

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ОПТИЧЕСКИХ СРЕД С РАЗЛИЧНЫМИ МЕХАНИЗМАМИ ИНДУЦИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОСТИ

*С. Е. Савотченко\**

*Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова  
308012, Белгород, Россия*

Поступила в редакцию 2 января 2019 г.,  
после переработки 25 марта 2019 г.  
Принята к публикации 26 марта 2019 г.

Описаны типы нелинейных поверхностных волн необыкновенной поляризации, возникающие на границе раздела фоторефрактивного кристалла и среды с керровской нелинейностью. Рассмотрены случаи фокусирующей и дефокусирующей нелинейности. Показано, что в такой системе могут существовать нелинейные поверхностные волны несимметричного профиля нескольких типов. Волны одного типа затухают при удалении от границы раздела без осцилляций в глубину как фоторефрактивного кристалла, так и керровского, а другого типа — с осцилляциями. Вблизи границы раздела фоторефрактивного кристалла и среды с дефокусирующей керровской нелинейностью могут существовать по два вида локализованных состояний, различающихся формой затухания поля, как с осцилляциями, так и без. Получены дисперсионные соотношения и указаны условия существования всех описанных типов волн в зависимости от оптических характеристик кристаллов. В явном аналитическом виде найдены точные решения дисперсионных уравнений, описывающие зависимости константы распространения от оптических характеристик кристаллов.

DOI: 10.1134/S0044451019080017

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическому описанию поверхностных электромагнитных волн (плазмонов, поляритонов) на границах различных сред посвящено большое количество работ [1–7]. С точки зрения технических приложений особую важность имеют исследования свойств поверхностных волн в различных нелинейных оптических средах, таких как фоторефрактивные кристаллы [8–11] и среды с эффектом Керра [12]. Тем не менее необходим детальный анализ многих практически важных аспектов, в частности, механизмов формирования нелинейных поверхностных волн с несимметричным профилем, возникающих вблизи границ между фоторефрактивными кристаллами и другими оптическими средами. В основном описывалась локализация возбуждений электромагнитного поля вблизи границ раздела сред с одинаковыми по физической природе

формами нелинейности (наиболее часто встречающийся случай — контакт двух сред с керровской нелинейностью [13–21]) либо на границе раздела линейной и нелинейной сред [22–26].

В данной работе предлагается теоретическое описание новых типов нелинейных локализованных состояний, соответствующих поверхностным волнам на границе двух оптических сред с различными по физической природе формами нелинейности: фоторефрактивного кристалла и кристалла с керровской нелинейностью. Очевидно, что такие поверхностные волны будут иметь несимметричный профиль относительно границы раздела сред. Кроме того, различие форм нелинейности, обусловленных различными механизмами индуцирования поля вследствие перераспределения плотности зарядов в кристаллах, приводит к возможности существования нелинейных поверхностных волн, амплитуда поля в которых убывает при удалении от границы раздела сред осциллирующим образом. Также будет показано, что если считать известной амплитуду поля поверхностной волны на границе раздела кристаллов, то возможно найти в явном аналитическом ви-

\* E-mail: savotchenkose@mail.ru

де без использования дополнительных приближений точные решения дисперсионных уравнений, определяющие зависимости константы распространения от оптических характеристик кристаллов.

## 2. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Рассмотрим контакт одноосного фоторефрактивного кристалла с диффузионным механизмом формирования нелинейности и одноосного кристалла с керровской нелинейностью (далее будем для краткости называть его керровским кристаллом) в отсутствие приложенного внешнего поля. Границу раздела кристаллов будем считать настолько тонкой, что можно пренебречь оптическими эффектами внутри нее.

Будем изучать Р-поляризованные нелинейные поверхностные волны, для которых  $E_y = 0$ ,  $H_x = H_z = 0$ , т.е. волны с необыкновенной поляризацией (ТМ-волны). Так как будет рассматриваться скользящее распространение светового пучка, то можно пренебречь анизотропией показателя преломления и использовать одноосное приближение.

Пусть полярная ось фоторефрактивного кристалла направлена вдоль оси  $x$ . ТМ-волна распространяется вдоль оси  $z$ . Граница раздела между фоторефрактивным и керровским кристаллами расположена в плоскости  $x = 0$ . Фоторефрактивный кристалл занимает полупространство  $x > 0$ , а керровский — полупространство  $x < 0$ .

Будем рассматривать только стационарное распределение поля поверхностной волны. Из системы уравнений Максвелла в рассматриваемом случае получается уравнение для отличной от нуля компоненты вектора магнитного поля:

$$\Delta H_y + k^2(x)H_y = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа по координатам  $x$  и  $z$ ,

$$k(x) = \begin{cases} k_0 \{n_{10}(x) + \Delta n_1(x)\}, & x > 0, \\ k_0 \{n_{20}(x) + \Delta n_2(x)\}, & x < 0, \end{cases}$$

$k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$  — длина волны света в вакууме,  $n_{j0}$  — невозмущенные показатели преломления,  $\Delta n_j$  — нелинейные добавки к ним, которые считаются малыми ( $\Delta n_j \ll n_{j0}$ ),  $j = 1, 2$ . Здесь и далее значение индекса  $j = 1$  соответствует величине, характеризующей фоторефрактивный кристалл в области  $x > 0$ , а значение индекса  $j = 2$  соответствует величине, характеризующей керровский кристалл в области  $x < 0$ .

