличается по форме от (46), но тождественность этих двух выражений легко проверить численно.

Следует отметить, что вычислить предэкспоненциальный множитель простой подстановкой асимптотической формулы (47) в (60) невозможно, так как теперь в подынтегральном выражении отсутствует множитель, обеспечивающий сходимость интеграла при конечных z . Таким образом, каждое представление имеет свои преимущества при исследовании характерных свойств течения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе получена альтернативная форма точного решения задачи о расширении слоя материи в релятивистской гидродинамике. Эта задача была поставлена Ландау [4], и им было найдено ее асимптотическое решение. Метод Римана [14, 15], примененный к уравнению Халатникова [7], позволяет найти решение, удовлетворяющее граничным условиям на границах с волнами разрежения. Хотя это решение физически эквивалентно решению Халатникова, его математическая форма обладает некоторыми преимуществами при исследовании асимптотического характера течения с учетом предэкспоненциального множителя. В работе дано достаточно полное исследование основных параметров течения во всем диапазоне его эволюции.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fermi, *Progr. Theor. Phys.* **5**, 570 (1950) [Э. Ферми, *Научные труды*, т. II, Наука, Москва (1972), с. 485].
2. Э. Ферми, *Элементарные частицы*, Изд-во иностр. лит., Москва (1953).
3. И. Я. Померанчук, *ДАН СССР* **78**, 889 (1951).
4. Л. Д. Ландау, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **17**, 51 (1953).
5. C.-Y. Wong, *Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions*, World Sci., Singapore (1994).
6. W. Florkowski, *Phenomenology of Ultra-Relativistic Heavy-Ion Collisions*, World Sci., Singapore (2010).
7. И. М. Халатников, *ЖЭТФ* **27**, 529 (1954).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2006).
9. Б. ван дер Поль, Х. Бреммер, *Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа*, Изд-во иностр. лит., Москва (1952).
10. С. З. Беленький, Л. Д. Ландау, *УФН* **56**, 309 (1955).
11. Г. А. Милехин, *ЖЭТФ* **35**, 1185 (1958).
12. S. Chadha, C. S. Lam, and Y. C. Leung, *Phys. Rev. D* **10**, 2817 (1974).
13. C.-Y. Wong, A. Sen, J. Gerhard, G. Torrieri, and K. Read, *Phys. Rev. C* **90**, 064907 (2014).
14. B. Riemann, *Abh. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.* **8**, 43 (1860) [Б. Рيمان, *Сочинения*, ОГИЗ-ГГТИ, Москва–Ленинград (1948), с. 376].
15. А. Зоммерфельд, *Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики*, Изд-во иностр. лит., Москва (1950).
16. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Уравнения в частных производных математической физики*, Высшая школа, Москва (1970).
17. S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. A* **99**, 013609 (2019).
18. A. M. Anile, *Relativistic Fluids and Magneto-Fluids*, Cambridge Univ. Press, New York (1989).
19. A. M. Kamchatnov, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations*, World Sci., Singapore (2000).
20. G. Beuf, R. Peschanski, and E. N. Saridakis, *Phys. Rev. C* **78**, 064909 (2008).
21. R. Peschanski and E. N. Saridakis, *Nucl. Phys. A* **849**, 147 (2011).
22. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, т. II, Физматлит, Москва (1963).
23. J. G. Bearden et al. (BRAHMS Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **94**, 162301 (2005).