Нелинейная добавка к показателю преломления фоторефрактивного кристалла формируется в результате диффузионного механизма нелинейности [27]. Если пренебречь темновой интенсивностью по сравнению с интенсивностью поверхностной волны, то нелинейную добавку к показателю преломления фоторефрактивного кристалла можно представить в виде [9, 10, 27]

$$\Delta n_1(x) = \frac{1}{2} n_{10}^3 r_{eff} \frac{k_B T}{e} \frac{I'_1}{I_1},$$

где штрихи здесь и далее означают производные по координате  $x$ ,  $r_{eff}$  — эффективный электрооптический коэффициент,  $k_B$  — константа Больцмана,  $T$  — температура,  $e$  — модуль заряда электрона,  $I_j \propto |H_j|^2$  — интенсивность светового пучка в поверхностной волне.

Нелинейная добавка к показателю преломления керровского кристалла пропорциональна интенсивности:  $\Delta n_2(x) \propto I_2$ . Для нее будем использовать выражение в виде  $\Delta n_2(x) = \alpha |H_2|^2$ ,  $\alpha$  — коэффициент керровской нелинейности (постоянный).

Предполагая, что установившееся распределение распространяющейся вдоль оси  $z$  волны представимо в виде

$$H_y(x, z) = \begin{cases} H_1(x) e^{i\beta k_0 z}, & x > 0, \\ H_2(x) e^{i\beta k_0 z}, & x < 0, \end{cases}$$

где  $\beta$  — константа распространения, в рассматриваемом приближении с учетом малости темновой интенсивности по сравнению с интенсивностью поверхностной волны и малости нелинейных добавок к невозмущенным показателям преломления из (1) можно получить уравнения

$$H_1'' + \mu H_1' + (n_{10}^2 - \beta^2) k_0^2 H_1 = 0, \quad (2)$$

$$H_2'' + (n_{20}^2 - \beta^2) k_0^2 H_2 + g |H_2|^2 H_2 = 0, \quad (3)$$

где  $\mu = 2k_0^2 n_{10}^4 r_{eff} k_B T / e$  — коэффициент затухания волны в фоторефрактивном кристалле,  $g = 2\alpha k_0^2 n_{20}$  — эффективный коэффициент нелинейности в керровском кристалле.

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих полей на границе кристаллов вытекают граничные условия

$$H_1(0) = H_2(0) = H_0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} H_1'(0) = \frac{1}{\varepsilon_2} H_2'(0), \quad (5)$$

где  $H_0$  — амплитуда поля на границе раздела,  $\varepsilon_j \propto n_{j0}^2$  — линейные (невозмущенные) части диэлектрических проницаемостей фоторефрактивного и керровского кристаллов.

Таким образом, математическая формулировка модели для описания нелинейных поверхностных волн на границе фоторефрактивного и керровского кристаллов сводится к уравнениям (2) и (3) с граничными условиями (4) и (5).

Нелинейные поверхностные волны в рассматриваемой модели представляют собой решения краевой задачи (2)–(5), удовлетворяющие условиям ограниченности.

Уравнение (2) имеет два типа исчезающих на бесконечности решений в зависимости от соотношения между значениями константы распространения, коэффициента затухания и невозмущенного показателя преломления в фоторефрактивном кристалле. Амплитуда волны первого типа затухает без осцилляций при удалении от границы раздела вглубь фоторефрактивного кристалла, а второго типа — осциллирующим образом [28].

Решения нелинейного уравнения (3) определяются знаком коэффициента нелинейности  $g$  и знаком разности  $n_{20}^2 - \beta^2$ . В зависимости от их комбинаций возникает несколько типов нелинейных поверхностных волн несимметричного профиля.

### 3. ЗАТУХАЮЩИЕ БЕЗ ОСЦИЛЛЯЦИЙ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

#### 3.1. Волны в кристалле с положительной керровской нелинейностью

В случае  $g > 0$  и  $\max \{n_{20}, \sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2}\} < \beta < n_{10}$  решения уравнений (2) и (3) представимы в виде

$$H_1(x) = e^{-\mu x/2}(Ae^{\nu x} + Be^{-\nu x}), \quad (6)$$

$$H_2(x) = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{q}{\operatorname{ch} q(x - x_0)}. \quad (7)$$

Параметр  $\nu$  решения (6) определяется выражением

$$\nu^2 = \frac{1}{4} \{ \mu^2 - 4k_0^2(n_{10}^2 - \beta^2) \}, \quad (8)$$

а решения (7) —

$$q^2 = k_0^2(\beta^2 - n_{20}^2). \quad (9)$$

Величина  $1/q$  характеризует глубину локализации поля в керровском кристалле, а  $x_0$  определяет положение центра локализации поля.

Поверхностная волна с неосциллирующим профилем может наблюдаться только при очень малых углах скольжения пучка, возбуждающего эту волну.

Подстановка решений (6) и (7) в граничные условия (4) и (5) приводит к следующим выражениям для параметров поля в фоторефрактивном кристалле:

$$A = \frac{q}{\nu\sqrt{2g} \operatorname{ch} qx_0} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q \operatorname{th} qx_0 + \frac{\mu}{2} + \nu \right), \quad (10)$$

$$B = -\frac{q}{\nu\sqrt{2g} \operatorname{ch} qx_0} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q \operatorname{th} qx_0 + \frac{\mu}{2} - \nu \right). \quad (11)$$

Таким образом, нелинейная поверхностная волна с неосциллирующим профилем при положительной керровской нелинейности описывается распределениями полей (6) и (7) с параметрами, определяемыми выражениями (8)–(11) (см. рис. а). Величина  $x_0$  здесь играет роль свободного параметра.

Если максимум локализации расположен в плоскости границы раздела кристаллов, когда  $x_0 = 0$ , то выражения (10) и (11) упрощаются:

$$A = \frac{q}{\nu\sqrt{2g}} \left( \frac{\mu}{2} + \nu \right), \quad (12)$$

$$B = -\frac{q}{\nu\sqrt{2g}} \left( \frac{\mu}{2} - \nu \right). \quad (13)$$

Нелинейная поверхностная волна с неосциллирующим профилем (6) может затухать в глубину фоторефрактивного кристалла немонотонно или монотонно. Монотонное затухание волны в глубину фоторефрактивного кристалла происходит в двух случаях:

1)  $A = 0$ , и тогда  $H_0 = B$ ,

или

2)  $B = 0$ , и тогда  $H_0 = A$ .

Далее, из (10) и (11) получается

$$\nu = \mp \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q \operatorname{th} qx_0 + \frac{\mu}{2} \right), \quad (14)$$

где выбирается знак «−» для  $A = 0$  и знак «+» для  $B = 0$ . В этих случаях распределение поля (6) в монотонно затухающей поверхностной волне в фоторефрактивном кристалле принимает вид

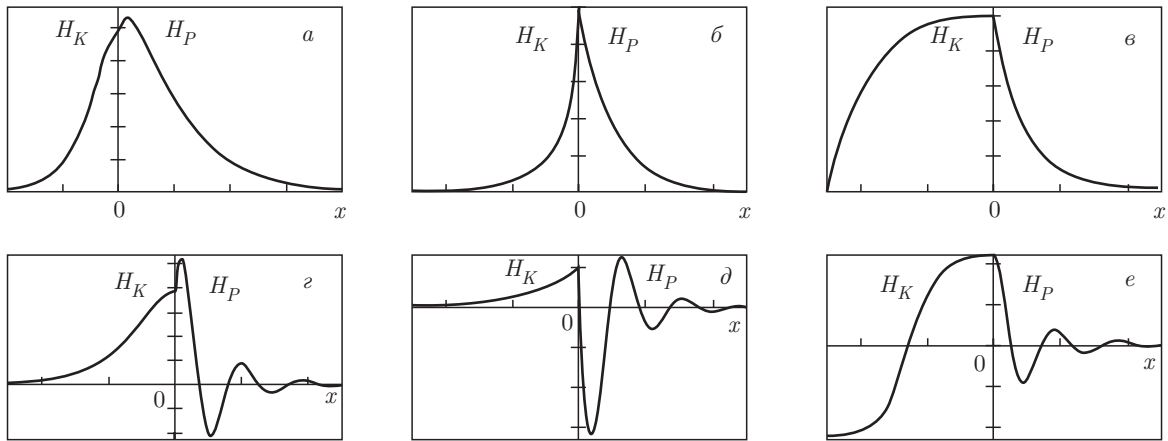
$$H_1(x) = H_0 e^{-\gamma x}, \quad (15)$$

где амплитуда поля на границе раздела

$$H_0 = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{q}{\operatorname{ch} qx_0} \quad (16)$$

и коэффициент затухания

$$\gamma = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q \operatorname{th} qx_0. \quad (17)$$



Характерные профили распределения поля ( $H_K$  — в керровском кристалле при  $x < 0$ ,  $H_P$  — в фоторефрактивном при  $x > 0$ ) в поверхностной волне в зависимости от расстояний  $x$  от границы раздела кристаллов при фиксированных параметрах: а) диапазон  $\max\{n_{20}, \sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2}\} < \beta < n_{10}$  и  $g > 0$ , в фоторефрактивном кристалле — график зависимости (6), в керровском — график зависимости (7); б) диапазон  $\max\{n_{20}, \sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2}\} < \beta < n_{10}$  и  $g < 0$ , в фоторефрактивном кристалле — (6), в керровском — (19); в) диапазон  $\sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2} < \beta < \min\{n_{10}, n_{20}\}$  и  $g < 0$ , в фоторефрактивном кристалле — (6), в керровском — (28); г) диапазон  $n_{20} < \beta < \sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2}$  и  $g > 0$ , в фоторефрактивном кристалле — (36), в керровском — (7); д) диапазон  $n_{20} < \beta < \sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2}$  и  $g < 0$ , в фоторефрактивном кристалле — (36), в керровском — (19); е) диапазон  $\beta < \min\{n_{20}, \sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2}\}$  и  $g < 0$ , в фоторефрактивном кристалле — (36), в керровском — (28)

Для положительности коэффициента затухания (17) в монотонно убывающей волне (15) должно быть  $x_0 < 0$ . Такая монотонно убывающая волна существует при фиксированной связи константы распространения, коэффициентов преломления и других физических характеристик фоторефрактивного и керровского кристаллов, определяемой выражением (14).

Выражение (14) можно использовать другим образом, определив из него положение центра локализации поля как функцию константы распространения:

$$x_0(\beta) = -\frac{1}{q} \operatorname{Arth} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 q} \left( \frac{\mu}{2} \pm \nu \right) \right), \quad (18)$$

где знаки «+» для  $A = 0$  и «-» для  $B = 0$ .

### 3.2. Волны первого типа в кристалле с отрицательной керровской нелинейностью

Рассмотрим теперь случай  $g < 0$  и  $\max\{n_{20}, \sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2}\} < \beta < n_{10}$ . Тогда в фоторефрактивном кристалле решение уравнения (2) определяется выражением (6), в керровском кристалле решение уравнения (3) представимо в виде

$$H_2(x) = \sqrt{\frac{2}{|g|}} \frac{q}{\operatorname{sh} q(x - x_0)}, \quad (19)$$

где  $q$  определяется выражением (9) (см. рис. б). Параметр  $\nu$  решения (6) определяется выражением (8), а константы  $A$  и  $B$  находятся после подстановки (6) и (19) в граничные условия (4) и (5):

$$A = \frac{q}{\nu \sqrt{2|g|} \operatorname{sh} qx_0} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q \operatorname{cth} qx_0 + \frac{\mu}{2} + \nu \right), \quad (20)$$

$$B = \frac{q}{\nu \sqrt{2|g|} \operatorname{sh} qx_0} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q \operatorname{cth} qx_0 + \frac{\mu}{2} - \nu \right). \quad (21)$$

Как и для кристалла с положительной керровской нелинейностью, в кристалле с отрицательной керровской нелинейностью возможно существование монотонно затухающих в глубину фоторефрактивного кристалла волн в двух случаях ( $A = 0$  или  $B = 0$ ). Тогда из (20) и (21) получается дисперсионное уравнение

$$\nu = \mp \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q \operatorname{cth} qx_0 + \frac{\mu}{2} \right), \quad (22)$$

где выбирается знак «-» для  $A = 0$  и «+» для  $B = 0$ . В этих случаях распределение поля (6) в монотонно затухающей поверхностной волне в фо-

торефрактивном кристалле принимает вид (15), где амплитуда поля на границе раздела

$$H_0 = -\sqrt{\frac{2}{|g|}} \frac{q}{\operatorname{sh} qx_0} \quad (23)$$

и коэффициент затухания

$$\gamma = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q \operatorname{cth} qx_0. \quad (24)$$

Из формулы (22) можно выразить положение центра локализации поля как функцию константы распространения:

$$x_0(\beta) = -\frac{1}{q} \operatorname{Arcth} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 q} \left( \frac{\mu}{2} \pm \nu \right) \right), \quad (25)$$

где выбирается знак «+» для  $A = 0$  и «-» для  $B = 0$ .

В приближении  $qx_0 \ll 1$  из (22) получается выражение

$$\nu = \pm \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 x_0} + \frac{\mu}{2} \right), \quad (26)$$

из которого можно найти в явном виде закон дисперсии — зависимость константы распространения от параметров кристаллов:

$$\beta^2(x_0) = n_{10}^2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 x_0 k_0^2} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 x_0} + \mu \right). \quad (27)$$

Условия существования такой поверхностной волны реализуются при  $-\varepsilon_1/\varepsilon_2 \mu < x_0 < 0$ .

### 3.3. Волны второго типа в кристалле с отрицательной керровской нелинейностью

Рассмотрим теперь случай  $g < 0$  и  $\sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2} < \beta < \min\{n_{10}, n_{20}\}$ . Тогда в фоторефрактивном кристалле решение уравнения (2) определяется выражением (6), в керровском кристалле решение уравнения (3) представимо в виде

$$H_2(x) = q_t \sqrt{\frac{2}{|g|}} \operatorname{th} q_t(x - x_0), \quad (28)$$

где

$$q_t^2 = \frac{k_0^2(n_{20}^2 - \beta^2)}{2}. \quad (29)$$

Решение (28) хотя и не исчезает на бесконечности (в отличие от решений (7) и (19), удовлетворяющих

условию  $|H_2(x)| \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ ), но всюду остается конечным и может использоваться для анализа локализованных состояний в кристаллах конечной толщины при условии, что она существенно превосходит характерное расстояние локализации возмущений поля вблизи границы раздела (см. рис. 6).

Параметр  $\nu$  решения (6) определяется выражением (8), а константы  $A$  и  $B$  находятся после подстановки (6) и (28) в граничные условия (4) и (5):

$$A = -\frac{q_t \operatorname{th} q_t x_0}{\nu \sqrt{2|g|}} \left( \frac{\mu}{2} + \nu - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{2q_t}{\operatorname{sh} 2q_t x_0} \right), \quad (30)$$

$$B = \frac{q_t \operatorname{th} q_t x_0}{\nu \sqrt{2|g|}} \left( \frac{\mu}{2} - \nu - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{2q_t}{\operatorname{sh} 2q_t x_0} \right). \quad (31)$$

Как и в разд. 3.2, в рассматриваемом случае возможно существование монотонно затухающих в глубину фоторефрактивного кристалла волн при  $A = 0$  или  $B = 0$ . Тогда из (30) и (31) для таких волн получается дисперсионное уравнение

$$\nu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{2q_t}{\operatorname{sh} 2q_t x_0} \mp \frac{\mu}{2}, \quad (32)$$

где выбирается верхний знак для  $A = 0$  и нижний знак для  $B = 0$ . В этих случаях распределение поля (6) в монотонно затухающей поверхностной волне в фоторефрактивном кристалле принимает вид (15), где амплитуда поля на границе раздела

$$H_0 = -q_t \sqrt{\frac{2}{|g|}} \operatorname{th} q_t x_0, \quad (33)$$

и коэффициент затухания

$$\gamma = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{2q_t}{\operatorname{sh} 2q_t x_0}. \quad (34)$$

Для положительности коэффициента затухания (34) в монотонно убывающей волне (15) должно быть  $x_0 < 0$ .

Из уравнения (32) можно выразить положение центра локализации поля как функцию константы распространения:

$$x_0(\beta) = \frac{1}{2q_t} \operatorname{Arsh} \left( \frac{2q_t \varepsilon_1}{\varepsilon_2 (\mu/2 \pm \nu)} \right). \quad (35)$$

В приближении  $qx_0 \ll 1$  из (32) получается выражение (26) и, соответственно, закон дисперсии (27).

В противоположном предельном случае, когда  $qx_0 \gg 1$ , из (32) следует, что  $\nu \rightarrow \mp \mu/2$ ,  $\beta \rightarrow n_{10}$ .

**4. ЗАТУХАЮЩИЕ С ОСЦИЛЛЯЦИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ**

**4.1. Осциллирующие поверхностные волны в кристалле с положительной керровской нелинейностью**

При  $g > 0$  и  $n_{20} < \beta < \sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2}$  решение уравнения (3) остается в виде (7), а решение уравнения (2) примет вид

$$H_1(x) = H_0 e^{-\mu x/2} \frac{\cos(px + \varphi)}{\cos \varphi}, \quad (36)$$

где  $H_0$  определяется (16) и волновое число

$$p^2 = -\nu^2 = \frac{1}{4} \{4k_0^2(n_{10}^2 - \beta^2) - \mu^2\}. \quad (37)$$

Распределение поля (36) в поверхностной волне затухает с осцилляциями при удалении от границы раздела в глубину фоторефрактивного кристалла (см. рис. *з*). Затухание поля в глубину керровского кристалла по-прежнему происходит без осцилляций.

Подстановка решений (7) и (36) в граничные условия (4) и (5) приводит к амплитуде поля в фоторефрактивном кристалле в виде (16), а также к дисперсионному соотношению

$$p \operatorname{tg} \varphi = - \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q \operatorname{th} qx_0 + \frac{\mu}{2} \right). \quad (38)$$

Дисперсионное соотношение (38), определяющее зависимость константы распространения от коэффициентов преломления и других физических характеристик фоторефрактивного и керровского кристаллов, можно проанализировать в различных предельных случаях.

В частности, при  $\varphi = 0$  формула (38) примет вид

$$q \operatorname{th} qx_0 = - \frac{\mu \varepsilon_2}{2 \varepsilon_1}. \quad (39)$$

При  $qx_0 \ll 1$  из (38) можно получить в явном виде закон дисперсии:

$$\beta^2(x_0) = n_{20}^2 - \frac{\mu \varepsilon_2}{2 \varepsilon_1 x_0 k_0^2}. \quad (40)$$

Волна с законом дисперсии (40) существует при  $x_0 < 0$ .

В противоположном предельном случае при  $qx_0 \gg 1$  из (39) находится значение  $q = -\mu \varepsilon_2 / 2 \varepsilon_1$ , из которого и получается закон дисперсии в явном виде:

$$\beta^2(\varphi) = n_{20}^2 + \left( \frac{\mu \varepsilon_2}{2 \varepsilon_1 k_0} \right)^2. \quad (41)$$

При  $x_0 = 0$  и меняющемся  $\varphi$  формула (38) примет вид

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\mu}{2p}. \quad (42)$$

Из (42) получается закон дисперсии в виде

$$\beta^2(\varphi) = n_{10}^2 - \frac{\mu^2}{4k_0^2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi). \quad (43)$$

Условие существования такой волны с законом дисперсии (43) определяется неравенством  $\operatorname{ctg}^2 \varphi < 4k_0^2 n_{10}^2 / \mu^2 - 1$ .

При  $qx_0 \ll 1$  и меняющемся  $\varphi$  из формулы (38) получается закон дисперсии в виде

$$\beta^2(\varphi) = n_{10}^2 - \frac{\mu^2}{4k_0^2} - \left( \frac{\varepsilon_2 \operatorname{tg} \varphi}{2 \varepsilon_1 k_0 x_0} \right)^2 \{1 \pm D^{1/2}\}, \quad (44)$$

$$D = 1 - f \operatorname{ctg}^2 \varphi,$$

$$f = \frac{4 \varepsilon_1 x_0}{\varepsilon_2} \left\{ \frac{\varepsilon_1 x_0}{\varepsilon_2} \left[ \frac{\mu^2}{4} - k_0^2 (n_{10}^2 - n_{20}^2) \right] - \frac{\mu}{2} \right\}.$$

Условие существования такой волны с законом дисперсии (44) определяется неравенством  $\operatorname{tg}^2 \varphi > f$ .

Из (38) можно выразить положение центра локализации поля как функцию константы распространения:

$$x_0(\beta) = - \frac{1}{q} \operatorname{Arth} \left\{ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 q} \left( \frac{\mu}{2} + p \operatorname{tg} \varphi \right) \right\}. \quad (45)$$

**4.2. Осциллирующие поверхностные волны первого типа в кристалле с отрицательной керровской нелинейностью**

Рассмотрим теперь случай  $g < 0$  и  $n_{20} < \beta < \sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2}$ . Тогда решение уравнения (2) остается в виде (36), а решение уравнения (3) — в виде (19). Параметры  $q$  и  $p$  определяются формулами (9) и (37), а  $H_0$  — (23) (см. рис. *д*).

Подстановка решений (19) и (36) в граничные условия (4) и (5) приводит к амплитуде поля в фоторефрактивном кристалле в виде (23), а также к дисперсионному соотношению

$$p \operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} q \operatorname{cth} qx_0 - \frac{\mu}{2}. \quad (46)$$

При  $\varphi = 0$  дисперсионное уравнение (46) примет вид

$$q \operatorname{cth} qx_0 = \frac{\mu \varepsilon_2}{2 \varepsilon_1}. \quad (47)$$

При  $qx_0 \ll 1$  из (47) можно определить положение центра  $x_0 = 2\varepsilon_1/\mu\varepsilon_2$ . В противоположном предельном случае при  $qx_0 \gg 1$  из (47) находится значение  $q = \mu\varepsilon_2/2\varepsilon_1$ , из которого и получается закон дисперсии в виде (41).

При  $qx_0 \ll 1$  и меняющемся  $\varphi$  из (46) можно получить в явном виде закон дисперсии:

$$\beta^2(\varphi) = n_{10}^2 - \frac{1}{4k_0^2} \left\{ \mu^2 + \left( \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_2 x_0} - \mu \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \right\}. \quad (48)$$

Из (46) можно выразить положение центра локализации поля как функцию константы распространения:

$$x_0(\beta) = \frac{1}{q} \operatorname{Arcth} \left\{ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 q} \left( \frac{\mu}{2} + p \operatorname{tg} \varphi \right) \right\}. \quad (49)$$

### 4.3. Осциллирующие поверхностные волны второго типа в кристалле с отрицательной керровской нелинейностью

Рассмотрим теперь случай  $g < 0$  и  $\beta < \min \left\{ n_{20}, \sqrt{n_{10}^2 - \mu^2/4k_0^2} \right\}$ . Тогда решение уравнения (2) остается в виде (36), а решение уравнения (3) — в виде (28). Параметры  $q_t$  и  $p$  определяются формулами (29) и (37) соответственно, а  $H_0$  — (33) (см. рис. e).

Подстановка решений (28) и (36) в граничные условия (4) и (5) приводит к амплитуде поля в фоторефрактивном кристалле в виде (33), а также к дисперсионному соотношению

$$p \operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{2q_t}{\operatorname{sh} 2q_t x_0} - \frac{\mu}{2}. \quad (50)$$

При  $\varphi = 0$  дисперсионное уравнение (50) примет вид

$$\frac{q_t}{\operatorname{sh} 2q_t x_0} = \frac{\mu\varepsilon_2}{4\varepsilon_1}, \quad (51)$$

из которого в предельных случаях получаются такие же результаты как и в разд. 4.2.

При  $qx_0 \ll 1$  и меняющемся  $\varphi$  из (50) получается закон дисперсии вида (48). При  $qx_0 \gg 1$  и меняющемся  $\varphi$  из (50) получается закон дисперсии вида (43).

Из формулы (50) можно выразить положение центра локализации поля как функцию константы распространения:

$$x_0(\beta) = \frac{1}{2q_t} \operatorname{Arsh} \left\{ \frac{2q_t \varepsilon_1}{\varepsilon_2 (\mu/2 + p \operatorname{tg} \varphi)} \right\}. \quad (52)$$

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим подход к решению дисперсионных уравнений, основанный на том, что известной характеристикой пусть теперь считается амплитуда поля  $H_0$  поверхностной волны на границе раздела кристаллов. В этом случае дисперсионные уравнения будут содержать вместо параметра  $x_0$  амплитуду  $H_0$ , и тогда возможно найти в явном аналитическом виде без использования дополнительных приближений их точные решения, определяющие зависимости константы распространения от характеристик кристаллов.

### 5.1. Затухающие без осцилляций волны

Для монотонно затухающих волн в кристалле с положительным коэффициентом керровской нелинейности дисперсионное уравнение (14) с использованием выражения (16) можно представить как

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left( q^2 - \frac{g}{2} H_0^2 \right)^{1/2} = - \left( \frac{\mu}{2} \pm \nu \right). \quad (53)$$

Точное решение дисперсионного уравнения (53) имеет вид

$$\beta^2 = n_{10}^2 - \mu^2 \left\{ \frac{1}{4k_0^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ 1 \pm \left( 1 + \frac{4h\varepsilon}{\mu^2} \right)^{1/2} \right]^2 \right\}, \quad (54)$$

где

$$\varepsilon = \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 - 1,$$

$$h = \frac{\mu^2}{4} + \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 \left\{ \frac{g}{2} H_0^2 + \frac{\mu^2}{4} + k_0^2 (n_{20}^2 - n_{10}^2) \right\}.$$

Если амплитуда поля на границе раздела выражается через характеристики кристаллов как (получается при  $h = 0$ )

$$H_0^2 = \left( \frac{2}{g} \right)^2 \left\{ k_0^2 (n_{10}^2 - n_{20}^2) - \frac{\mu^2}{4} \left[ \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 + 1 \right] \right\}, \quad (55)$$

то из (53) получается величина  $\nu = \pm \mu/\varepsilon$  и закон дисперсии в виде

$$\beta^2 = n_{10}^2 - \frac{\mu^2}{4k_0^2} \left( 1 - \frac{4}{\varepsilon^2} \right). \quad (56)$$

Для существования волны с законом дисперсии (56) должны выполняться условия  $\varepsilon_1 > \sqrt{5} \varepsilon_2$  и  $\mu^2 < 4k_0^2 (n_{10}^2 - n_{20}^2) / [(\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2 + 1]$ .

Для кристалла с отрицательным коэффициентом керровской нелинейности для монотонно затухающих волн первого типа дисперсионное уравнение (22) с использованием выражения (23) можно

представить в виде (53), в котором перед  $g$  ставится противоположный знак.

Для кристалла с отрицательным коэффициентом керровской нелинейности для монотонно затухающих волн второго типа дисперсионное уравнение (32) с использованием выражения (33) можно представить в виде

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left( \frac{g}{2} H_0^2 - q_t^2 \right) = -\sqrt{\frac{|g|}{2}} H_0 \left( \frac{\mu}{2} \pm \nu \right). \quad (57)$$

Точное решение дисперсионного уравнения (57) имеет вид

$$\beta^2 = n_{10}^2 - \frac{1}{2k_0^2} \left\{ \frac{\mu^2}{2} - g \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} H_0 \right)^2 \times \left[ \mp 1 \pm \left( 1 - \frac{4h_t \varepsilon_1}{2g\varepsilon_2 H_0^2} \right)^{1/2} \right]^2 \right\}, \quad (58)$$

где

$$h_t = \sqrt{2|g|} \frac{H_0 \mu}{2} - \left\{ g H_0^2 - \frac{\mu^2}{4} - k_0^2 (n_{20}^2 - n_{10}^2) \right\} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Если амплитуда поля на границе раздела выражается через характеристики кристаллов в виде (получается при  $h_t = 0$ )

$$H_0 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left( \frac{2}{|g|} \right)^{1/2} \times \left\{ 1 \pm \frac{8}{\mu^2} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 \left[ \frac{\mu^2}{4} + k_0^2 (n_{20}^2 - n_{10}^2) \right] \right\}, \quad (59)$$

то из (58) получается величина

$$\nu = \mp \sqrt{2|g|} H_0 \varepsilon_2 / \varepsilon_1, \quad (60)$$

которой соответствует следующий закон дисперсии

$$\beta^2 = n_{10}^2 - \frac{1}{k_0^2} \left\{ \frac{\mu^2}{4} - 2g \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} H_0 \right)^2 \right\}. \quad (61)$$

Для существования волны с законом дисперсии (61) должно выполняться условие  $\mu^2 > 4k_0^2(n_{20}^2 - n_{10}^2)(\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2/[1/2 - (\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2]$ .

### 5.2. Затухающие с осцилляциями волны

Для затухающих с осцилляциями волн в кристалле с положительным коэффициентом керровской нелинейности дисперсионное уравнение (38) с использованием выражения (16) можно представить в виде

$$\frac{\mu}{2} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left( q^2 - \frac{g}{2} H_0^2 \right)^{1/2} + p \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (62)$$

Точное решение дисперсионного уравнения (62) имеет вид

$$\beta^2 = n_{20}^2 + \frac{b}{2a^2 k_0^2} \left\{ 1 \pm \left( 1 - \frac{4a^2 c}{b^2} \right)^{1/2} \right\}, \quad (63)$$

где

$$a = \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad b = 2a\Delta + \left( \frac{\mu\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2,$$

$$c = \Delta^2 + \left( \frac{\mu\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 \frac{gH_0^2}{2},$$

$$\Delta = \left\{ k_0^2 (n_{10}^2 - n_{20}^2) - \frac{\mu^2}{4} \right\} \operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{\mu^2}{4} + \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 \frac{gH_0^2}{2}.$$

В частном случае при  $\varphi = 0$  из дисперсионного уравнения (62) можно получить более простое для анализа выражение, определяющее ширину локализации поля в керровском кристалле:

$$q^2 = \frac{g}{2} H_0^2 + \left( \frac{\mu\varepsilon_2}{2\varepsilon_1} \right)^2, \quad (64)$$

из которого с помощью (9) можно получить следующий закон дисперсии:

$$\beta^2 = n_{20}^2 + \frac{1}{k_0^2} \left\{ \frac{g}{2} H_0^2 + \left( \frac{\mu\varepsilon_2}{2\varepsilon_1} \right)^2 \right\}. \quad (65)$$

Для кристалла с отрицательным коэффициентом керровской нелинейности для затухающих с осцилляциями волн первого типа дисперсионное уравнение (46) с использованием выражения (23) можно представить в виде

$$\frac{\mu}{2} + p \operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left( q^2 + \frac{g}{2} H_0^2 \right)^{1/2}, \quad (66)$$

отсюда получаются зависимости вида (63) и (65), в которых перед  $g$  ставится противоположный знак.

Для кристалла с отрицательным коэффициентом керровской нелинейности для затухающих с осцилляциями волн второго типа дисперсионное уравнение (50) с использованием выражения (33) можно представить в виде

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left( \frac{g}{2} H_0^2 - q_t^2 \right) = \sqrt{\frac{|g|}{2}} H_0 \left( \frac{\mu}{2} + p \operatorname{tg} \varphi \right). \quad (67)$$

Точное решение дисперсионного уравнения (67) имеет вид



$$\beta^2 = n_{10}^2 - \frac{1}{2k_0^2} \left\{ \frac{\mu^2}{2} + \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^2 g \operatorname{tg}^2 \varphi \times \right. \\ \left. \times \left[ -1 \pm \left( 1 - \frac{4\Delta_t}{g} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad (68)$$

где

$$\Delta_t = \sqrt{|g|} H_0 \left\{ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\mu}{2} - \sqrt{|g|} H_0 \right\} + k_0^2 (n_{20}^2 - n_{10}^2) + \frac{\mu^2}{4}.$$

Волны с законом дисперсии (68) существуют при условии  $\operatorname{tg} \varphi > \sqrt{2|g|} \Delta_t \varepsilon_1 / \varepsilon_2$ .

Если амплитуда поля на границе раздела выражается через характеристики кристаллов в виде (получается при  $\Delta_t = 0$ )

$$H_0 = \frac{\mu \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \sqrt{2|g|}} \left\{ 1 \pm \left( 1 - 8 \left( \frac{\varepsilon_1}{\mu \varepsilon_2} \right)^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ \frac{\mu^2}{4} + k_0^2 (n_{20}^2 - n_{10}^2) \right] \right)^{1/2} \right\}, \quad (69)$$

то из (67) получается волновое число

$$p = \sqrt{2|g|} H_0 \operatorname{tg} \varphi \varepsilon_2 / \varepsilon_1, \quad (70)$$

которому соответствует закон дисперсии

$$\beta^2 = n_{10}^2 - \frac{1}{k_0^2} \left\{ \frac{\mu^2}{4} + 2g \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} H_0 \operatorname{tg} \varphi \right)^2 \right\}. \quad (71)$$

Для существования волн с законом дисперсии (71) должно выполняться условие  $\mu^2 > 4k_0^2 (n_{10}^2 - n_{20}^2) / [1 + (\varepsilon_2 / \varepsilon_1)^2 / 2]$ .

Из полученных выражений (58), (61), (63), (65), (68) и (71) следует, что в основном приближении квадрат константы распространения линейно зависит от квадрата амплитуды магнитного поля на границе раздела кристаллов.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе установлено, что на границе раздела фоторефрактивного кристалла и керровского кристалла могут существовать нелинейные поверхностные волны несимметричного профиля двух типов, различающихся характером затухания. Волны первого типа затухают при удалении от границы раздела без осцилляций в глубину как фоторефрактивного кристалла, так и керровского, а волны второго типа затухают в глубину фоторефрактивного кристалла с осцилляциями. Волны

первого типа могут затухать монотонно при определенных условиях связи константы распространения, коэффициентов преломления и других физических характеристик фоторефрактивного и керровского кристаллов.

В данной работе были рассмотрены условия существования таких нелинейных поверхностных волн вблизи границы раздела фоторефрактивного кристалла и кристаллов с различными знаками коэффициента керровской нелинейности. В случае контакта фоторефрактивного кристалла с кристаллом с положительным коэффициентом керровской нелинейности возникают два типа нелинейных поверхностных волн с различным характером затухания. В случае контакта фоторефрактивного кристалла с кристаллом с отрицательным коэффициентом керровской нелинейности возникают два вида нелинейных поверхностных волн с затуханием без осцилляций и два вида волн, затухающих с осцилляциями.

Для всех рассмотренных в работе типов нелинейных поверхностных волн получены дисперсионные уравнения, найдены их решения, определяющие зависимости константы распространения от характеристик фоторефрактивного и керровского кристаллов в явном аналитическом виде, а также указаны условия их существования.

В работе приведен подход к решению дисперсионных уравнений, основанный на том, что известной характеристикой считается амплитуда поля  $H_0$  поверхностной волны на границе раздела кристаллов. В этом случае удалось найти точные решения дисперсионных уравнений в явном аналитическом виде без использования дополнительных приближений.

Возможность существования волн с осциллирующим затуханием принципиально отличает контакт фоторефрактивного кристалла и нелинейной керровской среды от контакта двух нелинейных керровских сред или контакта нелинейной керровской и линейной сред, поскольку осцилляции затухающего поля обусловлены фоторефрактивной нелинейностью диффузионного происхождения. Такое формирование поля демонстрировалось в поверхностных волнах, распространяющихся вдоль контакта фоторефрактивного кристалла с воздухом или металлической пленкой (т. е. с линейными средами) [9–11], однако вдоль контакта нелинейных сред с иным механизмом индуцирования нелинейности, керровского типа в частности, амплитуда поля в поверхностных волнах носит только апериодический или строго монотонный характер [12–18]. В связи с этим при проектировании различных оптических устройств

(переключателей, сенсоров), использующих волноводные свойства нелинейных поверхностных волн, существенное значение будет иметь тип нелинейности контактирующих кристаллических прослоек [29–31].

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. Tekkozyan, A. Babajanyan, and K. Nerkararyan, *Opt. Comm.* **305**, 190 (2013).
2. Y. V. Bludov, D. A. Smirnova, Yu. S. Kivshar, N. M. R. Peres, and M. I. Vasilevsky, *Phys. Rev. B* **89**, 035406 (2014).
3. I. S. Panyaev and D. G. Sannikov, *J. Opt. Soc. Amer. B* **33**, 220 (2016).
4. A. I. Ignatov, I. A. Nechepurenko, and D. G. Baranov, *Ann. Phys.* **528**, 537 (2016).
5. F. Yang and H. Tian, *J. Opt.* **18**, 1 (2016).
6. I. Haddouche and L. Cherbi, *Opt. Comm.* **382**, 132 (2017).
7. Y. M. Aleksandrov and V. V. Yatsishen, *J. Nano- and Electronic Phys.* **9**, 03039 (2017).
8. В. Н. Белый, Н. А. Хило, Письма в ЖТФ **23**, 31 (1997).
9. Д. Х. Усиевич, Б. А. Нурлигареев, В. А. Сычугов, Л. И. Ивлева, П. А. Лыков, Н. В. Богодаев, КЭ **40**, 437 (2010).
10. Д. Х. Усиевич, Б. А. Нурлигареев, В. А. Сычугов, Л. И. Ивлева, КЭ **43**, 14 (2013).
11. С. А. Четкин, И. М. Ахмеджанов, КЭ **41**, 980 (2011).
12. Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Acad. Press, San Diego (2003).
13. Yu. S. Kivshar, A. M. Kosevich, and O. A. Chubykalo, *Phys. Rev. A* **41**, 1677 (1990).
14. F. Kh. Abdullaev, B. B. Baizakov, and B. A. Umarov, *Opt. Comm.* **156**, 341 (1998).
15. И. Е. Дикштейн, Д. С. Никитов, С. А. Никитов, ФТТ **40**, 1885 (1998).
16. A. A. Sukhorukov and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 083901 (2001).
17. I. V. Shadrivov, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, A. A. Zharov, A. D. Boardman, and P. Egan, *Phys. Rev. E* **69**, 016617 (2004).
18. I. V. Shadrivov, A. A. Sukhorukov, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. E* **67**, 057602 (2003).
19. С. Е. Савотченко, Изв. вузов. Физика **47**, 79 (2004).
20. S. E. Savotchenko, *Mod. Phys. Lett. B* **32**, 1850120 (2018).
21. С. Е. Савотченко, ЖЭТФ **154**, 514 (2018).
22. Н. Н. Ахмедиев, В. И. Корнеев, Ю. В. Кузьменко, ЖЭТФ **88**, 107 (1985) [N. N. Akhmediev, V. I. Korneev, and U. V. Kuz'menko, *J. Exper. Theor. Phys.* **88**, 107 (1985)].
23. A. D. Boardman, M. M. Shabat, and R. F. Wallis, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **24**, 1702 (1991).
24. С. Е. Савотченко, Конденсированные среды и межфазные границы **19**, 567 (2017).
25. С. Е. Савотченко, Вестник ВГУ, сер.: Физика. Математика **1**, 44 (2018).
26. S. E. Savotchenko, *Surfaces and Interfaces* **13**, 157 (2018).
27. М. П. Петров, С. И. Степанов, А. В. Хоменко, *Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике*, Наука, Санкт-Петербург (1992).
28. V. S. Zuev, *J. Russ. Laser Res.* **26**, 347 (2005).
29. N. Zhong, Z. Wang, M. Chen, X. Xin, R. Wu, Y. Cen, and Y. Li, *Sensors and Actuators B: Chem.* **254**, 133 (2018).
30. D. Zhang, Z. Li, W. Hu, and B. Cheng, *Appl. Phys. Lett.* **67**, 2431 (1995).
31. T. Strudley, R. Bruck, B. Mills, and O. L. Muskens, *Light: Sci. Appl.* **3**, e207 (2014).